3 # Equacions, sistemes i inequacions

En context (pàg. 67)

a) Resposta oberta, a manera de reflexió individual.

b) El contraexemple d'aquesta conjectura és que C, A i B són enters positius, sabent que Z, X i Y són enters positius més grans que 2 que compleixin $C^z = A^x + B^y$

c) Resposta oberta, a manera de reflexió individual.

d) $3^3 + 6^3 = 3^5$

Fixa-t'hi (pàg. 71)

$$\frac{x}{x-2} + \frac{1}{x-4} = \frac{2}{x^2-6x+8} = \frac{2}{(x-2)(x-4)} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-4)x + (x-2) = 2 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

$x = 4$ no és solució de l'equació, però en la resolució hi hem introduït aquest resultat quan hem simplificat el denominador.

Fixa-t'hi (pàg. 77)

Sumant o restant una mateixa expressió polinòmica:

$$x^2 + 2x \leq x^2 + 3x - 1$$

Multiplicant o dividint per un nombre positiu els dos membres de l'equació:

$$x \leq \frac{3x-1}{2}$$

Multiplicant o dividint per un nombre negatiu i invertint el sentit de la desigualtat:

$$-x \geq \frac{3x-1}{-2}$$

Problemes resolts (pàgs. 83 i 84)

1. a) $6x^4 + 2x^2 - 8 = 0$

Efectuem el canvi de variable $x^2 = t$:

$$6t^2 + 2t - 8 = 0 \rightarrow t = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 6 \cdot (-8)}}{2 \cdot (-8)} \rightarrow$$

$$\rightarrow t = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = -\dfrac{4}{3} \end{cases}$$

Desfem el canvi de variable:

$$x^2 = 1 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

Descartem t_2, ja que no hi pot haver arrels negatives.

b) $x^8 - 9x^5 + 8x^2 = 0$

$x^2(x^6 - 9x^3 + 8) = 0$

Traiem com a factor comú x^2, i veiem que $x = 0$ és solució de la nostra equació. Procedim a resoldre l'equació restant; canviem x^3 per t:

$$t^2 - 9t + 8 = 0 \rightarrow t = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{2} \rightarrow t = \begin{cases} t_1 = 8 \\ t_2 = 1 \end{cases}$$

Efectuem el canvi de variable:

$$x_1 = \sqrt[3]{1} = 1; \quad x_2 = \sqrt[3]{8} = 2$$

Les solucions són 0, 1 i 2.

2. $0{,}6A + 0{,}5B = 0{,}3(A + B + C)$

$0{,}2A + 0{,}6B + 0{,}6C = 0{,}5(A + B + C)$

$C = A + 100$

$$\left.\begin{aligned} 0{,}3A + 0{,}2B - 0{,}3C &= 0 \\ -0{,}3A + 0{,}1B + 0{,}1C &= 0 \\ -A + C &= 100 \end{aligned}\right\}$$

$$\left.\begin{aligned} 0{,}3A + 0{,}2B - 0{,}3C &= 0 \\ -0{,}3A + 0{,}1B + 0{,}1C &= 0 \\ -A + C &= 100 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[2^a+1^a]{1^a+0{,}3\cdot 3^a} \left.\begin{aligned} 0{,}2B &= 30 \\ 0{,}3B - 0{,}2C &= 0 \\ -A + C &= 100 \end{aligned}\right\}$$

$$B = \frac{30}{0{,}2} = 150; \quad C = \frac{45}{0{,}2} = 225; \quad A = 225 - 100 = 125$$

3. a) $\dfrac{3x+1}{x-1} \geq 2$

$$\frac{3x+1}{x-1} - 2 \geq 0 \rightarrow \frac{x+3}{x-1} \geq 0$$

L'arrel del numerador és $x = -3$ i l'arrel del denominador és $x = 1$.

	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$x + 3$	–	+	+
$x - 1$	–	–	+
$\dfrac{x+3}{x-1}$	+	–	+

Així, la solució de la inequació és:

$$(-\infty, 3) \cup (1, \infty)$$

b) $\dfrac{x}{x+3} \leq \dfrac{8}{x+6}$

$$\frac{x}{x+3} - \frac{8}{x+6} \leq 0 \rightarrow \frac{x^2 - 2x - 24}{(x+3)(x+6)} \leq 0 \rightarrow$$

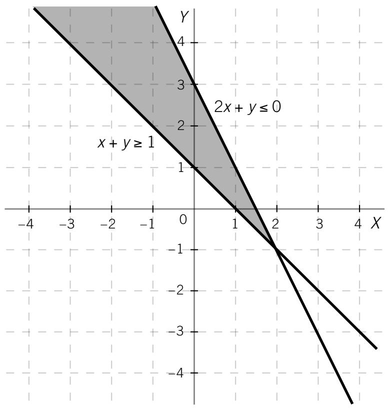
$$\rightarrow \frac{(x+4)(x-6)}{(x+3)(x+6)} \leq 0$$

Les arrels del numerador són $x = -4$ i $x = 6$ i les arrels del denominador són $x = -3$ i $x = -6$.

	$(-\infty,-6)$	$(-6,-4]$	$[-4,-3)$	$(-3,6]$	$[6,\infty)$
$x+4$	–	–	+	+	+
$x-6$	–	–	–	–	+
$x+3$	–	–	–	+	+
$x+6$	–	+	+	+	+
$\dfrac{(x+4)(x-6)}{(x+3)(x+6)}$	+	–	+	–	+

Per tant, la solució de la inequació és $(-6,-4]\cup(-3,6]$.

4. $\left.\begin{array}{l} 2x + y \le 3 \\ x + y \ge 1 \end{array}\right\}$



Exercicis i problemes (pàgs. 85 a 90)

1 EQUACIONS — Pàgs. 85 a 86

5. a) $\dfrac{3x}{2} + 2 = x + 4$

$\dfrac{3x}{2} - x = 2 \rightarrow x = 4$

b) $\dfrac{x}{4} + 10 = \dfrac{x}{5} + 16$

$\dfrac{x}{4} - \dfrac{x}{5} = 6 \rightarrow \dfrac{x}{20} = 6 \rightarrow x = 120$

c) $\dfrac{9x}{4} - 6 = \dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{3}$

$\dfrac{9x}{4} - \dfrac{2x}{3} = \dfrac{19}{3} \rightarrow \dfrac{19x}{12} = \dfrac{19}{3} \rightarrow x = 4$

d) $x + \dfrac{x+1}{5} = x + \dfrac{x}{2}$

$\dfrac{x+1}{5} - \dfrac{x}{2} = 0 \rightarrow \dfrac{-3x+2}{10} = 0 \rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

6. a) $x^2 - 7x + 12 = 0$

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

b) $2x^2 + 10x - 48 = 0$

$$x = \frac{-10 \pm \sqrt{10^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-48)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} x_1 = -8 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

c) $x^2 - x + \dfrac{1}{4} = 0$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}$$

7. a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

Efectuem el canvi de variable, $x^2 = t$:

$$t^2 - 5t + 4 = 0$$

$$t = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

Desfem el canvi de variable:

$$x^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

b) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$

Efectuem el canvi de variable, $x^2 = t$:

$$4t^2 - 17t + 4 = 0$$

$$t = \frac{-(-17) \pm \sqrt{(-17)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \begin{cases} t_1 = \dfrac{1}{4} \\ t_2 = 4 \end{cases}$$

Desfem el canvi de variable:

$$x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{1}{2} \\ x_2 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x_3 = -2 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

c) $x^4 - 6x^2 - 27 = 0$

Efectuem el canvi de variable, $x^2 = t$:

$$t = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-27)}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} t_1 = -3 \\ t_2 = 9 \end{cases}$$

Desfem el canvi de variable. En fer-ho, veiem que hem de descartar t_1, ja que la x no tindria un valor real pel fet de ser negatiu:

$$x^2 = 9 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

8. L'àrea és $A = x^2$; per tant, $x = 8$ m. El perímetre d'un quadrat és $P = 4x = 32$ m.

9. $y = 2^{\frac{x}{5}}$

$$32 = 2^{\frac{x}{5}} \rightarrow \log 32 = \log 2^{\frac{x}{5}}$$

$$\rightarrow \log 32 = \frac{x}{5}\log 2 \rightarrow x = \frac{5 \cdot \log 32}{\log 2} = 25 \text{ h}$$

10. Sigui $p(x) = 0$ el nostre polinomi de grau n. Imaginem-nos que $p(x)$ té m arrels, en què $m > n$, les quals anomenem α_1, α_2, … α_m.

