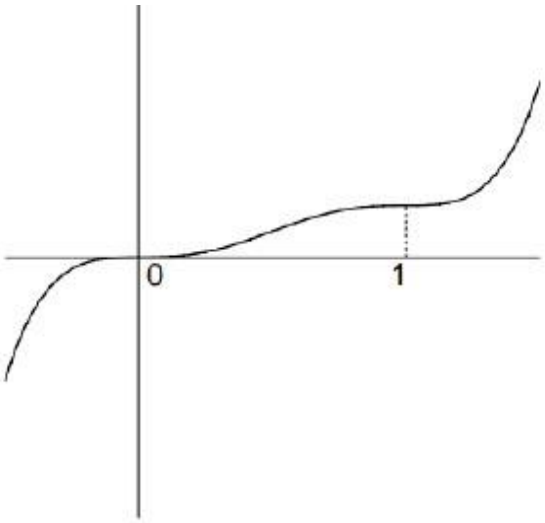
# RESOLUCIÓ PROBLEMES PAU ANÀLISI I (2005-2009)

**1.** Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.



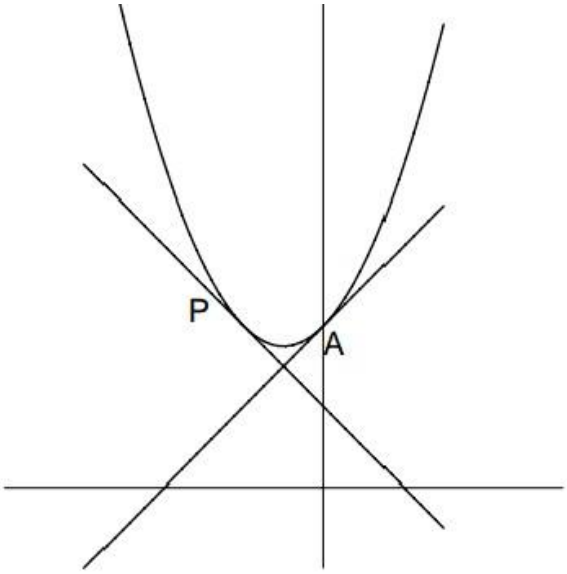

Resolem $f'(x) = 0$:

$$30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 30x^2\left(x^2 - 2x + 1\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 30x^2(x-1)^2 = 0.$$

Les arrels són $x = 0; x = 1$, cada una doble. Per classificar màxims i mínims, podem fer servir els signes de $f'$ al voltant de cada un dels punts candidats a màxim o mínim. En aquest cas, com que $f'(x) = 30x^2(x-1)^2 \geq 0$ per a tot $x$, la funció és sempre creixent i, per tant, no hi ha ni màxims ni mínims. El criteri de la derivada segona també es pot fer servir: $f''(x) = 120x^3 - 180x^2 + 60x = 60x(2x^2 - 3x + 1)$. Tenim que $f''(0) = 0$ i $f''(1) = 0$. Per tant, hem de calcular la derivada tercera, $f'''(x) = 360x^2 - 360x + 60 = 60\left(6x^2 - 6x + 1\right)$. Tenim $f'''(0) \neq 0$ i $f'''(1) \neq 0$, en conseqüència, tant a $x = 0$ com a $x = 1$ no hi ha màxims i mínims sinó que hi ha punts d'inflexió.

**2.** Sigui la paràbola $y = 2x^2 + x + 1$ i sigui $A$ el punt de la paràbola d'abscissa 0.

a) Trobeu l'equació de la recta tangent a la paràbola en el punt $A$.
b) En quin punt de la paràbola la recta tangent és perpendicular a la recta que heu trobat en l'apartat anterior?




**a)** **[1 punt]** El punt $A$ té coordenades $(0,1)$. El pendent de la recta tangent serà $y'(0)=1$. La recta tangent és $y-1=x$.

