Inequacions

Joan Josep de Val
Departament de Matemàtiques
IOC

1. Desigualtats

Recordem el significat de les següents desigualtats:

$\mathbf{a} > \mathbf{b}$ a major que b

$\mathbf{a} \geq \mathbf{b}$ a major o igual que b

$\mathbf{a} < \mathbf{b}$ a menor que b

$\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ a menor o igual que b

2. Orientacions pràctiques

- Intervals

Seran a i b dos nombres reals ($\mathbf{a} < \mathbf{b}$).

a) *Interval tancat d'extrems a i b* és el conjunt de nombres reals compresos entre a i b (a í b inclosos). Ho escrivim així:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \,/\, \mathbf{a} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{b}\}$$

O sigui, és el conjunt de nombres reals majors o iguals que a, i menors o iguals que b.

b) *Interval obert d'extrems a i b* és el conjunt de nombres reals compresos entre a i b (a i b exclosos). Ho escrivim així:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \,/\, \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$$

O sigui, és el conjunt de nombres reals majors que a i menors que b.

c) *Interval semiobert per la dreta d'extrems a i b* és el conjunt de nombres reals compresos entre a i b (a inclòs i b exclòs). Ho escrivim així:

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \,/\, \mathbf{a} \leq \mathbf{x} < \mathbf{b}\}$$

O sigui, és el conjunt de nombres reals majors o iguals que a, i menors que b.

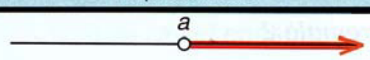
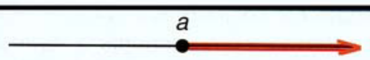
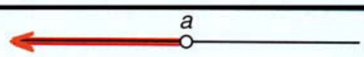
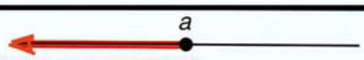
d) *Interval semiobert per l'esquerra d'extrems a i b* és el conjunt de nombres reals compresos entre a i b (a exclòs i b inclòs). Ho escrivim així:

$$(\mathbf{a},\mathbf{b}] = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \,/\, \mathbf{a} < \mathbf{x} \le \mathbf{b}\}$$

O sigui, és el conjunt de nombres reals majors que a, i menors o iguals que b.

- Intervals infinits

Són intervals que tenen el símbol ∞ en un dels extrems. Aquests intervals es corresponen amb semirectes de la recta real.

Interval	*Representació*
$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \ge a\}$	
$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$	

- Propietats de les desigualtats

a) Si sumem (o restem) un nombre qualsevol $\mathbf{c}$ als dos membres d'una desigualtat, s'obté una altra desigualtat del mateix sentit:

si $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ llavors $\mathbf{a} + \mathbf{c} > \mathbf{b} + \mathbf{c}$

si $\mathbf{a} \ge \mathbf{b}$ llavors $\mathbf{a} + \mathbf{c} \ge \mathbf{b} + \mathbf{c}$

b) Si multipliquem (o dividim) els dos membres d'una desigualtat per un nombre positiu, s'obté una altra desigualtat del mateix sentit:

si $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ i $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ llavors $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} > \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

si $\mathbf{a} \ge \mathbf{b}$ i $\mathbf{c} > \mathbf{0}$ llavors $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \ge \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

c) Si multipliquem (o dividim) els dosmembres d'una desigualtat per un nombre negatiu, s'inverteix el sentit de la desigualtat:

si $\mathbf{a} > \mathbf{b}$ i $\mathbf{c} < \mathbf{0}$ **llavors** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} < \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

si $\mathbf{a} \ge \mathbf{b}$ i $\mathbf{c} < \mathbf{0}$ **llavors** $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \le \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

d) Si en una desigualtat on tots els membres tenen el mateix signe substituïm cada membre pel seu invers, s'obté una altra desigualtat on s'inverteix el sentit:

si $\mathbf{a} > \mathbf{b} > \mathbf{0}$ llavors $\mathbf{0} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} < \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}$

si $\mathbf{a} < \mathbf{b} < \mathbf{0}$ llavors $\mathbf{0} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{a}} > \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b}}$

3. Inequacions. Introducció

Una inequació és una desigualtat entre dues expressions algebraiques.

