

RESOLUCIÓ PROBLEMES PAU ANÀLISI II (2005-2009)

1. Donada la funció $f(x) = \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}}$:

a) Calculeu la integral $\int f(x)dx$.

b) Trobeu la primitiva F de f que compleixi $F(1) = 1$.

a) [1 punt]

$$\int \frac{x}{\sqrt{5x^2 - 4}} dx = \frac{1}{10} \int 10x \cdot (5x^2 - 4)^{-1/2} dx = \frac{1}{10} \frac{(5x^2 - 4)^{1/2}}{1/2} + C = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + C.$$

b) [1 punt] Per trobar la primitiva que ens demanen, substituïm a

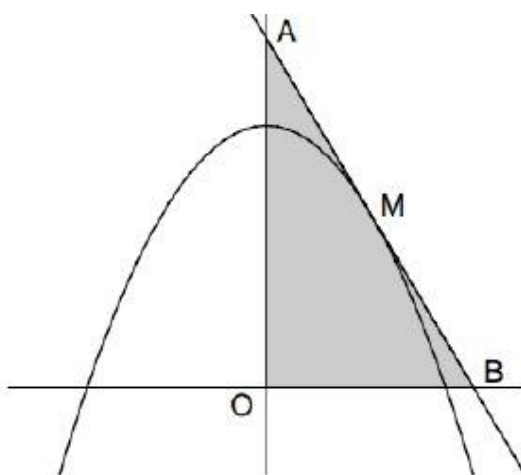
$$F(x) = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + C; 1 = F(1) = \frac{1}{5} + C \Leftrightarrow C = \frac{4}{5}.$$

La primitiva demanada és $F(x) = \frac{1}{5} \sqrt{5x^2 - 4} + \frac{4}{5}$.

2. La recta tangent a la paràbola $y = 3 - x^2$ en un punt M situat dins del primer quadrant ($x > 0, y > 0$), talla l'eix OX en el punt A i l'eix OY en el punt B .

a) Feu un gràfic dels elements del problema.

b) Trobeu les coordenades del punt M que fan que el triangle OAB tingui l'àrea mínima.



b) **[3 punts]** Les coordenades del punt M seran $M = (a, 3 - a^2)$, amb $a > 0$. Com que la derivada de la funció en el punt d'abscissa a és $y'(a) = -2a$, l'equació de la recta tangent per el punt M serà

$y - (3 - a^2) = -2a(x - a)$, que arreglada queda com $2ax + y - 3 - a^2 = 0$. Els punts

d'intersecció amb els eixos seran: $B = \left(\frac{3+a^2}{2a}, 0\right)$ i $A = (0, 3+a^2)$. El triangle

OAB és rectangle i la seva àrea és:

$$S = \frac{1}{2} \cdot (3+a^2) \cdot \frac{3+a^2}{2a} = \frac{(3+a^2)^2}{4a}$$

S és funció de a . Per trobar-ne el mínim, calculem $S'(a) = \frac{(3+a^2)(3a^2-3)}{4a^2}$. Els

zeros de la derivada són $a = \pm 1$. Descartem el valor negatiu i examinem el signe de S' per valors lleugerament inferiors i lleugerament superiors a 1:

$S'(1-\varepsilon) < 0$ i $S'(1+\varepsilon) > 0$, per tant estem davant d'un mínim. Com que

$S'' = \frac{3(3+a^2)}{2a^3}$, també es pot comprovar que $S''(1) > 0$. Les coordenades del punt

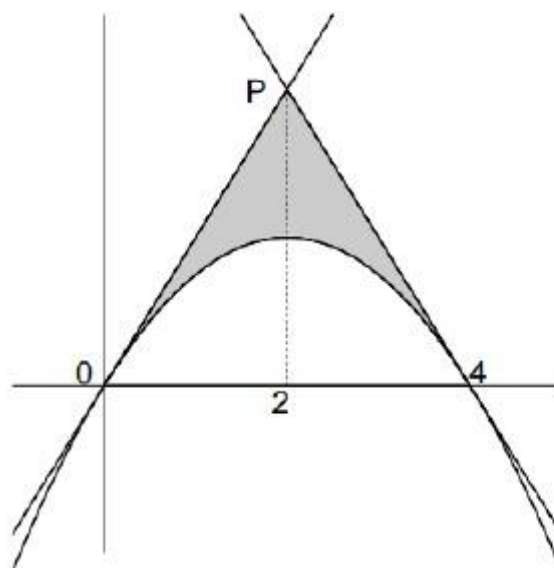
M que ens demanen, són $M = (1, 2)$.