**b)** **[1 punt]** La recta tangent en un punt qualsevol $\left(a,2a^2+a+1\right)$ té pendent $y'(a)=4a+1$. Per tal que aquesta recta sigui perpendicular a la de l'apartat a) que té pendent 1, s'ha de complir que $1\cdot(4a+1)=-1 \Leftrightarrow \quad a=-\frac{1}{2}$. El punt demanant, $P$, té coordenades $\left(-\frac{1}{2},1\right)$.

**3.** Trobeu el domini i les asímptotes de la funció definida per $f(x)=\dfrac{x^2-4x+1}{x-1}$.

El domini de la funció és $(-\infty,1)\cup(1,\infty)$.

La funció té per asímptota vertical la recta $x=1$, corresponent a la discontinuïtat. D'altra banda,

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2-4x+1}{x^2-x}=1 \quad \text{i} \quad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-3x+1}{x-1}=-3.$$

Per tant, y=x-3 és una asímptota obliqua a dreta i esquerra.

**4.** Considereu la funció $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+7$.

a) Calculeu *c* sabent que la seva recta tangent en el punt d'abscissa $x=0$ és horitzontal.

b) Per al valor de *c* trobat a l'apartat anterior, calculeu *a* i *b* sabent que aquesta funció té un extrem relatiu en el punt d'abscissa $x=-2$ i que talla l'eix *OX* quan $x=1$.

c) Per als valors obtinguts als altres apartats, calculeu els intervals on la funció creix i decreix, els seus extrems relatius i feu una representació gràfica aproximada.

a) La condició equival a demanar $f'(0)=0$. Com que $f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$, llavors $c=0$.

b) La condició d'extrem relatiu a $x=-2$ és $f'(-2)=0$, és a dir, $-32+12a-4b=0$.

La de tall a l'eix $OX$ quan $x=1$ correspon a $f(1)=0$ i, per tant, $1+a+b+7=0$.

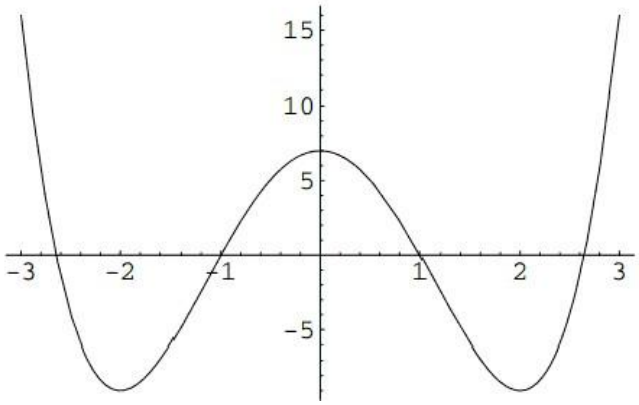
Per tot això, cal resoldre $\left.\begin{matrix}3a-b=8\\ a+b=-8\end{matrix}\right\}$ que té per solució $a=0, b=-8$.

c) Els càlculs anteriors condueixen a $f(x)=x^4-8x^2+7$, que té per derivada $f'(x)=4x^3-16x$. Per trobar els extrems relatius es resol $f'(x)=0$ que té per solucions $x=0$, $x=-2$, $x=2$. La derivada és positiva a $(-2,0)\cup(2,\infty)$ i la funció creix en aquesta regió. La funció decreix en els intervals en què la derivada és negativa, és a dir, dins $(-\infty,-2)\cup(0,2)$.

Considerant els signes de la derivada, es pot afirmar que a $x=-2$ i a $x=2$ hi ha mínims relatius, mentre que a $x=0$ es troba un màxim.

Màxim relatiu: $(0,7)$. Mínims relatius: $(-2,-9)$ , $(2,-9)$.

La gràfica és




**5.** Considereu la funció definida per $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x+1}$. Calculeu quant val el pendent de la recta tangent a la seva gràfica pel punt d'abscissa $x=0$. Trobeu si hi ha altres punts en els quals el pendent de la tangent sigui igual al que s'ha obtingut.

