

Considereu la funció $f(x) = \frac{x+3}{1-x}$

- a) Determineu les seves asímptotes verticals i horitzontals (si en té) i els intervals de creixement i decreixement. Feu després un esquema senzill de la seva gràfica.
- b) Determineu els punts de la gràfica de la funció on la tangent és paral·lela a la recta d'equació $y=x-5$.

a) Primer, encara que no ho demanim, trobem el domini.

$f(x)$ és una funció racional: el domini són tots els reals excepte els que anul·len el denominador:

El domini de f és $\mathbb{R} - \{1\}$.

També trobarem els talls amb els eixos:

Tall eix x $f(x)=0 \rightarrow x+3=0 \rightarrow x=-3$ **$(-3,0)$**

Tall eix y $f(0) = 3 \rightarrow$ **$(0,3)$**

Asímptotes verticals:

Com es tracta d'una funció racional, les asímptotes verticals es troben entre els zeros del denominador: **1**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{1-x} = \frac{4}{0} = \infty \Rightarrow x=1 \text{ és asímptota vertical}$$

Asímptotes horitzontals:

Hem de calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+3}{1-x} = -1 \Rightarrow y=-1$ és asímptota horitzontal

Asímptotes obliqües:

Com que té asímptota horitzontal no en té d'obliqua.

Intervals de creixement i decreixement.

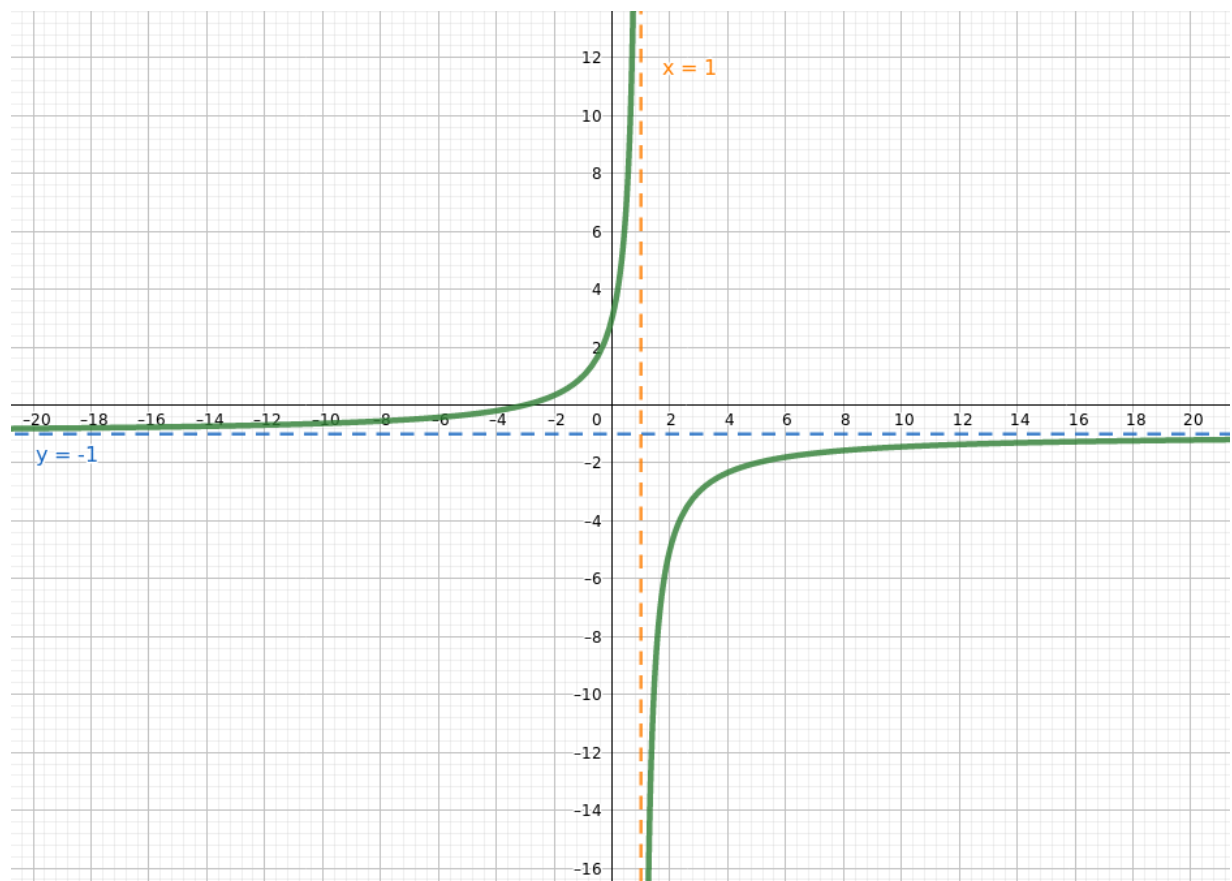
Necessitem calcular la derivada:

$$f'(x) = \frac{1-x+x+3}{(1-x)^2} = \frac{4}{(1-x)^2} > 0 \Rightarrow \text{sempre creix}$$

Veiem que la derivada no s'anul·la mai

La funció sempre és creixent i, per tant, no té extrems relatius.

Gràfica:



b) Dos rectes són paral·leles si tenen el mateix pendent.

El pendent de la recta $y=x-5$ és **1**.

(Recordem que el pendent de la recta $y=mx+n$ és m)

Per tant, volem que $f'(x) = 1$

$$\frac{4}{(1-x)^2} = 1 \Rightarrow 4 = (1-x)^2 \Rightarrow \pm 2 = 1-x \Rightarrow x = 1 \pm 2 = \begin{cases} -1 \\ 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Si } x = -1 \Rightarrow f(-1) = \frac{-1+3}{1+1} = 1 \Rightarrow (-1, 1) \Rightarrow y - 1 = x + 1 \Rightarrow y = x + 2 \\ \text{Si } x = 3 \Rightarrow f(-1) = \frac{3+3}{1-3} = -3 \Rightarrow (3, -3) \Rightarrow y + 3 = x - 3 \Rightarrow y = x - 6 \end{cases}$$