Una solució de la inequació està formada pel valor que ha de tenir cada incògnita perquè la desigualtat es compleixi.

El conjunt de totes les solucions és el conjunt solució de la inequació.

Dues inequacions són equivalents quan tenen el mateix conjunt solució.

Per transformar una inequació en una altra d'equivalent, utilitzem els mateixos mètodes que per transformar equacions en equacions equivalents, però tenint en compte les propietats de les desigualtats.

NOTA 1: en tot el que segueix, de les 4 desigualtats possibles, només considerarem la següent: $>$. El que diem per a aquesta també és aplicable, amb raonaments anàlegs, a les altres tres: $\geq$, $<$ i $\leq$.

4. Inequacions de primer grau (o lineals) amb una incògnita

Definició: una inequació és de primer grau amb una incògnita quan és equivalent a una de les següents;

$$\mathbf{ax} + \mathbf{b} > \mathbf{0} \quad \text{o} \quad \mathbf{ax} + \mathbf{b} \geq \mathbf{0} \quad \text{o} \quad \mathbf{ax} + \mathbf{b} < \mathbf{0} \quad \text{o} \quad \mathbf{ax} + \mathbf{b} \leq \mathbf{0}$$

És a dir, quan després de reduir-la al màxim té una sola incògnita i és elevada a 1.

Resolució analítica:

El mètode de resolució és el mateix que el d'una equació de primer grau. S'ha de tenir en compte, però, que quan s'aïlla una incògnita, si el coeficient que la multiplica és negatiu, s'ha de canviar el sentit de la desigualtat.

Suposem que la inequació, un cop reduïda, és de la forrna:

$$\mathbf{ax} + \mathbf{b} > \mathbf{0} \text{ Llavors:}$$

$$\mathbf{ax} > -\mathbf{b}$$

a) Si $\mathbf{a} > \mathbf{0}$ llavors $\mathbf{x} > -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

b) Si $\mathbf{a} < \mathbf{0}$ llavors $\mathbf{x} < -\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}$

c) Si $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

- quan $\mathbf{b} > \mathbf{0}$: tot nombre real és solució
- quan $\mathbf{b} < \mathbf{0}$: no té solució
- quan $\mathbf{b} = \mathbf{0}$: no té solució

Resolució gràfica:

Es procedeix de la següent manera:

a) Reduïm la inequació a la forma:

$$\mathbf{ax + b > 0}$$

b) Representem gràficament la recta auxiliar:

$$\mathbf{y = ax + b}$$

c) El punt on aquesta recta talla l'eix X determina dues semirectes sobre aquest eix. Una de les dues representarà el conjunt solució: aquella que tingui la recta auxiliar per sobre.

Exemple 1:

Resoleu la inequació $\mathbf{5x - 4 < 7x - 1}$

Resolució analítica: $\mathbf{5x - 4 < 7x - 1 \Rightarrow 5x - 7x < 4 - 1 \Rightarrow -2x < 3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}}$

Solució: $\left(-\frac{3}{2}, +\infty\right)$

Resolució gràfica: La inequació equivalent és $\mathbf{-2x - 3 < 0}$

Representem gràficament la recta auxiliar $\mathbf{y = -2x - 3}$. La solució és la semirecta de l'eix OX que té la recta auxiliar per sota (Figura 1).