En primer lloc es calcula la derivada de la funció, $f'(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}$. Ara només resta calcular $f'(0)$, que proporciona un pendent igual a $-1$.

Per veure si hi ha altres punts, cal resoldre $\dfrac{x^2+2x-1}{(x+1)^2}=-1$ que, operant, es transforma en l'equació de segon grau $2x^2+4x=0$. Les solucions són $x=-2$ i $x=0$. Aquest últim és el punt estudiat a la primera part de la qüestió.

**6.** Donada la funció $f(x) = e^{-x^2+2x}$.

a) Trobeu el seu domini i les possibles interseccions amb els eixos.
b) Trobeu els intervals on creix i decreix i els extrems relatius.
c) Trobeu les possibles asímptotes.
d) Feu la representació gràfica aproximada de la funció.

a) El domini de la funció és tot $\mathbb{R}$.

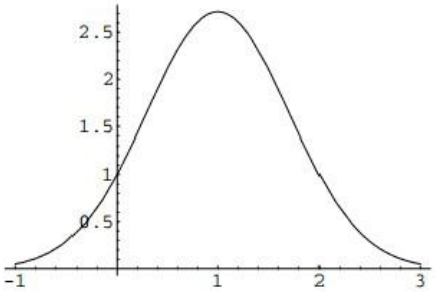
Com que $e^{-x^2-2x} = 0$ no té solució, la funció no talla l'eix horitzontal.

Donat que $f(0) = 1$, la funció talla l'eix vertical en el punt $(0,1)$.

b) La derivada és $f'(x) = e^{-x^2+2x}(-2x+2) = 2e^{-x^2+2x}(1-x)$. Llavors, la derivada només s'anul·la quan $x = 1$. Per qualsevol valor de $x$ inferior a 1 la derivada és positiva i en qualsevol superior és negativa; per tant, la funció creix a $(-\infty,1)$, decreix a $(1,\infty)$ i, com a conseqüència, el punt $(1,e)$ és un màxim relatiu.

c) $\lim_{x\to\infty} e^{-x^2+2x} = \lim_{x\to-\infty} e^{-x^2+2x} = 0$. Per això $y = 0$ és asímptota horitzontal en ambdós costats. La funció no té altres asímptotes.

d) La representació gràfica és




**7.** Sigui $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funció definida per $f(x) = e^x(ax+b)$, on $a$ i $b$ són nombres reals.

a) Calculeu els valors de $a$ i $b$ per tal que la funció tingui un extrem relatiu en el punt $(3,e^3)$.
b) Per als valors de $a$ i $b$ obtinguts, digueu quin tipus d'extrem té la funció en el punt esmentat.

a) Si en el punt $(3,e^3)$ hi ha un extrem relatiu, sabem dues coses: $f(3)=e^3$ i $f'(3)=0$. La derivada de la funció és $f'(x)=e^x(ax+b+a)$; llavors, ens queda

$$\begin{cases} f(3)=e^3 \\ f'(3)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^3(3a+b)=e^3 \\ e^3(4a+b)=0 \end{cases}$$

Com que $e^3 \neq 0$, el sistema a resoldre és

$$\begin{cases} 3a+b=1 \\ 4a+b=0 \end{cases}$$

que té com a solució $a=-1$ i $b=4$.

b) La derivada segona és $f''(x)=e^x(2-x)$. Trobem el seu signe quan s'avalua en $x=3$: $f''(3)=-e^3<0$. Per tant, en $x=3$ hi ha un màxim.

**8.** Calculeu els valors del paràmetre $a$, $a \neq 0$, que fan que les tangents a la corba d'equació $y=ax^4+2ax^3-ax+1512$ en els punts d'inflexió siguin perpendiculars.