Podríem expressar $p(x)$ de la manera:

$$p(x) = k(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_m)$$

Però aquest polinomi, com que té m membres, donarà lloc a un terme de grau m; és a dir, kx^m. Com que m és més gran que n, s'incompleix la condició inicial, així que un polinomi de grau n no pot tenir més de n arrels.

En alguns casos, podrem factorizar el polinomi com:

$$p(x) = k(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)...(x - \alpha_n)$$

En aquest cas, veiem que el nombre d'arrels és exactament n. Tanmateix, en la descomposició en factors, podem trobar termes del tipus $(x^2 + 1)$, als quals no correspon cap arrel real. En aquest cas, tindrem un nombre d'arrels més petit que n.

Així, el nombre d'arrels ha de ser inferior o igual al grau del polinomi.

11. $$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 14\,000 \\ (x-3)(y+1500) = 14\,000 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow (x-3)\left(\frac{14\,000}{x} + 1500\right) = 14\,000 \rightarrow$$

$$\rightarrow -\frac{42\,000}{x} + 1500x - 4\,500 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 1500x^2 - 4\,500x - 4\,2000 = 0 \rightarrow x_1 = 7; \quad x_2 = -4$$

Com que no pot tenir un nombre negatiu de membres, el grup està format per 7 amics. Cadascun ha de pagar:

$$y + 1500 = \frac{14\,000}{7} + 1500 = 3\,500$$

12. $$\left.\begin{array}{l} x \cdot y = 60\,000 \\ (x-2)(y+2\,500) = 60\,000 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{-120\,000}{x} + 2\,500x - 5\,000 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2\,500x^2 - 5\,000x - 120\,000 = 0 \rightarrow x_1 = 8; x_2 = -6$$

Descartem la solució negativa, ja que no hi pot haver –6 amics.

$$y = \frac{60\,000}{8} = 7\,500$$

Per tant, són 8 amics i cadascun rep 7 500 euros.

13. $$x^2 + (x+1)^2 = 4141 \rightarrow 2x^2 + 2x - 4\,140 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-4\,140)}}{2 \cdot 2} = \begin{cases} x_1 = -46 \\ x_2 = 45 \end{cases}$$

Descartem els nombres negatius, ja que no són naturals. Els nombres buscats són el 45 i el 46.

14. Perquè no hi hagi solució, x s'ha de simplificar de l'equació:

$$\frac{kx}{3} = x \rightarrow k = 3$$

15. a) $\sqrt{2x-1} + \sqrt{x+4} = 6$

$$\left(\sqrt{2x-1}\right)^2 = \left(6 - \sqrt{x+4}\right)^2 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x - 1 = 36 - 12\sqrt{x+4} + x + 4 \rightarrow$$

$$\rightarrow x - 41 = -12\sqrt{x+4} \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 82x + 1681 = 144(x+4) \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 226x + 1105 = 0$$

Les solucions del polinomi de segon grau obtingut són $x_1 = 5$ i $x_2 = 221$.

Comprovem en l'equació inicial i observem que només $x = 5$ compleix la igualtat; per tant, descartem $x = 221$.

b) $\sqrt{2x+1} = x - 1$

$$\left(\sqrt{2x+1}\right)^2 = (x-1)^2 \rightarrow 2x + 1 = x^2 - 2x + 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x(x-4) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

c) $\sqrt{2} + \sqrt{\dfrac{2^3}{x}} = \sqrt{2x}$

$$\sqrt{2x} + \sqrt{2^3} = \sqrt{2}\,x \quad \rightarrow \quad \sqrt{2x} = \sqrt{2}\,x - \sqrt{2^3}$$

$$2x = 2x^2 + 2^3 - 2\sqrt{2^3}\sqrt{2}\,x \quad \rightarrow \quad 2x = 2x^2 + 8 - 8x$$

$$0 = x^2 - 5x + 4$$

$$\rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Comprovem les solucions, i descartem $x = 1$; ja que no compleix l'equació.

16. a) $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

Efectuem el canvi de variable, $x^3 = t$:

$$t^2 - 9t + 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 8 \end{cases}$$

Desfem el canvi de variable:

$$x^3 = 1 \rightarrow x_1 = 1$$
$$x^3 = 8 \rightarrow x_2 = 2$$

b) $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Efectuem el canvi de variable, $x^3 = t$:

$$t^2 - 7t - 8 = 0 \rightarrow \begin{cases} t_1 = -1 \\ t_2 = 8 \end{cases}$$

Desfem el canvi de variable:

$$x^3 = -1 \rightarrow x_1 = -1$$
$$x^3 = 8 \rightarrow x_2 = 2$$

17. a) $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2 = 0$

$x = 2$ i $x = 1$

b) $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{13}{6}$

$x = -3$ i $x = 2$

18. a) $x^6 + 10x^5 + 31x^4 + 12x^3 - 81x^2 - 54x + 81 = 0$

	1	10	31	12	–81	–54	81
1		1	11	42	54	–27	–81
	1	11	42	54	–27	–81	0
1		1	12	54	108	81	
	1	12	54	108	81	0	
–3		–3	–27	–81	–81		
	1	9	27	27	0		
–3		–3	–18	–27			
	1	6	9	0			

$$(x-1)^2(x+3)^2(x^2+6x+9) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

b) $x^5 - 3x^4 + x^3 + 3x^2 - 2x = 0$

	1	–3	1	3	–2	0
0		0	0	0	0	0
	1	–3	1	3	–2	0
–1		–1	4	–5	2	
	1	–4	5	–2	0	
1		1	–3	2		
	1	–3	2	0		

$$x(x+1)(x-1)(x^2-3x+2) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 2 \end{cases}$$

19. $\dfrac{4 \cdot \dfrac{x}{2}}{5} = 100 \rightarrow \dfrac{2x}{5} = 100 \rightarrow x = 250L$

20. a) $e^{2x} - 4e^x + 3 = 0$

Efectuem el canvi de variable, $t = e^x$:

$$t^2 - 4t + 3 = 0 \rightarrow t = \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_2 = 3 \end{cases}$$

Desfem el canvi de variable:

$$e^x = 1 \rightarrow x = 0$$
$$e^x = 3 \rightarrow x = \ln 3$$

b) $1 + e^{x-2} = 10$

Efectuem el canvi de variable, $t = e^x$:

$$1 + t \cdot e^{-2} = 10 \rightarrow t = 9 \cdot e^2$$

Desfem el canvi de variable:

$$e^x = 9 \cdot e^2 \rightarrow x = \ln e^x = \ln(9 \cdot e^2) \rightarrow x = \ln 9 + 2$$

c) $x \cdot 2x - 2^x = 0$

$\log_2(x \cdot 2^x) = \log_2 2^x \rightarrow$

$\rightarrow \log_2 x + \log_2 2^x = \log_2 2^x \rightarrow$

$\rightarrow \log_2 x = 0 \rightarrow x = 2^0 \rightarrow x = 1$

d) $2x + 9 = 16x$

$2x + 9 = 24x \rightarrow x + 9 = 4x \rightarrow x = 3$

21. a) $5\ln(3-x) = 4$

$\ln(3-x) = \dfrac{4}{5} \rightarrow 3 - x = e^{\frac{4}{5}} \rightarrow$

$\rightarrow x = 3 - e^{\frac{4}{5}} = 0{,}77$

b) $\log_2(x+2) + \log_2(x-1) = 2$

$\log_2(x+2) + \log_2(x-1) = \log_2 4 \rightarrow$

$\rightarrow (x+2)(x-1) = 4 \rightarrow$

$\rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = -3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$

Descartem $x = -3$, ja que no és solució de l'equació. La solució és $x = 2$.

c) $\ln(\ln x) = 1$

$\ln x = e \rightarrow x = e^e$

22. Expressem en llenguatge algèbric les dues condicions; triem els decímetres com a unitat de les nostres longituds:

$$\left.\begin{aligned} x \cdot y &= 24 \\ 2x + 2y &= 20 \end{aligned}\right\} \rightarrow 2x + \frac{48}{x} - 20 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x^2 - 20x + 48 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 4 \rightarrow y_1 = 6 \\ x_2 = 6 \rightarrow y_2 = 4 \end{cases}$$

23. De l'enunciat, deduïm que:

$$\frac{x+3+2}{x} = \frac{x+5}{x} = \frac{3}{2} \rightarrow 2x + 10 = 3x \rightarrow$$
$$\rightarrow x = 10$$

La fracció val 13/10.