3. Considereu la funció $f(x) = 4x - x^2$.

- Calculeu l'equació de les rectes tangents a la gràfica de f en els punts d'abscisses $x = 0$ i $x = 4$.
- Feu un gràfic dels elements del problema.
- Calculeu l'àrea compresa entre la gràfica de f i les rectes tangents que heu trobat a l'apartat a).

- a) **[1 punt]** La derivada de f és $f'(x) = 4 - 2x$. Els pendents de les rectes tangents demanades són $f'(0) = 4$ i $f'(4) = -4$. La recta tangent en el punt $(0, 0)$ té per equació $y = 4x$ i la recta tangent en el punt $(4, 0)$ és $y = -4x + 16$.

b) [1 punt]



- c) [2 punts] La intersecció de les dues tangents és el punt $P = (2, 8)$ (vegeu la gràfica). L'àrea demanda la calcularem en dos trossos: l'àrea per sota de $y = 4x$ i per sobre de $f(x)$ entre 0 i 2:

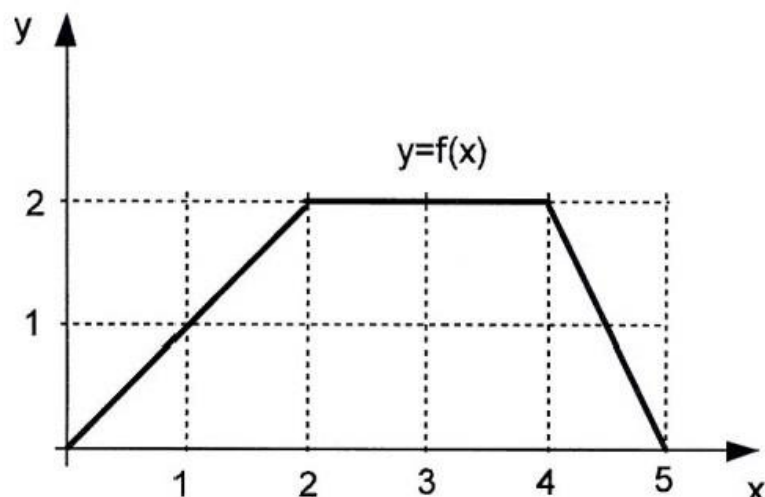
$$\int_0^2 (4x - 4x + x^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

I l'àrea per sota de $y = -4x + 16$ i per sobre de $f(x)$ entre 2 i 4:

$$\int_2^4 (-4x + 16 - 4x + x^2) dx = \left[16x - 4x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_2^4 = \frac{8}{3}.$$

En total, l'àrea demanda és de $\frac{16}{3}$ unitats d'àrea.

4. Considereu la funció $y = f(x)$ definida per a $x \in [0, 5]$ que apareix dibuixada a la figura adjunta.



a) Quina és l'expressió de la seva funció derivada quan existeix?

b) Calculeu $\int_0^3 f(x) dx$.

a) La funció de la gràfica està constituïda per segments de recta que, d'esquerra a dreta, tenen pendent igual a 1, 0 i -2. Per tant, la funció derivada és

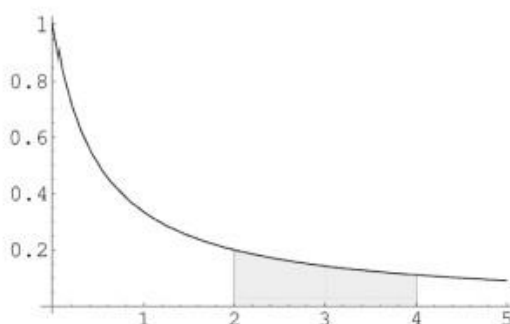
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in (0,2) \\ 0 & \text{si } x \in (2,4) \\ -2 & \text{si } x \in (4,5) \end{cases}.$$

b) La integral demanada no és més que l'àrea del trapezi que limita a l'esquerra amb $x=0$ i a la dreta amb $x=3$.

$$\int_0^3 f(x) dx = \frac{3+1}{2} \cdot 2 = 4.$$

1 punt per cada apartat. Si al segon apartat l'estudiant busca les equacions de les rectes que formen la funció i calcula la integral, s'ha de donar per correcte, evidentment.