Primerament es calculen les derivades primera i segona de la funció $f(x)=ax^4+2ax^3-ax+1512$ que defineix la corba donada.

$$f'(x)=4ax^3+6ax^2-a, \quad f''(x)=12ax^2+12ax.$$

La condició de punt d'inflexió és que la derivada segona s'anul·li,

$$12ax^2+12ax=0 \rightarrow 12ax(x+1)=0,$$

que proporciona les solucions $x=0$ i $x=-1$. En tots dos casos es pot comprovar que la derivada tercera no és nul·la i, per tant, corresponen a abscisses de punts d'inflexió.

Els pendents de les rectes tangents en els punts d'inflexió valen

$$f'(0)=-a \text{ i } f'(-1)=a.$$

Si les rectes han de ser perpendiculars s'ha de verificar que el producte dels seus pendents valgui -1, és a dir

$$-a \cdot a=-1 \rightarrow a=\pm 1.$$

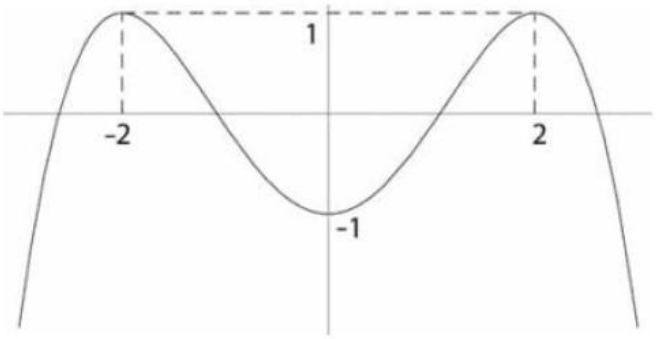
**9.** En quin punt la recta tangent a la funció $f(x)=x \cdot e^x$ és paral·lela a l'eix d'abscisses? Escriviu l'equació de la recta tangent en aquest punt.

La recta tangent serà horitzontal quan la derivada valgui zero. Per tant

$$f'(x)=e^x+xe^x=0 \rightarrow e^x(x+1)=0 \rightarrow x=-1.$$

Llavors, quan $x=-1$ la tangent és horitzontal i donat que $f(-1)=-e^{-1}$, el punt de tangència és $(-1,-e^{-1})$ i la recta tangent demanada té per equació $y=-e^{-1}$, o bé $y=-\frac{1}{e}$.

**10.** Considereu una funció tal que la seva representació gràfica a l'interval $(-3, 3)$ és la següent:



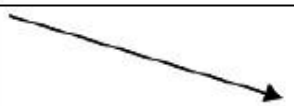

***a***) Determineu les abscisses dels punts extrems (màxims i mínims) relatius.
***b***) Estudieu el creixement i decreixement de la funció a l'interval $(-3, 3)$.
***c***) Feu un esbós de la gràfica de la derivada d'aquesta funció.
***d***) Sabent que la funció és de la forma $f(x) = ax^4 + bx^2 + c$, trobeu de quina funció es tracta.

a) És fàcil observar que els màxims relatius es troben quan $x = -2$ i $x = 2$. El mínim relatiu té abscissa $x = 0$.

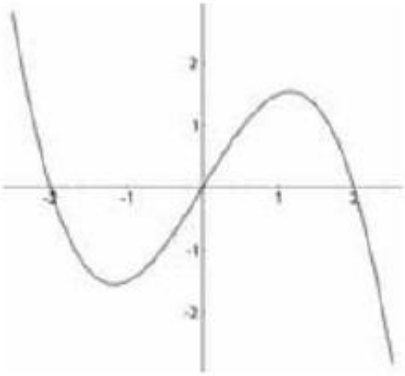
b) D'acord amb la gràfica, la funció és

- creixent a $(-3,-2) \cup (0,2)$.
- decreixent a $(-2,0) \cup (2,3)$.