24. a) $\dfrac{5}{x-1} - \dfrac{3}{x+4} - \dfrac{3}{x^2+3x-4} = \dfrac{5}{x-1}$

$-\dfrac{3}{x+4} - \dfrac{3}{(x+4)(x-1)} = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \dfrac{-3(x-1)-3}{(x+4)(x-1)} = 0 \rightarrow -3x = 0 \rightarrow x = 0$

b) $\dfrac{3(x+1)}{4} - \dfrac{x+3}{6} + x = 2x + \dfrac{3-7x}{12}$

Multipliquem tota l'equació pel mínim comú múltiple dels denominadors i eliminem les fraccions:

$$9(x+1) - 2(x+3) + 12x = 24x + 3 - 7x \rightarrow$$
$$\rightarrow 2x = 0 \rightarrow x = 0$$

c) $\dfrac{x-3}{2} + x = \dfrac{2x-13}{3} + 2 + x$

Multipliquem tota l'equació pel mínim comú múltiple dels denominadors i eliminem les fraccions:

$$3(x-3)+6x = 2(2x-13)+12+6x \rightarrow$$
$$\rightarrow -x = -5 \rightarrow x = 5$$

d) $\dfrac{20}{x+1}+\dfrac{5x-5}{x^2-1}=\dfrac{52}{x-1}-\dfrac{40}{x+1}$

$$\frac{20(x-1)+5x-5-52(x+1)+40(x-1)}{(x-1)(x+1)} = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow 13x - 117 = 0 \rightarrow x = 9$$

2 SISTEMES D'EQUACIONS Pàgs. 86 a 87

25. a) $\left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}=3 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} x+y=8 \\ 3x+2y=18 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=8-y \\ x=\dfrac{18-2y}{3} \end{array}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow 8-y=\frac{18-2y}{3} \rightarrow 24-3y=18-2y \rightarrow$$
$$\rightarrow y=6 \rightarrow x=2$$

b) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}=0 \\ \dfrac{2x}{3}+\dfrac{3y}{4}=1 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+3y=0 \\ 8x+9y=12 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{-2x}{3} \\ y=\dfrac{12-8x}{9} \end{array}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{-2x}{3}=\frac{12-8x}{9} \rightarrow -18x=36-24x \rightarrow$$
$$\rightarrow x=6 \rightarrow y=-4$$

c) $\left.\begin{array}{l} x+5y=2x \\ \dfrac{3x}{2}-3y=\dfrac{9}{2} \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} -x+5y=0 \\ 3x-6y=9 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} y=\dfrac{x}{5} \\ y=\dfrac{9-3x}{-6} \end{array}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \frac{x}{5}=\frac{9-3x}{-6} \rightarrow -6x=45-15x \rightarrow$$
$$\rightarrow x=5 \rightarrow y=1$$

d) $\left.\begin{array}{l} x+\dfrac{y}{2}=2 \\ 2x-3=1 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} 2x+y=4 \\ 2x=4 \end{array}\right\} \rightarrow x=2 \rightarrow y=0$$

26. Compatible determinat:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ x-y=2 \end{array}\right\}$$

Compatible indeterminat:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ 3x+3y=18 \end{array}\right\}$$

Incompatible:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=6 \\ x+y=2 \end{array}\right\}$$

27. Podem escriure les condicions de l'enunciat així:

$$\left.\begin{array}{l} x+y=15 \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{15}{56} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=15 \\ \dfrac{x+y}{x\cdot y}=\dfrac{15}{56} \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=15 \\ x\cdot y=56 \end{array}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow y=\frac{56}{x} \rightarrow x+\frac{56}{x}=15 \rightarrow x^2-15x+56=0 \rightarrow$$
$$\rightarrow x=\begin{cases} x_1=7 \rightarrow y_1=8 \\ x_2=8 \rightarrow y_2=7 \end{cases}$$

28. $3x-2y=x-2 \rightarrow 2x-2y=-2$

a) $\left.\begin{array}{l} 2x-2y=-2 \\ x+y=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 2x-2y=-2 \\ x-y=-1 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} 2x-2y=-2 \\ 2x-2y=1 \end{array}\right\}$

29. a) $\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ x+2y+2z=7 \\ x-y-z=-2 \end{array}\right\}$

$$z=-x+y \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+2y+2(-x+y)=7 \\ x-y-(x+y)=-2 \end{array}\right\} \rightarrow$$
$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} -x+4y=7 \\ x-y=-1 \end{array}\right\} \rightarrow y=x+1 \rightarrow$$
$$\rightarrow -x+4(x+1)=7 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right\}$$

b) $\left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ y+z=0 \\ x+z=3 \end{array}\right\}$

$$\rightarrow z=3-x \rightarrow \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ x-y=3 \end{array}\right\} \rightarrow y=1-x \rightarrow$$
$$\rightarrow x-(1-x)=3 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=-1 \\ z=1 \end{array}\right\}$$

30. Es tracta de tres equacions independents amb dues incògnites: com que el nombre d'incògnites és inferior al d'equacions independents, tenim un sistema incompatible.

— Formen un sistema compatible determinat.

31. Si x són les centenes; y, les desenes i z, les unitats, podem escriure:

$$\left.\begin{array}{l} y = x + z \\ x + y + z = 10 \\ 100x + 10y + z + 99 = 100z + 10y + x \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x - y + z = 0 \\ x + y + z = 10 \\ 99x - 99z = -99 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 2 \\ y = 5 \\ z = 3 \end{array}\right\}$$

32. Escrivim les condicions de l'enunciat en forma d'equacions lineals:

$$\left.\begin{array}{l} 90A + 120B + 72C = 6630 \\ A + B + C = 70 \\ A - B - C = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} A = 35 \\ B = 20 \\ C = 15 \end{array}\right\}$$

33. Ho podem resoldre a partir del sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{l} x + y + z = 99 \\ x - y = 25 \\ y + z - x = 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 52 \\ y = 27 \\ z = 20 \end{array}\right\}$$

34. Si interpretem l'enunciat, podem escriure el sistema d'equacions següent:

$$\left.\begin{array}{r} x \cdot y = 600 \\ 2x + 2y = 100 \end{array}\right\} \rightarrow y = \frac{600}{x} \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 - 100x + 1200 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = 20 \rightarrow y_1 = 30 \\ x_2 = 30 \rightarrow y_2 = 20 \end{cases}$$

35. El primer nombre serà x i el segon, y:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 52 \\ x^2 + y^2 = 1354 \end{array}\right\} \rightarrow y = 52 - x \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 + (52 - x)^2 = 1354 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2x^2 - 104x + 1350 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 25 \rightarrow y_1 = 27 \\ x_2 = 27 \rightarrow y_2 = 25 \end{cases}$$

36. Anomenem x la quantitat invertida en el primer producte, i y, la quantitat invertida en el segon:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 10\,000 \\ 0{,}05x - 0{,}035y = 300 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 7\,647{,}06 \\ y = 2\,352{,}94 \end{array}\right\}$$