5. El gràfic de la funció $f(x) = \frac{1}{2x+1}$, quan $x > 0$, és com segueix:



a) Trobeu una primitiva de la funció f .

b) Calculeu l'àrea de la regió ombrejada.

a) Una primitiva de la funció donada és $F(x) = \frac{1}{2} \ln(2x+1)$.

b) L'àrea de la regió ombrejada és

$$\int_2^4 \frac{1}{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2} \ln(2x+1) \right]_2^4 = \frac{1}{2} (\ln(9) - \ln(5)) = \ln \sqrt{\frac{9}{5}}.$$

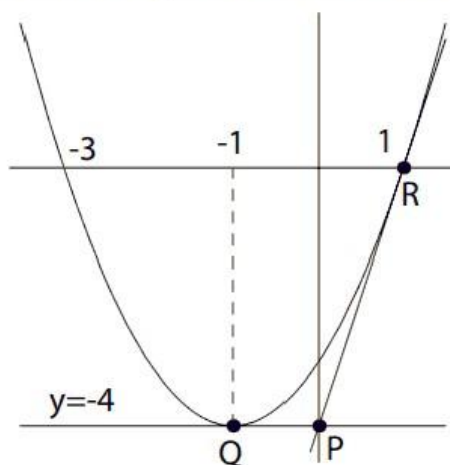
6. Considereu la paràbola d'equació $y = x^2 + 2x - 3$.
- Calculeu les equacions de les rectes tangents a la paràbola en els punts d'abscissa $x = -1$ i $x = 1$.
 - Calculant el mínim de la funció $y = x^2 + 2x - 3$, trobeu el vèrtex de la paràbola.
 - Trobeu les interseccions de la paràbola amb els eixos i feu una representació gràfica de la paràbola i de les tangents obtingudes al primer apartat.
 - Calculeu l'àrea compresa entre la paràbola i les rectes tangents.

a) Les rectes tangents buscades són de la forma $y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$, essent $f(x) = x^2 + 2x - 3$. Com que $f'(x) = 2x + 2$,

- per a $x = -1$, la recta tangent és $y - f(-1) = f'(-1) \cdot (x + 1)$, és a dir, $y = -4$.
- per a $x = 1$, queda $y - f(1) = f'(1) \cdot (x - 1)$, d'on $y = 4x - 4$.

b) El mínim de la paràbola ha de complir $f'(x) = 0$. Per tant, $x = -1$. El vèrtex és $V = (-1, -4)$.

c) $x^2 + 2x - 3 = 0$ té com a solucions $x = 1$ i $x = -3$. Els punts de tall amb l'eix d'abscisses són $(1, 0)$ i $(-3, 0)$; quan $x = 0$, el valor de la funció és -3 ; per tant, el punt de tall amb l'eix d'ordenades és $(0, -3)$. La representació gràfica demanada és



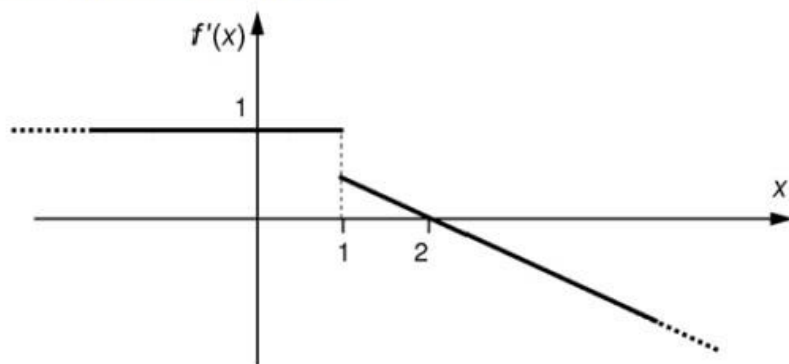
d) Cal trobar els punts de tall entre les corbes (o rectes) que limiten el recinte del qual busquem l'àrea: les dues tangents i la paràbola. Ens queda,

$$\begin{cases} y = 4x - 4 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow P = (0, -4), \quad \begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = -4 \end{cases} \Rightarrow Q = (-1, -4),$$