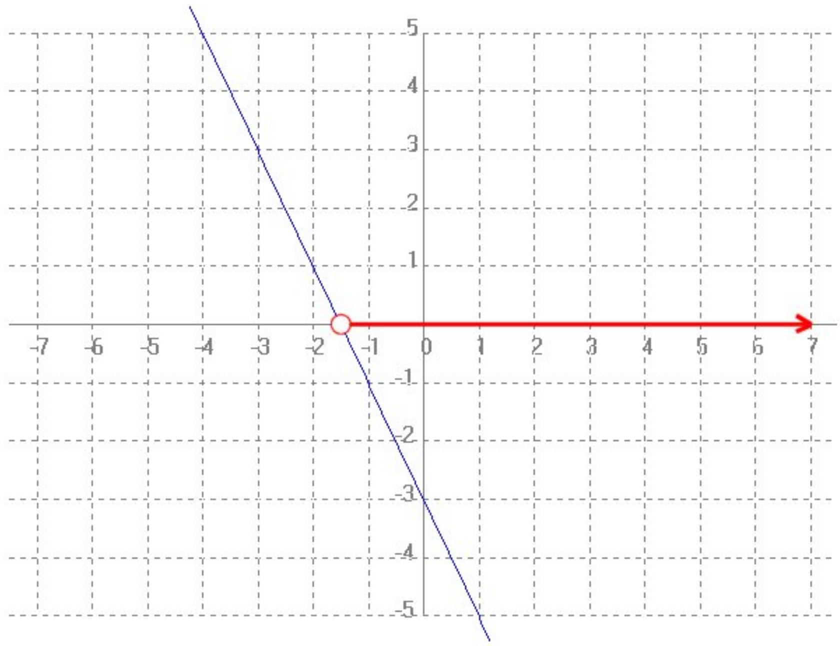


Figura 1

5. Inequacions de segon grau amb una incògnita

Definició: una inequació és de segon grau amb una incògnita quan és equivalent a una de les següents:

$$\mathbf{ax^2+bx+c>0} \quad \text{o} \quad \mathbf{ax^2+bx+c\geq 0} \quad \text{o} \quad \mathbf{ax^2+bx+c<0} \quad \text{o} \quad \mathbf{ax^2+bx+c\leq 0}$$

És a dir, quan després de reduir-la al màxim, el major grau de la incògnita és 2.

Resolució analítica

Suposem que la inequació, un cop reduïda, és de la forma:

$\mathbf{ax^2+bx+c>0}$ Resolem l'equació:

$$\mathbf{ax^2+bx+c=0} \qquad (1)$$

Se'ns poden presentar 3 casos:

a) L'equació **(1)** no té solució real:

Llavors, en la inequació, substituïm x per qualsevol valor i fem les operacions:

- si es verifica la desigualtat, el conjunt solució està format per tots els nombres reals.
- si no es verifica la desigualtat, la inequació no té solució real.

b) L'equació **(1)** té una solució doble $\mathbf{x_0}$:

Llavors, en la inequació, substituïm x per qualsevol valor diferent de $\mathbf{x_0}$, i fem les operacions:

- si es verifica la desigualtat, el conjunt solució està format per tots els nombres reals, excepte $\mathbf{x_0}$.
- si no es verifica la desigualtat, la inequació no té solució real.

NOTA 2: si en lloc de la inequació $\mathbf{ax^2+bx+c>0}$ tinguéssim la inequació $\mathbf{ax^2+bx+c\geq 0}$, seria solució $\mathbf{x_0}$.

c) L'equació (1) té dues solucions reals, $\mathbf{x_1}$ i $\mathbf{x_2}$ ($\mathbf{x_1<x_2}$).

Aquests dos valors determinen tres intervals en la recta real:

$(-\infty,\mathbf{x_1})$: conjunt format per tots els nombres reals $\mathbf{x}$ menors que $\mathbf{x_1}$: $\mathbf{x<x_1}$.

$(\mathbf{x_1<x_2})$: conjunt format per tots els nombres reals $\mathbf{x}$ majors que $\mathbf{x_1}$ i menors que $\mathbf{x_2}$: $\mathbf{x_1<x<x_2}$.

$(\mathbf{x_2},+\infty)$: conjunt format per tots els nombres reals $\mathbf{x}$ majors que: $\mathbf{x>x_2}$.

Hem d'estudiar quin o quins d'aquests tres intervals formen el conjunt solució de la inequació.

Per saber si tots els punts d'un determinat interval formen part del conjunt solució, substituïm, en la inequació, **x** per un valor qualsevol d'aquest interval:

-si es verifica la desigualtat, tots els nombres d'aquest interval formen part del conjunt solució de la inequació,

-si no es verifica la desigualtat, cap nombre d'aquest interval és solució de la inequació.

NOTA 3: si en lloc de la inequació $\mathbf{ax^2 + bx + c > 0}$ tinguéssim la inequació $\mathbf{ax^2 + bx + c \geq 0}$ també serien solució (en els apartats b i c) les arrels de l'equació (1).