Gràficament,

| (-3,-2) | (-2,0) | (0,2) | (2,3) |
|---|---|---|---|
|  |  |  |  |

c) La gràfica de la derivada és



d) Sabem que $f(-2)=1$, $f(2)=1$, $f'(-2)=0$, $f'(2)=0$, $f'(0)=0$ i $f(0)=-1$.
És a dir, tenim el sistema lineal

$$\left.\begin{aligned} 16a+4b+c&=1\\ 16a+4b+c&=1\\ -32a-4b&=0\\ 32a+4b&=0\\ c&=-1 \end{aligned}\right\}$$ que té per solucions $a=-1/8$, $b=1$ i $c=-1$.

O sigui, que la funció és $f(x)=-x^4/8+x^2-1$.

**11.** Trobeu els valors dels paràmetres $a$ i $b$ per tal que la funció següent sigui contínua i derivable en $x=2$.

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+2x+3 & \text{si} \quad x<2\\ x^3+bx+5 & \text{si} \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Per a què la funció sigui contínua en el punt $x=2$, cal que els límits laterals existeixin, coincideixin i siguin iguals al valor de la funció en el punt.

$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(ax^2+2x+3)=4a+7;$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^3+bx+5)=13+2b.$$
$$f(2)=13+2b$$

Així, ens queda que la funció és contínua en $x=2$ si i sol si $4a+7=13+2b$.

Per estudiar la derivabilitat, busquem les derivades laterals en el punt 2,

$$f'_-(x)=2ax+2\Rightarrow f'_-(2)=4a+2\,;\qquad f'_+(x)=3x^2+b\Rightarrow f'_+(2)=12+b\,.$$

La funció és derivable en el punt $x=2$, si i sol si $4a+2=12+b$. Arribem així al sistema

$$\begin{cases} 4a-2b=6\\ 4a-b=10 \end{cases}$$

que té per solució $a=\dfrac{7}{2}$, $b=4$.

**12.** Digueu per a quin valor de $x$ la recta tangent a la corba $y=\ln(x^2+1)$ és paral·lela a la recta $y=x$. Escriviu l'equació d'aquesta tangent.

El pendent de la recta tangent ha de valer 1. Per tant, cal igualar la derivada de la funció $f(x) = \ln(x^2 + 1)$ a aquest valor.

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} = 1 \Leftrightarrow 2x = x^2 + 1 \Leftrightarrow x = 1.$$

L'equació de la recta tangent és $y = x - 1 + \ln(2)$.

**13.** Considereu la funció $f(x) = ax^2 + x + b$ $(a, b \in \mathbb{R})$. Trobeu els valors de $a$ i $b$ que fan que la recta $y = 2x + 1$ sigui tangent a la gràfica de $f$ quan $x = 1$.

Si la recta donada és tangent a la gràfica de la funció $f$, es pot assegurar que $f(1) = y(1) = 2 \cdot 1 + 1 = 3$. A més a més, $f'(1) = 2$. Utilitzant aquestes dues igualtats, i observant que $f'(x) = 2ax + 1$, s'arriba al sistema

$$\begin{cases} a + b + 1 = 3 \\ 2a + 1 = 2 \end{cases}$$

que té per solució $a = \frac{1}{2}$ i $b = \frac{3}{2}$.

**14.** Donades les funcions $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ i $g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$:

***a***) Comproveu que $[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = 1$.
***b***) Comproveu també que $f'(x) = g(x)$ i $g'(x) = f(x)$.
***c***) Comproveu que $f(x + y) = f(x) \cdot g(y) + f(y) \cdot g(x)$.
***d***) Calculeu $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ dividint per $e^x$ el numerador i el denominador; amb un procediment similar (però no igual), trobeu $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.