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x - 3 \\ y = 4x - 4 \end{cases} \Rightarrow R = (1, 0).$$

$$\text{Llavors, } A = \int_{-1}^0 [(x^2 + 2x - 3) - (-4)] dx + \int_0^1 [(x^2 + 2x - 3) - (4x - 4)] dx = \frac{2}{3} \text{ u.s.}$$

7. La funció derivada $f'(x)$ de certa funció contínua $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



- Digueu si $f(x)$ és derivable en tots els punts de $\mathbf{R}$ i per què.
- Estudieu el creixement i el decreixement de $f(x)$.
- Trobeu si $f(x)$ té algun extrem relatiu i, si és així, per a quin valor de x i de quin tipus.
- Sabent que $f(0) = 1$, calculeu el valor de $f(1)$.
Justifiqueu totes les respostes.

a) La funció deixa de ser derivable quan $x = 1$ ja que la derivada no està definida en aquest punt. Per tant, és derivable per a tots els reals excepte $x = 1$.

b) La funció creix pels valors de x amb derivada positiva, és a dir, quan $x \in (-\infty, 2)$. Decreix on la derivada és negativa, per tant, quan $x \in (2, +\infty)$.

c) Per a $x = 2$ la derivada val zero i la funció passa de créixer a decreixer; és a dir, per a aquest valor de x la funció té un màxim relatiu.

d) L'àrea sota la funció derivada des de $x = 0$ fins a $x = 1$ val 1 per tant

$$\int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = 1 \rightarrow f(1) = 1 + f(0) = 2.$$

També es pot avaluar $f(1)$ obtenint prèviament la funció primitiva per $x < 2$.

$$f(x) = \int f'(x) dx = \int dx = x + C, \text{ i com } f(0) = 1 \rightarrow C = 1 \text{ i } f(1) = 2.$$

8. Un magatzem té forma de prisma recte de base quadrada i un volum de 768 m^3 . Se sap que la pèrdua de calor a través de les parets laterals val 100 unitats per m^2 , mentre que a través del sostre és de 300 unitats per m^2 . La pèrdua pel sòl és molt petita i es pot considerar nul·la. Calculeu les dimensions del magatzem perquè la pèrdua de calor total sigui mínima.

Anomenem x al costat de la base i y a l'altura del magatzem. Llavors:

- Pèrdues pels laterals: $400xy$.
- Pèrdues pel sostre: $300x^2$.
- Pèrdues totals: $400xy + 300x^2$.

Tenint en compte el valor del volum, $y = \frac{768}{x^2}$, i això permet expressar les pèrdues com una funció de x .

$$P(x) = \frac{307200}{x} + 300x^2.$$

Derivant, igualant a zero i resolent s'obté

$$P'(x) = 0 \rightarrow -\frac{307200}{x^2} + 600x = 0 \rightarrow x^3 = 512 \Rightarrow x = 8.$$

Finalment, es comprova que es tracta d'un mínim

$$P''(x) = \frac{2 \cdot 307200}{x^3} + 600 \rightarrow P''(8) > 0.$$

Per tot això, la solució és: $x = 8m$, $y = 12m$.

9. Busqueu els extrems relatius i els punts de tall amb els eixos, i feu una representació aproximada de la corba d'equació $y = x^4 - x^2$. A continuació, calculeu l'àrea del recinte tancat per aquesta corba i l'eix d'abscisses.

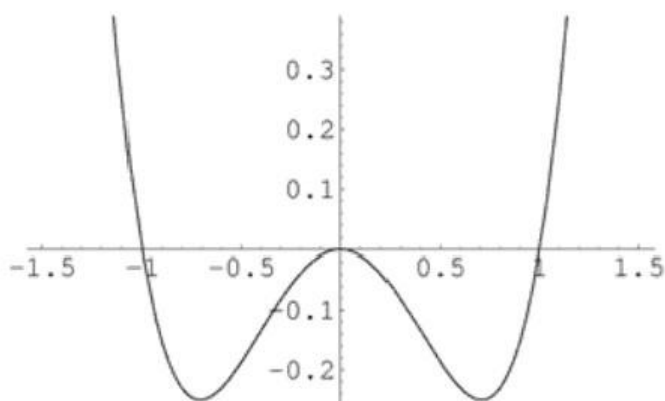
Si $f(x) = x^4 - x^2$, $f'(x) = 4x^3 - 2x$.