Com a conseqüència, els intervals que formen part del conjunt solució del cas c, serien tancats en lloc d'oberts.

Resolució gràfica:

Suposem que la inequació, un cop reduïda, és de la forma:

$$\mathbf{ax^2 + bx + c > 0}$$

Llavors, representem gràficament la paràbola auxiliar:

$$\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$$

Se'ns poden presentar tres casos:

a) La paràbola no talla l'eix OX:

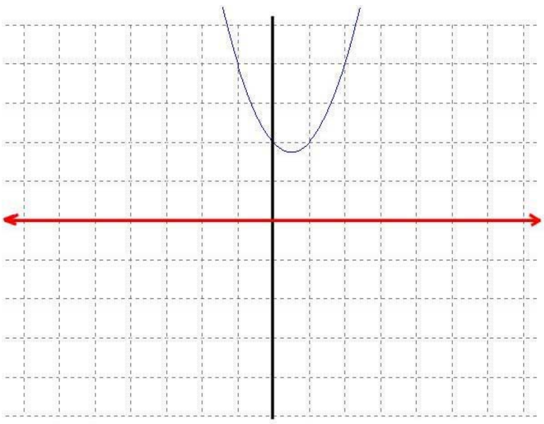


Figura 2

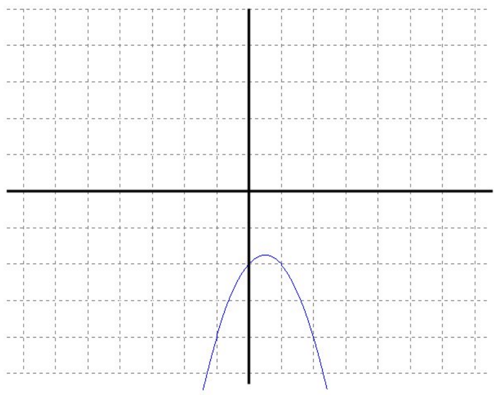


Figura 3

Si tots els punts de la paràbola són per damunt de l'eix OX, tot nombre real és solució de la inequació (Figura 2).

Si tols els punts de la paràbola són per sota de l'eix OX, la inequació no té solució real (Figura 3).

b) La paràbola té el vèrtex en l'eix OX:

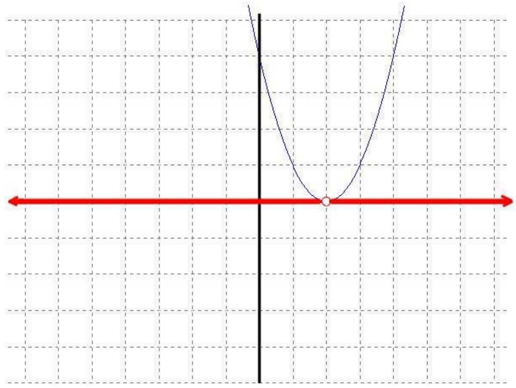


Figura 4

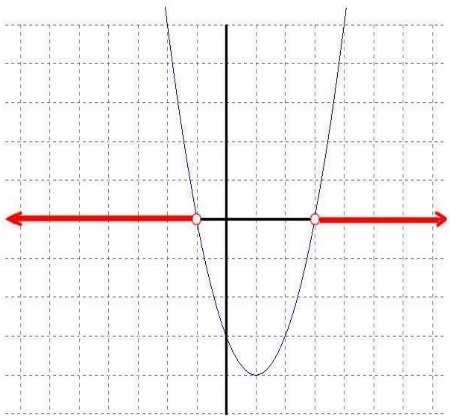
Figura 5

Si tots els altres punts de la paràbola són per damunt de l'eix OX, tots els nombres reals, excepte l'abscissa del vèrtex, són solució de la inequació (Figura 4).

Sí tots els altres punts són per sota de l'eix OX, la inequació no té solució real (Figura 5).