a) Es tracta simplement de fer les operacions indicades,

$$[g(x)]^2 - [f(x)]^2 = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2$$
$$= \frac{e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2e^x e^{-x} + e^{-2x}}{4} = \frac{4e^{x-x}}{4} = \frac{4 \cdot 1}{4} = 1$$

b) Recordant les propietats de la derivada, tenim

- $Df(x) = D\left[\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right] = \frac{D(e^x - e^{-x})}{2} = \frac{e^x - e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = g(x)$
- $Dg(x) = D\left[\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right] = \frac{D(e^x + e^{-x})}{2} = \frac{e^x + e^{-x} \cdot (-1)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = f(x)$

c) Observem que $f(x+y)=\dfrac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}$. Intentarem arribar a aquesta expressió fent els càlculs del membre de la dreta de la igualtat

$$\begin{aligned} f(x)\cdot g(y)+f(y)\cdot g(x) &= \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2}+\frac{e^y-e^{-y}}{2}\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2} \\ &= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}-e^{-x+y}-e^{-x-y}}{4}+\frac{e^{y+x}+e^{y-x}-e^{-y+x}-e^{-y-x}}{4} \\ &= \frac{2e^{x+y}-2e^{-x-y}}{4}=\frac{e^{x+y}-e^{-(x+y)}}{2}=f(x+y). \end{aligned}$$

d) El càlcul d'aquests límits no es pot fer utilitzant la regla de l'Hôpital degut a què la derivada de la funció exponencial és ella mateixa. La forma de calcular-los consisteix en dividir numerador i denominador pel factor adequat (aquell que fa que el quocient sigui una indeterminació del tipus $\infty/\infty$). Així,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x}}{\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-e^{-2x}}{1+e^{-2x}}=\frac{1+0}{1-0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^{-x}}}{\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^{-x}}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}=\frac{0-1}{0+1}=-1$$

**15.** Sigui $f(x)=2x^3-x^2+3x+1$. Donades les rectes $r_1$: $y=x+2$ i $r_2$: $y=7x-2$:

***a***) Expliqueu, raonadament, si alguna de les dues rectes pot ser tangent a la corba $y=f(x)$ en algun punt.

***b***) En cas que alguna d'elles ho sigui, trobeu el punt de tangència.

*a*) Una recta i una corba són tangents en un punt si les dues passen pel punt i tenen el mateix pendent en ell. El pendent de la corba en un punt és el valor de la derivada de la funció en el punt. Calculem aquesta derivada: $f'(x)=6x^2-2x+3$.

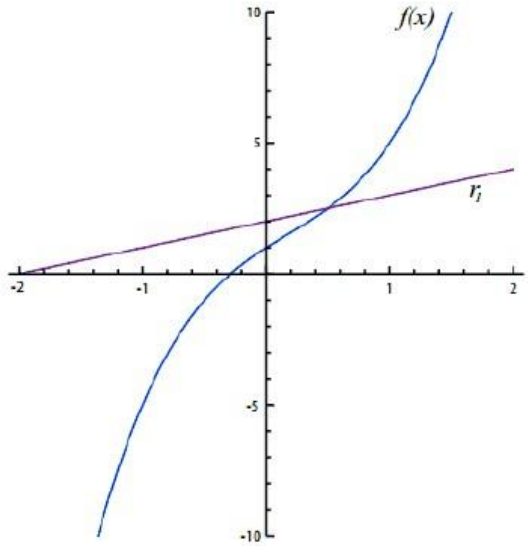
La recta $r_1$ pot ser tangent a la corba si i sol si existeix algun valor de $x$ per al qual $f'(x)=1$ (que és el valor del pendent de $r_1$). Com que l'equació $6x^2-2x+3=1$ no té solucions (reals), la recta $r_1$ no pot ser tangent a la gràfica de $f(x)$.