Extrems relatius: $4x^3 - 2x = 0 \rightarrow 2x(2x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Com $f''(x) = 12x^2 - 2$, $f''(0) < 0$, $f''(1/\sqrt{2}) > 0$ i $f''(-1/\sqrt{2}) > 0$. Llavors, el punt $(0,0)$ és un màxim relatiu i $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{4}\right)$ són mínims relatius.

Punts de tall: $x^4 - x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 1) = 0 \rightarrow x = 0, 1, -1$, $(0,0)$, $(1,0)$ i $(-1,0)$.

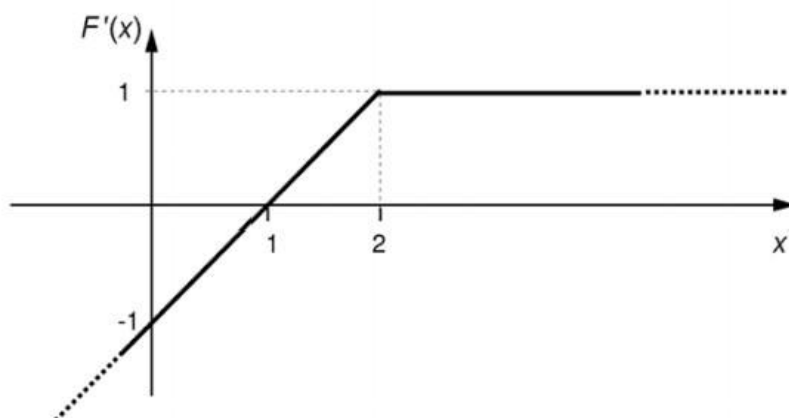
Gràfica:



L'àrea demanada s'obté de calcular

$$A = -\int_{-1}^1 (x^4 - x^2) dx = -\left[\frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{15} u^2.$$

10. La funció derivada $F'(x)$ d'una funció contínua $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ que passa per l'origen és una funció a trossos formada per les semirectes del dibuix.



Escriviu l'expressió de la funció $F(x)$ com una funció a trossos.

La derivada de la funció $F(x)$ es pot expressar com

$$F'(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \leq x \end{cases},$$

ja que la primera branca és una recta de pendent 1 que passa per $(1,0)$ i la segona és una funció constant. El punt $x = 2$ s'ha d'incorporar a una i només una de les dues branques. Ara bé, per continuïtat es pot escollir la que es vulgui.

Llavors, integrant,

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x + C & \text{si } x < 2 \\ x + K & \text{si } 2 \leq x \end{cases}.$$

Com que la funció passa per l'origen, la primera constant indeterminada val $C = 0$. Llavors, donat que la funció ha de ser contínua a $x = 2$, $\frac{4}{2} - 2 = 2 + K \rightarrow K = -2$ i la funció és

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2} - x & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \end{cases}.$$

11. Donades les funcions $f(x) = x^2 - ax - 4$ i $g(x) = \frac{x^2}{2} + b$:

- Calculeu a i b de manera que les gràfiques de $f(x)$ i de $g(x)$ siguin tangents en el punt d'abscissa $x = 3$, és a dir, que tinguin la mateixa recta tangent en aquest punt.
- Trobeu l'equació de la recta tangent esmentada en l'apartat anterior.
- Pel valor de a obtingut en el primer apartat, calculeu el valor de l'àrea de la regió limitada per l'eix d'abscisses OX i la funció $f(x)$.

a) Les gràfiques d'ambdues funcions seran tangents en el punt d'abscissa $x=3$ quan en aquest punt coincideixin les funcions i les derivades, és a dir,

$$f(3) = g(3), \quad f'(3) = g'(3).$$

Lavors,

$$\begin{cases} 9 - 3a - 4 = \frac{9}{2} + b \\ 6 - a = 3 \end{cases} \rightarrow a = 3, \quad b = -\frac{17}{2}.$$

b) L'equació de la recta tangent demanada es pot construir a partir de qualsevol de les dues funcions, per exemple a partir de $f(x)$.