(Vegeu la NOTA 2.)

c) La paràbola talla l'eix OX en dos punts:



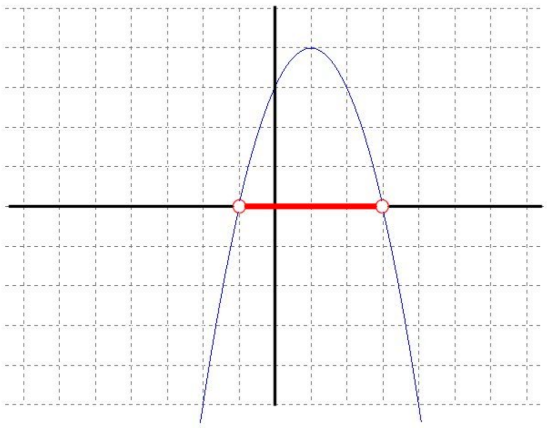


Figura 6

Figura 7

Les solucions de la inequació són aquells valors de **x** per als quals la paràbola és per damunt de l'eix OX (Figures 6 i 7). És a dir, quan els valors de y siguin positius per als corresponents valors de x, aleshores aquests valors de x en seran les solucions.

(Vegeu la NOTA 3.)

Exemple 2:

Resoleu la inequació $\mathbf{x^2 - 2x - 3 \leq 0}$

Començarem per la *resolució analítica*.

Resolem l'equació $\mathbf{x^2 - 2x - 3 = 0}$

$$\mathbf{x = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} = \begin{cases} 3 \\ -1 \end{cases}}$$

Escollim

$\mathbf{x = -2 \Rightarrow (-2)^2 - 2(-2) - 3 = 4 + 4 - 3 = 5}$; no és $\leq \mathbf{0}$, per tant, no val.

$\mathbf{x = 0 \Rightarrow 0^2 - 2 \cdot 0 - 3 = -3 = -3}$; com és $\leq \mathbf{0}$, val.

$\mathbf{x = 4 \Rightarrow 4^2 - 2 \cdot 4 - 3 = 16 - 8 - 3 = 5}$; no és $\leq \mathbf{0}$, per tant, no val.

Aleshores, la solució de la inequació és el conjunt $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R} \,/\, -\mathbf{1} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{3}\} = [-\mathbf{1}, \mathbf{3}]$.

Per a la *resolució gràfica* és necessària la representació gràfica de la paràbola $\mathbf{y = x^2 - 2x - 3}$.

En general, la representació gràfica de la paràbola $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$ es basa en els següents apartats:

a) Observació del coeficient $\mathbf{a}$. Si és $\mathbf{a > 0}$, el vèrtex és un mínim absolut; en canvi, si $\mathbf{a < 0}$ és un màxim absolut.

b) Punts d'intersecció amb els eixos de coordenades.

Amb l'eix **OY**: $(\mathbf{0, c})$ Amb l'eix **OY**: $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4 \cdot a \cdot c}}{2a}}$

c) Les coordenades del vèrtex.

$$\mathbf{x_v = -\frac{b}{2a}; \quad y_v = a\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b\left(-\frac{b}{2a}\right) + c}$$

La solució de la inequació $\mathbf{x^2 - 2x - 3 \le 0}$ serà el conjunt dels valors de $\mathbf{x}$ per als quals $\mathbf{y = x^2 - 2x - 3 \le 0}$

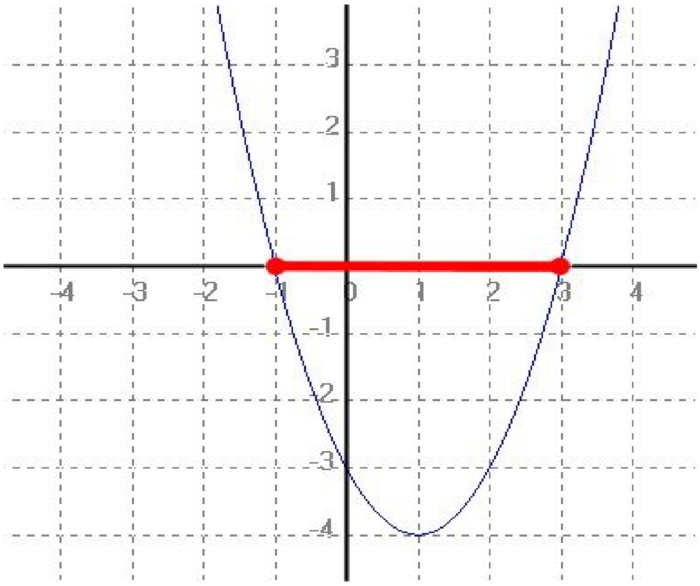


Figura 8

6. Inequacións de primer grau amb dues incògnites

Definició: una inequació és de primer grau amb dues incògnites quan és equivalent a una de les següents:

$\mathbf{ax + by + c > 0}$ o $\mathbf{ax + by + c \ge 0}$ o $\mathbf{ax + by + c < 0}$ o $\mathbf{ax + by + c \le 0}$

és a dir, quan després de reduir-la, té dues incògnites de grau 1.

Resolució:

Suposem que la inequació, un cop reduïda, és de la forma:

$$\mathbf{ax + by + c > 0}$$

Es procedeix de la següent manera:

a) Aïllem $\mathbf{y}$ de la inequació:

$$\mathbf{y > -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \quad si \quad b > 0 \quad (1)}$$

$$\mathbf{y < -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}, \quad si \quad b < 0 \quad (2)}$$

b) Representem gràficament la recta auxiliar:

$$\mathbf{y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}}$$

c) Aquesta recta auxiliar divideix el pla en dos semiplans:

-Si, en aïllar $\mathbf{y}$, hem obtingut la inequació **(1)**, el conjunt solució és el format per les parelles $(\mathbf{x, y})$ determinades per les coordenades de tots els punts del semiplà superior.

NOTA 4: si la inequació és del tipus $\mathbf{ax+by+c\geq 0}$ o $\mathbf{ax+by+c\leq 0}$ llavors les coordenades $(\mathbf{x,y})$ dels punts de la recta auxiliar també pertanyen al conjunt solució.

-Si, en aïllar $\mathbf{y}$, hem obtingut la inequació **(2)**, el conjunt solució és el format per les parelles $(\mathbf{x,y})$ determinades per les coordenades de tots els punts del semiplà inferior.

(Vegeu la NOTA 4.)

(Si volguéssim comprovar quin dels dos semiplans és la solució, se substitueixen en la inequació les coordenades d'un punt qualsevol d'un dels semiplans i fem les operacions. Si es verifica la desigualtat, el semiplà solució és aquest. Sí no es verifica,és l'altre.)

Exemple 3:

Resoleu la inequació $\mathbf{2x+y\geq 1}$

Resolució:

La inequació equival a $\mathbf{y\geq -2x+1}$. Representem la recta $\mathbf{y=-2x+1}$

Considerem un punt d'un dels semiplans en què queda dividit el pla i substituïm les seves coordenades en la inequació. Prenem, per exemple, el punt $(\mathbf{0,0})$. Dóna $\mathbf{0\geq 0+1}$, no compleix la inequació; per tant, les coordenades d'aquest punt no són solució i tampoc no ho són les de tots els punts del semiplà que el conté.

Aleshores, les solucions de la inequació seran les coordenades de l'altre semiplà.

Pintem de color el semiplà solució i marquem amb un traç continu la recta $\mathbf{y=-2x+1}$ (Figura 9). Així indiquem que els punts d'aquesta recta són solució de la inequació, ja que es tracta d'una desigualtat no estricta ($\geq$).