37. Anomenem x el nombre de quilos, i y, el preu de cada quilo.

$$\left.\begin{array}{r} x \cdot y = 15\,000 \\ (x - 2)(y + 5) = 15\,190 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 100 \\ y = 150 \end{array}\right\}$$

38. $\left.\begin{array}{r} x \cdot y = 30 \\ 2x + 2y = 22 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x_1 = 5 \rightarrow y_1 = 6 \\ x_2 = 6 \rightarrow y_2 = 5 \end{array}\right\}$

39. $\left.\begin{array}{l} A + B + C = 42\,000 \\ 0{,}05A + 0{,}07B + 0{,}09C = 2\,600 \\ 0{,}05A - 0{,}07B - 0{,}09C = -200 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} A = 24\,000 \\ B = 11\,000 \\ C = 7\,000 \end{array}\right\}$

40. Si interpretem l'enunciat, podem escriure:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{4} + y = 68 \\ \frac{3x}{4} + \frac{z}{2} = 64 \\ \frac{y}{4} + z = 95 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} x = 32 \\ y = 60 \\ z = 80 \end{array}\right\}$$

41. $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 74 \\ 2x^2 - 3y^2 = 23 \end{array}\right\}$

$$x = \sqrt{74 - y^2} \rightarrow 2\left(\sqrt{74 - y^2}\right)^2 - 3y^2 = 23 \rightarrow$$

$$\rightarrow -5y^2 = -125 \rightarrow y = \pm 5 \rightarrow x = \pm 7$$

Les solucions són (7,5), (7,–5), (–7,5) i (–7,–5).

42. Apliquem el mètode de Gauss al nostre sistema d'equacions:

$$\left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{array}\right\} \xrightarrow[3^a + 1^a]{2^a + 3 \cdot 1^a} \left.\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 0 \\ 7x - (k + 9)y = 0 \\ 7x - y = 0 \end{array}\right\}$$

Veiem que la segona i la tercera equacions són iguals si: $k + 9 = 1 \rightarrow k = -8$.

En aquest cas, el sistema serà compatible indeterminat. Per a qualsevol altre valor de k, tindrem un sistema compatible determinat de solució (0, 0, 0). Sempre succeeix així quan els termes independents de les equacions valen 0.

43. Si interpretem l'enunciat, podem escriure:

$$\left.\begin{array}{l} A + B + C = 19 \\ 0{,}9A + 1{,}5B + 2{,}4C = 30 \\ 4A + 6B + 10C = 126 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} A = 8 \\ B = 4 \\ C = 7 \end{array}\right\}$$

44. Si interpretem l'enunciat, podem escriure:

$$\left.\begin{array}{l} A + B + C = 20 \\ 0{,}25A + 0{,}5B + C = 10 \\ A + 1{,}8B + 3{,}3C = 35{,}6 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} A = 8 \\ B = 8 \\ C = 4 \end{array}\right\}$$

45. $\left.\begin{array}{l} A + B + C = 7{,}2 \\ A - 1{,}4B = 0 \\ 2A + 2B - C = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} A = 1{,}4 \\ B = 1 \\ C = 4{,}8 \end{array}\right\}$

46. $\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 = 1 \\ y = mx - 2 \end{array}\right\}$

Comencem desenvolupant el sistema d'equacions:

$$y = mx - 2 \rightarrow x^2 + (mx - 2)^2 = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow (m^2 + 1)x^2 - 4mx + 3 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{-(-4m) \pm \sqrt{(-4m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 3}}{2 \cdot (m^2 + 1)}$$

Perquè hi hagi una única solució, el valor del radicand ha de ser 0.

$$\sqrt{(-4m)^2 - 4 \cdot (m^2 + 1) \cdot 3} = 0 \rightarrow 4m^2 = 12 \rightarrow$$

$$\rightarrow m = \pm\sqrt{3}$$

47. a) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=25 \\ x-\dfrac{3y}{4}=0 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1=3 & y_1=4 \\ x_2=-3 & y_2=-4 \end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{l} 3xy-4y^2=0 \\ 3x-2y=1 \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1=1/3 & y_1=0 \\ x_2=2/3 & y_2=1/2 \end{array}\right.$

48. a) $\left.\begin{array}{l} x+y-2z=-1 \\ 3x-y+z=-4 \\ 2x+2y-z=1 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow[F_3-2F_1]{F_2-3F_1} \left.\begin{array}{l} x+y-2z=-1 \\ -4y+7z=-1 \\ 3z=3 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=-1 \\ y=2 \\ z=1 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ 2x-y+2z=1 \\ x+2y-z=5 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-2F_1} \left.\begin{array}{l} x-y+z=0 \\ y=1 \\ 3y-2y=5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \\ z=-1 \end{array}\right\}$

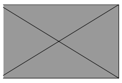
c) $\left.\begin{array}{l} 3x-y+z=4 \\ 2x-y+z=0 \\ x+2y+2z=-1 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow[F_1-3F_3]{F_2-2F_3} \left.\begin{array}{l} -7y-5z=7 \\ -5y-3z=2 \\ x+2y+2z=-1 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow{F_1+\frac{7}{5}F_2} \left.\begin{array}{l} -\dfrac{4}{5}z=\dfrac{21}{5} \\ -5y-3z=2 \\ x+2y+2z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=4 \\ y=\dfrac{11}{4} \\ z=-\dfrac{21}{4} \end{array}\right\}$

d) $\left.\begin{array}{l} 2x-y+z=5 \\ 3x-y-z=2 \\ 2x+y+z=3 \end{array}\right\}$

$\xrightarrow[F_3-F_1]{F_2-\frac{3}{2}F_1} \left.\begin{array}{l} 2x-y+z=5 \\ \dfrac{y}{2}-\dfrac{5}{2}z=-\dfrac{11}{2} \\ 2y=-2 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ y=-1 \\ z=-2 \end{array}\right\}$

49. a) 

$y=\dfrac{12}{x} \rightarrow x+\dfrac{12}{x}=7 \rightarrow x^2-7x+12=0 \rightarrow$

$\rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1=3 & y_1=4 \\ x_2=4 & y_2=3 \end{array}\right.$

b) $\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=169 \\ x+y=17 \end{array}\right\}$

$y=17-x \rightarrow x^2+(17-x)^2=169 \rightarrow$

$\rightarrow 2x^2-34x+120=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1=12 & y_1=5 \\ x_2=5 & y_2=12 \end{array}\right.$

c) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=13 \\ \dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{y}=1 \end{array}\right\}$

$\dfrac{1}{x}=1+\dfrac{1}{y} \rightarrow$

$\rightarrow \left(1+\dfrac{1}{y}\right)^2+\dfrac{1}{y^2}=13 \rightarrow \dfrac{2}{y}+\dfrac{2}{y^2}-12=0 \rightarrow$

$\rightarrow -12y^2+2y+2=0 \rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1=\dfrac{-1}{2} & y_1=\dfrac{-1}{3} \\ x_2=\dfrac{1}{3} & y_2=\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

d) $\left.\begin{array}{l} \sqrt{x}-\sqrt{y}=1 \\ x+y=5\sqrt{y} \end{array}\right\}$

$\sqrt{y}=\sqrt{x}-1 \rightarrow y=x-2\sqrt{x}+1 \rightarrow$

$\rightarrow x+x-2\sqrt{x}+1=5\left(\sqrt{x}-1\right) \rightarrow$

$\rightarrow 2x+6=7\sqrt{x} \rightarrow 4x^2-25x+36=0 \rightarrow$

$\rightarrow \left\{\begin{array}{ll} x_1=4 & y_1=1 \\ x_2=\dfrac{9}{4} & y_2=\dfrac{1}{4} \end{array}\right.$

3 INEQUACIONS Pàg. 88

50. a) $x+1\le 0$

b) $x>0$

c) $x-1<0$

51. a) $-2x^2-10x-8>0$

$-2\left(x^2+5x+4\right)=0 \rightarrow x=\left\{\begin{array}{l} x_1=-1 \\ x_2=-4 \end{array}\right.$