Com que $f(3) = -4$, $f'(3) = 3$, l'equació és $y + 4 = 3(x - 3)$.

c) Per calcular l'àrea demanada, primer cal trobar els punts de tall amb l'eix i esbrinar si la funció queda per sobre o per sota del mateix.

$$f(x) = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = -1, x = 4.$$

En un punt intermedi, per exemple quan $x=0$, la funció és negativa i, per tant, en l'interval d'integració queda per sota de l'eix. També s'admet una representació gràfica o, també, com que la corba $y = f(x)$ és una paràbola amb les branques orientades amunt, necessàriament ha de tancar la regió per sota de l'eix.

$$\text{Àrea} = -\int_{-1}^4 (x^2 - 3x - 4) dx = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x \right]_{-1}^4 = \frac{125}{6} u^2$$

12. **Se sap que certa funció derivable $F(x)$ verifica les condicions $F'(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ i $F(1) = 3$.**

a) Trobeu $F(x)$.

b) Calculeu l'àrea compresa entre $F(x)$ i l'eix OX des de $x=0$ fins a $x=1$.

a) En primer lloc es calcula la primitiva de la derivada,

$$F(x) = \int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{-1/4} dx = \frac{x^{3/4}}{3/4} + C = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + C.$$

A continuació, aplicant $F(1) = 3$, s'obté la constant: $\frac{4}{3} + C = 3 \Rightarrow C = \frac{5}{3}$. Així, la funció demanada és

$$F(x) = \frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{3}.$$

- b) Tenint en compte que la funció és sempre positiva, l'àrea demanada s'obté de calcular

$$\int_0^1 F(x)dx = \int_0^1 \left(\frac{4}{3} \sqrt[4]{x^3} + \frac{5}{3} \right) dx = \left[\frac{4}{3} \cdot \frac{x^{7/4}}{7/4} + \frac{5}{3} x \right]_0^1 = \frac{17}{7}.$$

13. De tots els triangles rectangles d'hipotenusa 10 cm, trobeu la longitud dels catets del triangle que té el perímetre màxim. Comproveu que la solució trobada correspongui realment al perímetre màxim.

Siguin x i y els catets del triangle. Llavors sabem, d'acord amb el teorema de Pitàgores, que $x^2 + y^2 = 10^2$, la qual cosa ens permet aïllar, per exemple, el valor de la variable y en funció de la x : $y = \sqrt{100 - x^2}$.

El perímetre del triangle és $P = 10 + x + y = 10 + x + \sqrt{100 - x^2}$.

Per trobar el màxim d'aquest valor, calculem la derivada del perímetre respecte de x .

$P'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}}$. Igualet aquesta expressió a zero i esbrinem el valor de la variable x ,

$$P'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - \frac{x}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow x = \sqrt{100 - x^2} \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow x = \pm 5\sqrt{2}.$$

El valor negatiu no té cap sentit en aquest problema (encara més: es pot observar que el valor negatiu NO ÉS solució de l'equació $P'(x) = 0$). Així, ens quedarem amb $x = 5\sqrt{2}$. Llavors, $y = \sqrt{100 - (5\sqrt{2})^2} = 5\sqrt{2}$.

Per fer la comprovació demanada, podem buscar el signe de la derivada segona de la funció $P(x)$ en el punt $x = 5\sqrt{2}$,

$$P''(x) = \frac{-100}{(100 - x^2)^{3/2}} \Rightarrow P''(5\sqrt{2}) = \frac{-100}{(100 - 50)^{3/2}} < 0.$$

Que la segona derivada sigui negativa ens diu que el punt $(5\sqrt{2}, 5\sqrt{2})$ correspon a un màxim.

La comprovació també es pot fer analitzant el signe de la primera deriva de la funció perímetre, tenint en compte que el domini de la funció $P'(x)$ és $(-10, 10)$.

$(-10, 5\sqrt{2})$	$(5\sqrt{2}, 10)$
$P'(x) > 0$	$P'(x) < 0$
La funció creix	La funció decreix

14. Considereu la funció $f(x) = \frac{x(a-x)}{a^3}$, amb $a > 0$.

- a) Trobeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX .
b) Comproveu que l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$ i l'eix d'abscisses no depèn del valor del paràmetre a .