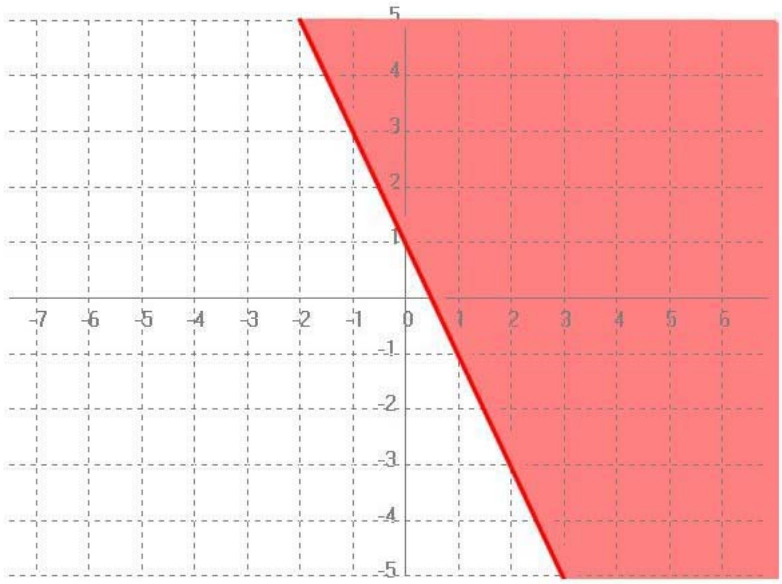


Figura 9

7. Sistemes d'inequacions. Introducció

Un sistema d'inequacions és un conjunt d'inequacions.

Resoldre un sistema d'inequacions significa trobar els valors de les incògnites, per als quals es compleixen simultàniament totes les desigualtats.

8. Sistemes d'inequacions de primer grau amb una incògnita

Definició: un sistema d'inequacions de primer grau amb una incògnita és el conjunt format per dos o més inequacions de primer grau amb una incògnita.

Resolució: es procedeix de la següent manera:

a) Resolem independentment cada inequació.

b) El conjunt solució del sistema està format per les solucions comunes a totes les inequacions.

Exemple 4:

Resoleu el següent sistema d'inequacions: $\left.\begin{array}{rcl} \mathbf{4x-3} & < & \mathbf{x+2} \\ \mathbf{2+3x} & \geq & \mathbf{x} \end{array}\right\}$

Resolguem cada inequació per separat.

Resolguem la primera inequació: $\mathbf{4x-3<x+2}$

Passem els termes amb **x** al primer membre i els altres, al segon:

$$\mathbf{4x-x<3+2}$$

$$\mathbf{3x<5}$$

Aïllem x: $$\mathbf{x<\frac{5}{3}}$$

El conjunt solució de la primera inequació està format per tots els valors reals menors que $\mathbf{\frac{5}{3}}$.

Resolguem la segona inequació: $\mathbf{2+3x\geq x}$

Passem els termes amb **x** al primer membre i els altres al segon:

$$\mathbf{3x-x\geq -2}$$

Aïllem **x**: $$\mathbf{2x\geq -2,\quad x\geq \frac{-2}{2},\quad x\geq -1}$$

El conjunt solució de la segona inequació està format per tots els valors majors o iguals que $\mathbf{-1}$.

Així, el conjunt solució del sistema està format per les solucions comunes a les dues inequacions. Són els valors compresos entre $\mathbf{-1}$ (inclòs) i $\mathbf{\frac{5}{3}}$, és a dir, és l'interval $\mathbf{\left[-1,\frac{5}{3}\right)}$ (Figura 10).

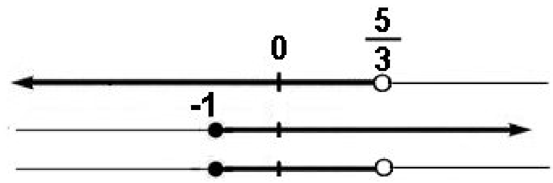


Figura 10

Exemple 5:

Resoleu la inequació $|\mathbf{x-2}| \le \mathbf{4}$

Resolució analítica: Observeu que un dels membres de la inequació està en valor absolut. S'ha de realitzar amb la definició de valor absolut d'un nombre real:

$$|\mathbf{x}| = \begin{cases} \mathbf{x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x \ge 0} \\ \mathbf{-x} & \mathbf{si} \quad \mathbf{x < 0} \end{cases}$$

Aleshores, la inequació s'ha de desglossar en dues: $|\mathbf{x-2}| \le \mathbf{4} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{x-2} & \mathbf{\le 4} \\ \mathbf{-(x-2)} & \mathbf{\le 4} \end{cases}$

Tenim, així, un sistema de primer grau de dues inequacions amb una incògnita.

Resolem la primera: $\mathbf{x-2 \le 4 \Rightarrow x \le 2+4 \Rightarrow x \le 6}$

Resolem la segona: $\mathbf{-(x-2) \le 4 \Rightarrow x-2 \ge -4 \Rightarrow x \ge -4+2 \Rightarrow x \ge -2}$

L'interval solució és $[\mathbf{-2,6}]$.