	$(-\infty,-4)$	-4	$(-4,-1)$	-1	$(-1,\infty)$
$x+1$	$-$	$+$	$-$	0	$+$
$x+4$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$-2(x+1)(x+4)$	$-$	0	$+$	0	$-$

La solució de la inequació és $(-4,-1)$.

b) $9x^2-6x+1\le 0$

$9x^2-6x+1=0 \rightarrow x=\dfrac{1}{3}$

	$\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3},\infty\right)$
$x-\frac{1}{3}$	$-$	0	$+$
$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2$	$+$	0	$+$

La solució de la inequació és $\dfrac{1}{3}$.

c) $x^2 + 5x - 14 < 0$

$$x^2 + 5x - 14 = 0 \rightarrow \begin{cases} x_1 = -7 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

	$(-\infty, -7)$	-7	$(-7, 2)$	2	$(2, \infty)$
$x + 7$	–	0	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	0	+
$(x + 7)(x - 2)$	+	0	–	0	+

La solució de la inequació és $(-7,2)$.

d) $\dfrac{x-3}{4} > (x-2)(x+7) + 17$

$$\frac{x-3}{4} > x^2 + 5x + 3 \rightarrow \frac{-(4x^2 + 19 + 15)}{4} > 0$$

$$\frac{-(4x^2 + 19 + 15)}{4} = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = \dfrac{-15}{4} \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

	$\left(-\infty, -\dfrac{15}{4}\right)$	$-15/4$	$(-15/4,-1)$	-1	$(-1,\infty)$
$x + 15/4$	–	0	+	+	+
$x + 1$	–	–	–	0	+
$-(x + 15/4)(x + 1)$	–	0	+	0	–

La solució de la inequació és $\left(-\dfrac{15}{4}, -1\right)$.

52. Resposta suggerida: $x + 5 < x$

Simplifiquem les x i arribem a $5 < 0$, una desigualtat que mai no serà certa.

53. a) $-x^2 + 6x - 5 = 0 \rightarrow -(x^2 - 6x + 5) = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = 1 \end{cases}$

b) $-x^2 + 6x - 5 > 0$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 5)$	5	$(5, \infty)$
$x - 5$	–	–	–	0	+
$x - 1$	–	0	+	+	+
$-(x - 5)(x - 1)$	–	0	+	0	–

La solución de la inecuación es $(1, 5)$.

c) $-x^2 + 6x - 5 < 0$

La solució de la inequació és $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$.

d) El conjunt és la unió dels tres resultats anteriors; és a dir, $\mathbb{R}$.

54. a) $\dfrac{1}{x+2} \leq 0$

El numerador sempre serà positiu; per tant, estudiem el denominador.

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2,\infty)$
$x + 2$	–	0	+

La solució de la inequació és $(-\infty, -2)$.

b) $\dfrac{x^2 - 1}{x} \geq 0$

Resolem les equacions $x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1$ i $x = 0$.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, \infty)$
$x^2 - 1$	+	0	–	–	–	0	+
x	–	–	–	0	+	+	+
$\dfrac{x^2 - 1}{x}$	–	0	+	No existeix	–	0	+

La solució de la inequació és $[-1, 0) \cup [1, \infty)$.

c) $\dfrac{1}{x+1} \leq 1 + \dfrac{2}{x-1}$

$$\frac{-x^2 - x - 2}{(x+1)(x-1)} \leq 0$$

El numerador sempre és negatiu i les solucions de les equacions del denominador són $x = 1$ i $x = -1$.

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, \infty)$
$-x^2 - x - 2$	–	–	–	–	–
$x + 1$	–	0	+	+	+
$x - 1$	–	–	–	0	+
$\dfrac{-x^2 - x - 2}{(x+1)(x-1)}$	–	No definit	+	No definit	–

La solució de la inequació és $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$.

d) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 6} < 3$

$$\frac{-(2x^2 + 9x + 16)}{x^2 + 2x + 6} < 0$$

El numerador sempre és negatiu i el denominador, sempre positiu; així, la inequació es compleix per a tot $\mathbb{R}$.

55. $y = \sqrt{x^2 + 1}$

El domini és $D(y) = \mathbb{R}$, ja que $x^2 + 1$ mai no pot ser negatiu, i, per tant, per a qualsevol valor de x sempre hi haurà un valor de y.

56. De l'enunciat deduïm que si x és el nombre d'aprovats, el triple d'aprovats és $3x$ i que el doble del nombre de suspensos és $2(35 - x)$:

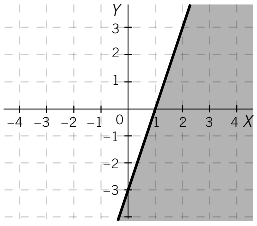
$$3x < 2(35 - x) \rightarrow x < 14.$$

Com que x ha de ser més petita que 14, el nombre màxim d'aprovats és de 13.

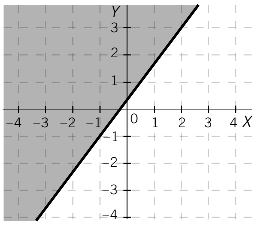
57. No té solució, ja que, com que està elevat al quadrat, sempre serà positiu i, per tant, més gran o igual que 0.

— Resposta oberta, a manera de reflexió individual.

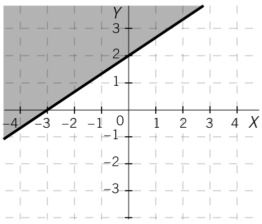
58. a)



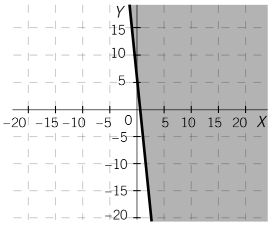
b)



c)



d)



59. $3x - 2y < 6 - y$

a) En l'eix d'ordenades, $x = 0$; per tant:

$$-2y < 6 - y \rightarrow y > -6$$

Així $(0, y)$ amb $y > -6$

b) En l'eix d'abscisses, $y = 0$; per tant:

$$3x < 6 \rightarrow x < 2$$

Així $(x, 0)$ amb $x < 2$.

60. a) $\dfrac{2x(x-3)+x^2}{x-1} \leq 3(x-1)$

$$\frac{2x^2 - 6x + x^2 - 3x^2 + 6x - 1}{x-1} \leq 0 \rightarrow \frac{-1}{x-1} \leq 0$$

Resolem l'equació $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$.

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, \infty)$
$x - 1$	–	0	+
$\dfrac{-1}{x-1}$	+	Indeterminat	–

La solució de la inequació és $[1, \infty)$.

b) $\dfrac{(x^2+1)(x^2-9x+8)}{x^2+2} \leq 0$

$$\frac{(x^2+1)(x-1)(x-8)}{x^2+2} \leq 0$$

Si ho observem, podem veure que $x^2 + 2$ i $x^2 + 1$ sempre seran positius, independentment del valor de x; per tant, estudiem la resta dels components de la inequació. Resolem $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$ i $x - 8 = 0 \rightarrow x = 8$

	$(-\infty, 1)$	1	$(1, 8)$	8	$(8, \infty)$
$x - 1$	–	0	+	+	+
$x - 8$	–	–	–	0	+
$(x - 1)(x - 8)$	+	0	–	0	+

La solució de la inequació és $[1, 8]$.

4 SISTEMES D'INEQUACIONS Pàgs. 88 a 89

61. a) (3, 1) No contingut

b) (–1, –3) Contingut

c) (2, 3) No contingut

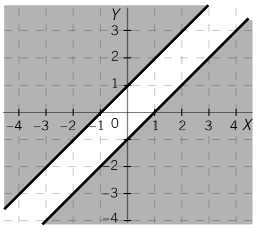
d) (4, –2) No contingut

e) (3, 2) No contingut

f) (1, 4) No contingut

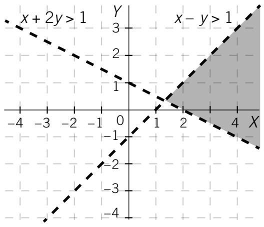
— Sistema d'inequacions lineals amb dues incògnites.