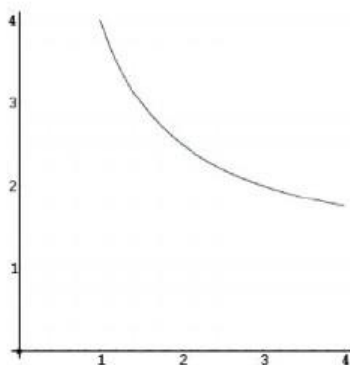
a) $f(x) = 0 \iff x(a-x) = 0 \iff x = 0$ o $x = a$. Els punts de tall són, doncs, $(0, 0)$ i $(a, 0)$.

b) L'àrea de recinte és

$$A = \int_0^a \frac{x(a-x)}{a^3} dx = \frac{1}{a^3} \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \frac{1}{6},$$

que, efectivament, no depèn del paràmetre a .

15. La gràfica de la funció $f(x) = \frac{3+x}{x}$, des de $x = 1$ fins a $x = 4$, és la següent:

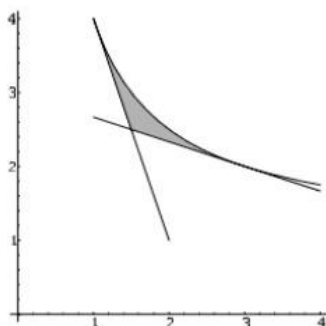


- a) Calculeu l'equació de les rectes tangents a aquesta funció en els punts d'abscissa $x = 1$ i $x = 3$.
b) Dibuixeu el recinte limitat per la gràfica de la funció i les dues rectes tangents que heu calculat.
c) Trobeu els vèrtexs d'aquest recinte.
d) Calculeu la superfície del recinte damunt dit.

a) L'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en un punt x_0 és $y = f(x_0) + f'(x)(x - x_0)$. La derivada de la funció donada és $f'(x) = -\frac{3}{x^2}$. Per tant,

- En el punt d'abscissa $x = 1$, l'equació de la recta tangent és $y = f(1) + f'(1)(x - 1)$, és a dir, $y = 7 - 3x$.
- En el punt d'abscissa $x = 3$, l'equació és $y = f(3) + f'(3)(x - 3)$, o sigui, $y = 3 - \frac{x}{3}$.

b) El dibuix del recinte limitat per la corba i les dues tangents trobades és



c) Els vèrtexs del recinte són els punts de tall (o de contacte) entre la corba i les dues rectes que el limiten. Com que les rectes són tangents a la corba, els “punts de tall” (de fet, solament de contacte) entre cada una de elles i la corba són $(1, 4)$ i $(3, 2)$, respectivament. El vèrtex que falta és el punt d'intersecció entre les dues rectes,

$$\left. \begin{array}{l} y = 7 - 3x \\ y = 3 - x/3 \end{array} \right\} \iff x = 3/2, y = 5/2 .$$

En resum, els vèrtexs del recinte són, ordenats segons les abscisses, $(1, 4)$, $(3/2, 5/2)$ i $(3, 2)$.

d) La superfície demanada és

$$\begin{aligned} A &= \int_1^{3/2} \left(\frac{3+x}{x} - (7-3x) \right) dx + \int_{3/2}^3 \left(\frac{3+x}{x} - \left(3 - \frac{x}{3} \right) \right) dx \\ &= \int_1^{3/2} \left(\frac{3}{x} - 6 + 3x \right) dx + \int_{3/2}^3 \left(\frac{3}{x} - 2 + \frac{x}{3} \right) dx \\ &= \left[3 \ln |x| - 6x + \frac{3x^2}{2} \right]_1^{3/2} + \left[3 \ln |x| - 2x + \frac{x^2}{6} \right]_{3/2}^3 \\ &= \ln(27) - 3 \simeq 0,2958 . \end{aligned}$$

16. Considereu les corbes $y = 4x - x^2$ i $y = x^2 - 6$.

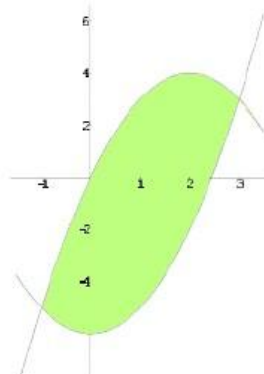
a) Trobeu-ne els punts d'intersecció.

b) Representeu les dues corbes en una mateixa gràfica, on es vegi clarament el recinte que limiten entre elles.

c) Trobeu l'àrea d'aquest recinte limitat per les dues corbes.

a) Les abscisses dels punts de tall d'ambdues corbes, han de complir que $4x - x^2 = x^2 - 6$. Les solucions d'aquesta equació són $x = -1$ i $x = 3$. Així els punts de tall són $(-1, -5)$ i $(3, 3)$.