9. Sistemes d'inequacions de primer grau amb dues incògnites

Definició: un sistema d'inequacions de primer grau amb dues incògnites és el conjunt de dues o més inequacions de primer grau amb dues incògnites.

Resolució: procedim de la següent manera:

a) Resolem cada inequació independentment.

b) El conjunt solució del sistema està format per les solucions comunes a totes les inequacions.

Exemple 6:

Resoleu el següent sistema d'inequacions: $\left.\begin{matrix} \mathbf{x-y} & \le & \mathbf{-2} \\ \mathbf{4x+y} & \le & \mathbf{2} \end{matrix}\right\}$

Resolució:
Resolem gràficament $\mathbf{y \geq x + 2}$ i $\mathbf{y \leq -4x + 2}$ en la figura 11.

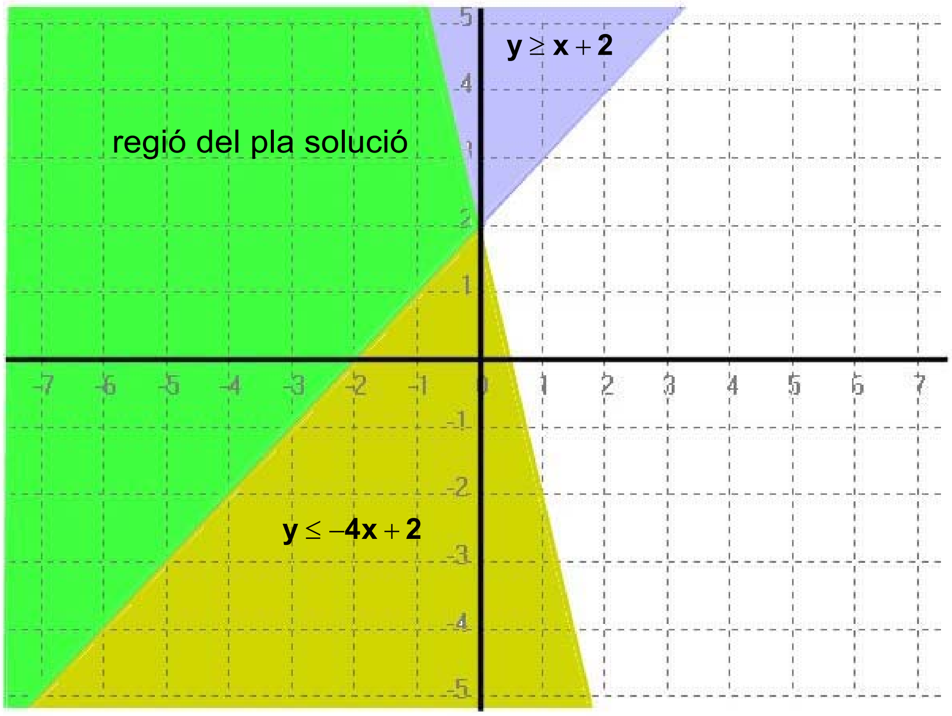


Figura 11

Les solucions del sistema són les coordenades dels punts que pertanyen alhora als dos semiplans solució (regió del pla solució del sistema).

Exemple 7:

Una empresa de lloguer de màquines per a l'horticultura cobra per un tallagespa 18 €, fixes, més 3 € per dia. Una altra empresa no té taxa fixa, però cobra 6 € per dia pel lloguer de la mateixa màquina. A partir de quants dies resulta més avantatjosa per al client la primera empresa?

Plantejament i resolució analítica:
Per $\mathbf{x}$ dies de lloguer de la màquina la primera empresa cobraria $\mathbf{18 + 3 \cdot x}$ € i, pels mateixos dies, la segona empresa cobraria $\mathbf{6 \cdot x}$ €. Perquè la primera empresa sigui més avantatjosa ha de ser el preu total del seu lloguer més barat - inferior- que el de la segona durant aquests dies. És a dir .

$$\mathbf{18 + 3x < 6x \Rightarrow 18 < 6x - 3x \Rightarrow 18 < 3x \Rightarrow 3x > 18 \Rightarrow x > \frac{18}{3} \Rightarrow x > 6}$$

Solució: A partir del sisè dia.