62.

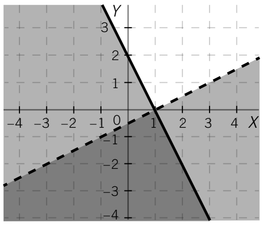


Perquè no tingui solució, un sistema d'inequacions ha de contenir dues rectes paral·leles i que les condicions es refereixin a àrees no coincidents.

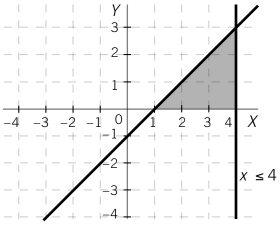
63. a) $\left.\begin{array}{l} x + 2y > 2 \\ x - y > 1 \end{array}\right\}$



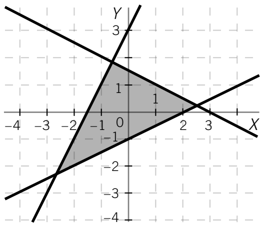
b) $\left.\begin{array}{l} 2x + y \leq 2 \\ x - 2y > 1 \end{array}\right\}$



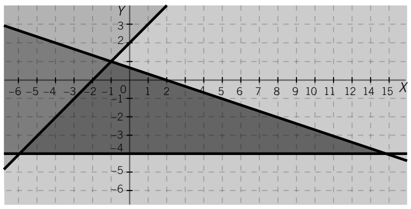
c) $\left.\begin{array}{l} x - y \geq 1 \\ y \geq 0 \\ x \leq 4 \end{array}\right\}$



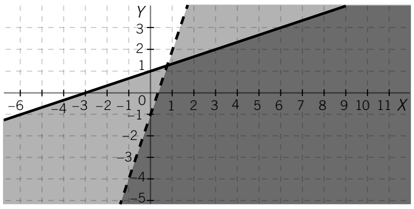
d) $\left.\begin{array}{l} x - 2y \leq 2 \\ x + 2y \leq 3 \\ y - 2x \leq 3 \end{array}\right\}$



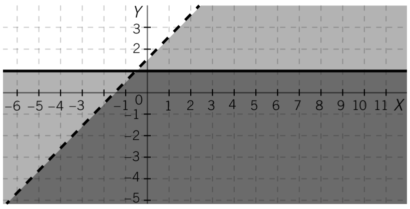
e) $\left.\begin{array}{l} x + 3y \leq 2 \\ x - y \geq -2 \\ y \geq -4 \end{array}\right\}$



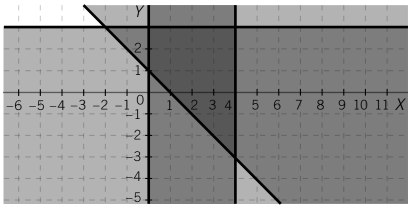
f) $\left.\begin{array}{l} -x + 3y \leq 3 \\ 3x - y > 1 \end{array}\right\}$



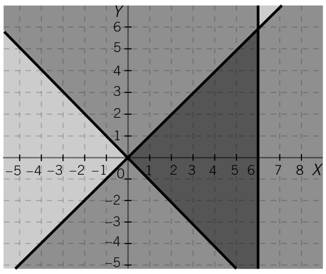
g) $\left.\begin{array}{l} x - y > -\dfrac{3}{2} \\ y \leq 1 \end{array}\right\}$



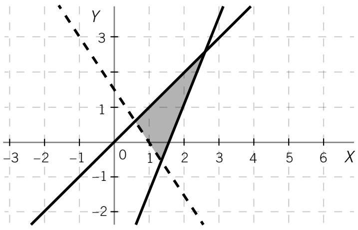
h) $\left.\begin{array}{l} x + y \geq 1 \\ y \leq 3 \\ x \geq 0 \\ x \leq 4 \end{array}\right\}$



i) $\left.\begin{array}{l} x + y \geq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ x \leq 6 \end{array}\right\}$



j) $\left.\begin{array}{l} 5x - 2y \leq 8 \\ 3x + 2y > 3 \\ x \geq y \end{array}\right\}$



64. a) $\left.\begin{array}{l} x + y \geq 1 \\ x + y \leq 5 \\ y \geq x \\ y \leq 4 \end{array}\right\}$

c) $\left.\begin{array}{l} -x + 4y \leq 12 \\ -x + 6y \geq -5 \\ x + 2y < 6 \end{array}\right\}$

b) $\left.\begin{array}{l} 3x + 2y \leq 12 \\ y \leq 5 \\ y \geq -1 \\ x \geq -4 \end{array}\right\}$

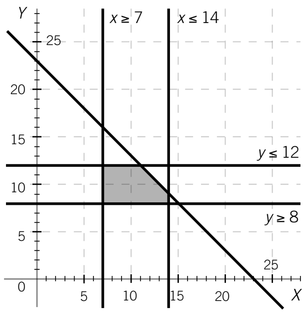
d) $\left.\begin{array}{l} 2x - 3y \geq 5 \\ x \leq 5 \\ y \geq 1 \end{array}\right\}$

65. Ha planificat 2 h per a Història.

Això significa que 23 h són per a Física i Matemàtiques; per tant, $x + y \leq 23$. D'aquestes, entre 7 i 14 h, per a Matemàtiques; per tant, $7 \leq x \leq 14$ i, entre 8 i 12 h, per a Física; per tant, $8 \leq y \leq 12$. Així, el sistema d'inequacions resultant és:

$$\left.\begin{array}{r} x + y \leq 23 \\ 7 \leq x \leq 14 \\ 8 \leq y \leq 12 \end{array}\right\}$$

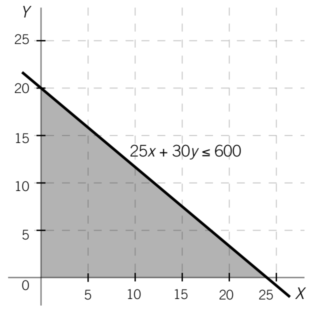
I, per tant, la solució és:



66. Podem escriure les condicions de l'enunciat com:

$$\left.\begin{array}{l}25x+30y\le 600\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}5x+6y\le 120\\ x\ge 0\\ y\ge 0\end{array}\right\}$$

Ho resolem gràficament:



Algunes solucions són: 10 exemplars de la primera novel·la i 11 de la segona, o 12 de la primera i 10 de la segona.

67. a) $\left.\begin{array}{l}2x+3\ge 1\\ -x+2\ge -1\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}x\ge -1\\ x\le 3\end{array}\right\}$

Per tant, la solució del sistema d'inequacions és $[-1, 3]$.

b) $\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2-4}{3-x}>0\\ 2(x-3)\le 9x-2\end{array}\right\}\rightarrow\left.\begin{array}{l}\dfrac{x^2-4}{3-x}>0\\ x\ge -\dfrac{4}{7}\end{array}\right\}$

Estudiem la primera equació:

$$x^2-4=0\rightarrow x=\pm 2$$
$$3-x=0\rightarrow x=3$$

Descartem -2, ja que no compleix la segona inequació. Estudiem la inequació:

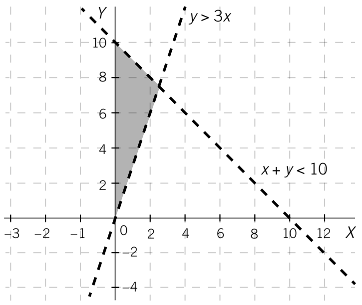
	$(-\infty, 2)$	$(2, 3)$	$(3, -\infty)$
x^2-4	+	+	+
$3-x$	–	+	–
$\dfrac{x^2-4}{3-x}$	–	+	–

La solució del sistema d'inequacions és (2, 3).

68. Podem escriure les condicions de l'enunciat com:

$$\left.\begin{array}{l}x+y<10\\ y>3x\end{array}\right\}$$

La solució gràfica corresponent, per tant, és:



Les solucions són (1, 4), (1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8) i (2, 7).