b) La gràfica és la següent:



c) Comprovem quina és la corba que limita el recinte per dalt

$$y = 4x - x^2 \implies y(0) = 0 ; \quad y = x^2 - 6 \implies y(0) = -6.$$

La corba d'equació $y = 4x - x^2$ és la que va per damunt. Llavors,

$$A = \int_{-1}^3 [(4x - x^2) - (x^2 - 6)] dx = \int_{-1}^3 (4x - 2x^2 + 6) dx = \left[2x^2 - \frac{2x^3}{3} + 6x \right]_{-1}^3 = \frac{64}{3} .$$

17. Sigui la funció $f(x) = a + \frac{4}{x} + \frac{b}{x^2}$.

a) Calculeu els valors de a i b , sabent que la recta $2x + 3y = 14$ és tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en el punt d'abscissa $x = 3$.

Per a la resta d'apartats, considereu que $a = -3$ i que $b = 4$.

b) Trobeu els intervals de creixement i de decreixement de la funció $f(x)$. Trobeu i classifiqueu els extrems relatius que té la funció.

c) Calculeu els punts de tall de la funció $f(x)$ amb l'eix OX .

d) Trobeu l'àrea del recinte limitat per la gràfica de la funció $f(x)$, l'eix OX i les rectes $x = 1$ i $x = 3$.

a) Perquè la recta $y = \frac{14 - 2x}{3}$ sigui tangent a $f(x)$ en el punt $x = 3$ cal que $f(3) = y(3)$ i que $f'(3) = y'(3)$. Tenint en compte que $f'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{2b}{x^3}$, ens queda el sistema d'equacions

$$a + \frac{4}{3} + \frac{b}{9} = \frac{8}{3} \quad \text{i} \quad -\frac{4}{9} - \frac{2b}{27} = -\frac{2}{3},$$

que té per solució $a = 1$ i $b = 3$.

b) La funció, quan $a = -3$ i $b = 4$, és $f(x) = -3 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2}$ i la seva derivada és $f'(x) = -\frac{4}{x^2} - \frac{8}{x^3}$. Els possibles extrems relatius han de complir $f'(x) = 0$; de fet, aquesta equació solament té la solució $x = -2$. Cal tenir en compte, a més a més, que el punt $x = 0$ no és del domini de la funció. Així, per estudiar els intervals on la funció creix o decreix, haurem d'assenyalar sobre la recta real els punts $x = -2$ i $x = 0$,



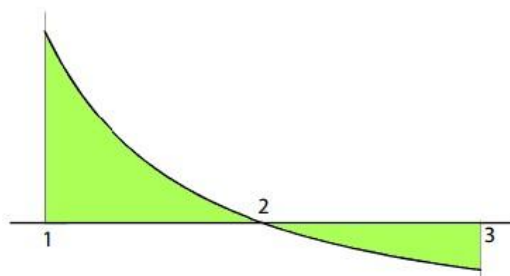
Com que $f'(-3) < 0$, $f'(-1) > 0$ i $f'(1) < 0$, podem assegurar que

- la funció $f(x)$ és creixent a $(-2, 0)$;
- la funció $f(x)$ és decreixent a $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$;
- la funció té un mínim relatiu en $x = -2$; és el punt $(-2, -4)$.

Cal notar que la funció no té extrem relatiu en $x = 0$ perquè aquest punt no és del domini.

c) Les abscisses dels punts de tall d'aquesta funció amb l'eix OX són les solucions de l'equació $f(x) = 0$ (és a dir, $-3 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} = 0$). Aquestes solucions són $x = -2/3$ i $x = 2$.

d) Com que el punt de tall amb l'eix OX $x = 2$ està dins de l'interval d'integració, tal com es pot veure a la figura següent,



l'àrea demanada s'ha de calcular en dos trossos,

$$\begin{aligned}
 A &= \int_1^2 \left(-3 + \frac{4}{x} + \frac{4}{x^2} \right) dx + \int_2^3 \left(3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2} \right) dx = \left[-3x + 4 \ln |x| - \frac{4}{x} \right]_1^2 + \left[3x - 4 \ln |x| + \frac{4}{x} \right]_2^3 \\
 &= \frac{4}{3} + 4 \ln \frac{4}{3} \simeq 2,4841 .
 \end{aligned}$$