SÍNTESI

Pàg. 90

69. $\left.\begin{array}{l}3x+2y-z=0\\ x-2y+z=8\\ x+y+z=5\end{array}\right\}$

Sol.: $x = 2$, $y = -1$ i $z = 4$

70. a) $E=m\cdot c^2\rightarrow m=\dfrac{E}{c^2}\rightarrow$

$$\rightarrow m=\frac{20\cdot 4{,}184\cdot 10^{12}\text{ J}}{(300\,000\,000\text{ m/s})^2}=9{,}29\cdot 10^{-4}\text{ kg}=0{,}929\text{ g}$$

b) Considerem la massa d'un adult d'uns 70 kg. Tindrà una energia de:

$$E=m\cdot c^2=70\text{ kg}\cdot\left(3\cdot 10^8\text{ m/s}\right)^2=6\cdot 3\cdot 10^{18}\text{ J}=$$
$$=1{,}5\cdot 10^6\text{ kt}$$

$$\frac{70\text{ kg}}{9{,}29\cdot 10^{-4}\text{ kg}}=75\,350\text{ bombes de Hiroshima}$$

71. a) $\log 4+2\log(x-3)=\log x$

$$\log\left(4(x-3)^2\right)=\log x\rightarrow 4(x-3)^2=x\rightarrow$$
$$\rightarrow 4x^2-25x+36=0\rightarrow x=\begin{cases}x_1=2{,}25\\ x_2=4\end{cases}$$

Descartem $x = 2{,}25$, ja que no verifica l'equació. Així, la solució és $x = 4$.

b) $\log(5x+4)-\log 2=\dfrac{1}{2}\log(x+4)$

$$\log\left(\frac{5x+4}{2}\right)=\log\left(\sqrt{x+4}\right)\rightarrow$$
$$\rightarrow\frac{5x+4}{2}=\sqrt{x+4}\rightarrow$$
$$\rightarrow\frac{25}{4}x^2+10x+4=x+4\rightarrow$$
$$\rightarrow\frac{25}{4}x^2+9x=0\rightarrow x=\begin{cases}x_1=-\dfrac{36}{25}\\ x_2=0\end{cases}$$

c) $\ln x^3-\ln x=\ln(2x+3)$

$$\ln x^2=\ln(2x+3)\rightarrow x^2=2x+3\rightarrow$$
$$\rightarrow x^2-2x-3=0\rightarrow x=\begin{cases}x_1=-1\\ x_2=3\end{cases}$$

Descartem $x = -1$, ja que no es pot calcular el seu logaritme. Així, la solució és $x = 3$.

72. $M=\dfrac{2}{3}\log\left(\dfrac{E}{E_0}\right)$

Aïllem la variable E, que és el valor requerit i substituïm:

$$\frac{3}{2}M=\log\left(\frac{E}{E_0}\right)\rightarrow E=E_0\cdot 10^{\frac{3}{2}8{,}25}=5{,}93\cdot 10^{16}\text{ J}$$

73. a) Sigui l = M.C.D. (a, b).

Si dividim l'equació entre l, obtindrem:

$$ax+by=c\rightarrow\frac{a}{l}x+\frac{b}{l}y=\frac{c}{l}$$

Tots els membres de l'esquerra de l'equació són nombres enters, ja que a i b són divisibles entre el seu M.C.D., i x i y són solució entera de l'equació diofàntica. En conseqüència, $\frac{c}{l}$ és entera, per la qual cosa c és múltiple de l.

b) Els alumnes han de buscar-ne a internet la demostració.

Efectivament, es compleix.

74. a) $-3x + 2y = 5$

Té solució: (1, 5).

b) $5x + 15y = 7$

No té solució entera, ja que a i b comparteixen un factor comú que c no té.

c) $18x + 24y = 6 \rightarrow 3x + 4y = 1$

Té solució: (–1, 1).

d) $-3x + 15y = 27 \rightarrow -x + 5y = 9$

Té solució: (–4, 1).

e) $7x - 2y = 21$

Té solució: (5, 7)

f) $8x - 26y = 19$

No té solució entra, ja que a i b comparteixen un factor comú que c no té.

g) $100x - 50y = 105 \rightarrow 20x - 10y = 21$

No té solució entera, ja que a i b comparteixen un factor comú que c no té.

h) $273x + 360y = 102 \rightarrow 91x + 120y = 34$

Té solució: (–26, 20)

75. Si x és el nombre de victòries i y, el de derrotes, podem escriure que:

$$\left.\begin{array}{r} x + y = 12 \\ 3x - 2y > 21 \end{array}\right\} \rightarrow x > 9$$

Guanyant 9 partits aconseguirien els 21 punts; com que necessiten més de 21 punts, han de guanyar com a mínim 10 partits.

76. a) Els vèrtexs són (0, 0), (5, 0), (0, 8) i (2, 6).

$$f(0,0) = 0; \quad f(5,0) = 25\,000;$$
$$f(0,8) = 24\,000; \quad f(2,6) = 28\,000$$

El valor màxim de la funció es dóna per a (2, 6).

b) Els vèrtexs són (0, 0), (8, 0), (0, 9) i (6, 8).

$$f(0,0) = 0; \quad f(8,0) = 8;$$
$$f(0,9) = 9; \quad f(6,8) = 14$$

El valor màxim de la funció es dóna per a (6, 8).

c) Els vèrtexs són (2, 5), (4, 4) i (5, 2).

$$f(4,4) = 32; \quad f(2,5) = 25; \quad f(5,2) = 31$$

El valor màxim de la funció es dóna per a (4, 4).

77. Que tots els punts d'aquesta recta tindran assignat el mateix valor; en el nostre cas, la funció $f(x)$ valdrà 0 per a tots els punts d'aquest segment.

78. Si x és el nombre d'autocars petits i y, el d'autocars grans, s'han de verificar les equacions:

$$x + y \leq 9$$
$$40x + 50y \geq 400 \rightarrow 4x + 5y \geq 40$$
$$x \geq 0$$
$$y \geq 0$$

Els vèrtexs de l'àrea que compleix totes aquestes condicions són $A = (0, 9)$, $B = (0, 8)$ i $C = (5, 4)$. Avaluem el preu total en aquests tres punts:

$$f(x, y) = 36x + 48y$$
$$f(A) = 324; \quad f(B) = 288; \quad f(C) = 372$$

Veiem que el punt per al qual el preu és més baix és C; és a dir, 5 autocars petits i 4 de grans. Valdrà 372 €.

Avaluació (pàg. 92)

1. a) $\dfrac{x^2 - 3x - 4}{x^2 + 1} = 0$

$$x^2 - 3x + 4 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

b) $\dfrac{x}{x+1} + 2 = \dfrac{3x+1}{x}$

$$\frac{3x+2}{x+1} = \frac{3x+1}{x} \rightarrow$$
$$\rightarrow 3x^2 + 2x = 3x^2 + 4x + 1 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

c) $\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2-3} = 2$

$$\left(\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2-3}\right)^2 = 2^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 3x^2 - 2 - 2\sqrt{2x^2+1} \cdot \sqrt{x^2-3} = 4 \rightarrow$$
$$\rightarrow \left(2\sqrt{2x^2+1} \cdot \sqrt{x^2-3}\right)^2 = \left(6 - 3x^2\right)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4\left(2x^2+1\right)\left(x^2-3\right) = 9x^4 - 36x^2 + 36 \rightarrow$$
$$\rightarrow x^4 - 16x^2 + 48 = 0$$

Efectuem el canvi de variable, $x^2 = t$:

$$t^2 - 16t + 48 = 0 \rightarrow t = \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = 12 \end{cases}$$

Desfem el canvi i les solucions són $x = \pm 2$ i $x = \pm 2\sqrt{3}$.

d) $\sqrt{4x} - \sqrt{2x+1} = 1$

$$\left(\sqrt{4x} - \sqrt{2x+1}\right)^2 = 1^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 4x + 2x + 1 - 2\sqrt{4x}\sqrt{2x+1} = 1$$
$$\rightarrow (3x)^2 = \left(\sqrt{4x} \cdot \sqrt{2x+1}\right)^2 \rightarrow$$
$$\rightarrow 9x^2 = (4x)(2x+1) \rightarrow x^2 - 4x = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

Descartem $x = 0$, ja que no compleix l'equació.

2. A partir de l'equació física de la posició $x = vt$, podem establir un sistema d'equacions per esbrinar el punt de trobada.

$$\left.\begin{aligned} x &= v_1 t \\ 280 - x &= v_2 t \end{aligned}\right\}$$

Aïllem el temps de les dues equacions i obtenim el següent:

$$\frac{x}{80} = \frac{280 - x}{60} \rightarrow x = 160 \text{ km}$$

3. $$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ 2x + 5y + 4z &= -2 \\ x + 3y + m^2 z &= m \end{aligned}\right\} \xrightarrow[F_3 - F_1]{F_2 - 2F_1} \left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ y - 2z &= 0 \\ y + (m^2 - 3)z &= m + 1 \end{aligned}\right\}$$

Si $m = -1$ el sistema serà compatible indeterminat, ja que quedaria:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ y - 2z &= 0 \\ y - 2z &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Si $m = 1$, el sistema és incompatible, ja que:

$$\left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ y - 2z &= 0 \\ y - 2z &= 2 \end{aligned}\right\}$$

I en cas que $m \neq \pm 1$, aleshores:

$$\xrightarrow{F_3 - F_2} \left.\begin{aligned} x + 2y + 3z &= -1 \\ y - 2z &= 0 \\ (m+1)(m-1)z &= m + 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= -\frac{m+6}{m-1} \\ y &= \frac{2}{m-1} \\ z &= \frac{1}{m-1} \end{aligned}\right\}$$

4. $x^4 - 6x^3 + x^2 + 24x - 20 > 0$

Descomponem el primer terme de la inequació en factors:

	1	–6	1	24	–20
–2		–2	16	–34	20
	1	–8	17	–10	0
5		5	–15	10	
	1	–3	2	0	

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

Per tant:

$$(x - 1)(x - 2)(x + 2)(x - 5) > 0$$

	$(-\infty, 2)$	$(-2, 1)$	$(1, 2)$	$(2, 5)$	$(5, \infty)$
$x - 1$	–	–	+	+	+
$x - 2$	–	–	–	+	+
$x + 2$	–	+	+	+	+
$x - 5$	–	–	–	–	+
$x^4 - 6x^3 + x^2 + 24x - 20$	+	–	+	–	+

La solució de la inequació és $(-\infty, -2) \cup (1, 2) \cup (5, +\infty)$.

La solució de $x^4 - 6x^3 + x^2 + 24x - 20 \leq 0$ és $[-2, 1] \cup$ $\cup [2, 5]$.

5. $$\left.\begin{aligned} 3x - 2y &< 5 \\ x + y &\geq -1 \end{aligned}\right\}$$

a) Substituïm pel punt (0, 0):

$$\left.\begin{aligned} 0 &< 5 \\ 0 &\geq -1 \end{aligned}\right\}$$

És correcte. Per tant, és solució del sistema.

b) Substituïm pel punt (–2, –1):

$$\left.\begin{aligned} -4 &< 5 \\ -3 &\geq -1 \end{aligned}\right\}$$

No és correcte i, per tant, no és solució del sistema.

c) Substituïm pel punt (3, 0):

$$\left.\begin{aligned} 9 &< 5 \\ 3 &\geq 1 \end{aligned}\right\}$$

No és correcte i, per tant, no és solució del sistema.

d) Substituïm pel punt (2, –2):

$$\left.\begin{aligned} 10 &< 5 \\ 0 &\geq -1 \end{aligned}\right\}$$

No és correcte i, per tant, no és solució del sistema.

6. $$\left.\begin{aligned} A + B &= 60 \\ 4{,}8A + 7{,}2B &= 390 \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} A &= 17{,}5 \\ B &= 42{,}5 \end{aligned}\right\}$$

7. $$\left.\begin{aligned} x + 4y + 3z &= -1 \\ 2x - 3y - 2z &= 1 \\ -x + 2y + 4z &= 2 \end{aligned}\right\} \xrightarrow[F_3 + F_1]{F_2 - 2F_1} \left.\begin{aligned} x + 4y + 3z &= -1 \\ -11y - 8z &= 3 \\ 6y + 7z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\frac{F_2}{-11}} \left.\begin{aligned} x + 4y + 3z &= -1 \\ y + \frac{8}{11}z &= \frac{-3}{11} \\ 6y + 7z &= 1 \end{aligned}\right\} \rightarrow$$

$$\xrightarrow{F_3 - 6F_2} \left.\begin{aligned} x + 4y + 3z &= -1 \\ y + \frac{8}{11}z &= \frac{-3}{11} \\ \frac{29}{11}z &= \frac{29}{11} \end{aligned}\right\} \rightarrow \left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= -1 \\ z &= 1 \end{aligned}\right\}$$

8. a) $x > 0$, $y > 0$, $x + y < 3$

b) $\pm\frac{x}{2} + 1 > y$, $\pm\frac{x}{2} - 1 < y$

c) $2x + 1 > y$, $2x - 3 < y$, $-3 < y < 3$

9. Sigui A el nombre de cadires, B el nombre de tamborets i C el nombre de butaques.

$$\left.\begin{array}{r} A + B + C = 15 \\ 50A + 150B + 200C = 1600 \\ A + B - 4C = 0 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{r} A = 8 \\ B = 4 \\ C = 3 \end{array}\right\}$$

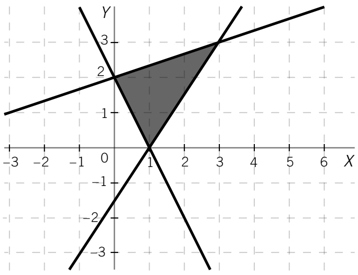
8 cadires, 4 tamborets i 3 butaques.

10. En cas que les dues equacions siguin incompatibles, el sistema no tindrà solució. Si les equacions són compatibles, es tractarà d'un sistema compatible indeterminat i tindrà solucions infinites.

11. $\left.\begin{array}{l} y + 2x \geq 2 \\ 2y - 3x \geq -3 \\ 3y - x \leq 6 \end{array}\right\}$

a) Els vèrtexs són:

(0, 2), (3, 3) i (1, 0)



b) $f(x, y) = 2x - y$

$f(0,2) = -2$

$f(3, 3) = 3$

$f(1, 0) = 2$

La funció $f(x, y)$ té un màxim en (3, 3) i un mínim en (0, 2).

Zona + (pàg. 91)

— **L'epitafi de Diofant**

- L'epitafi diu així:

  «Aquesta tomba conté Diofant. Oh gran meravella! I la tomba diu amb art com de llarga va ser la seva vida. Déu va fer que fos nen una sisena part de la seva existència. Afegint-hi un dotzè, les galtes van tenir barba. Li va encendre el foc nupcial després d'un setè, i en el cinquè any després de les noces li va concedir un fill. Però ai!, nen tardà i desgraciat, la seva existència només va durar la meitat de la del seu pare. Després de consolar la seva pena durant quatre anys amb aquesta ciència del càlcul, va arribar al final de la seva vida».

  Expressant tot el problema com una equació, trobem el nombre d'anys que va viure Diofant:

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + 5 + \frac{x}{2} + 4 = x$$

$$\frac{x}{6} + \frac{x}{12} + \frac{x}{7} + \frac{x}{2} - x = -9$$

$$\frac{14x + 7x + 12x + 42x - 84x}{84} = -9$$

$$\frac{-9x}{84} = -9 \rightarrow x = 84$$

- Diofant va escriure l'*Arithmetica*, que constava de 13 llibres en els quals va estudiar les equacions amb variables de valor racional i va introduir força novetats en la simbologia, com l'ús d'un símbol únic per a una variable desconeguda i per a la subtracció.