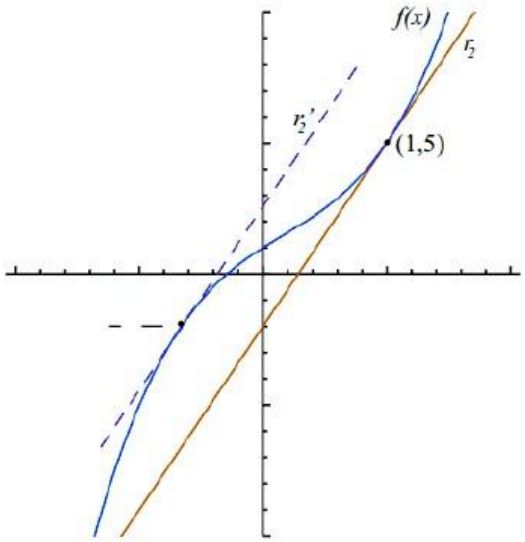
Paral·lelament, la recta $r_2$ pot ser tangent a la corba si i sol si l'equació $6x^2-2x+3=7$ té alguna solució. Com és fàcil veure, aquesta equació admet com a solucions $x=1$ i $x=-2/3$. Per tant, la recta $r_2$ pot ser tangent a la gràfica de $f(x)$.

*b*) Per $x=1$, la funció val $f(1)=2-1+3+1=5$ i la recta $r_1$, $y=7-2=5$; o sigui, tant la corba com la recta passen pel punt $(1,5)$. Aquest és el punt de tangència.

Per $x=-2/3$ tenim que $f(-2/3)=-55/27$ i $y(-2/3)=-20/3$, la qual cosa indica que la recta i la corba, en aquest cas, no són tangents.

Les següents gràfiques il·lustren la situació de la funció i de les rectes donades.




En la de l'esquerra tenim la posició de la funció $f(x)$ i $r_1$, veient-se clarament que no poden ser tangents. En la de la dreta, la recta $r_2$ és tangent a la gràfica de $f(x)$ en el punt $(1,5)$; la recta $r_2'$ és paral·lela a $r_2$ (és a dir, té el mateix pendent) passant pel punt $(-2/3, -55/27)$, però, evidentment, no és $r_2$.

**16.** Considereu la funció real de variable real $f(x) = \dfrac{2x^3}{x^2-1}$.

***a***) Trobeu-ne el domini.
***b***) Calculeu l'equació de les seves asímptotes, si en té.
***c***) Estudieu-ne els intervals de creixement i de decreixement, així com les abscisses dels seus extrems relatius, si en té, i classifiqueu-los.

*a*) No són del domini solament els valors de la variable $x$ que anul·len en denominador. Per tant, $\mathrm{Dom} f = \mathbb{R} \setminus \{-1,1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

*b*) *Asímptotes verticals.* Com que

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty, \qquad \lim_{x\to -1^+} \frac{2x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = +\infty,$$

podem assegurar que la recta $x = -1$ és una asímptota vertical. Paral·lelament, es comprova que $x = 1$ també és una asímptota vertical.

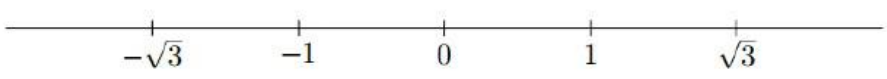
*Asímptota horitzontal.* El fet de què $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ (ja que el grau del numerador és major que el grau del denominador), ens assegura que no hi ha asímptota horitzontal.

*Asímptota obliqua.* És de la forma $y = mx + b$ amb $m = \lim_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ i $b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx)$. En el nostre cas,

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^3}{x^3-x} = 2; \qquad b = \lim_{x\to\infty} \left( \frac{2x^3}{x^2-1} - 2x \right) = 0.$$

Així, tenim asímptota obliqua, d'equació $y = 2x$.

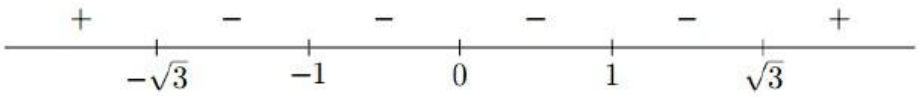
*c*) La derivada de la funció és $f'(x) = \dfrac{2x^4 - 6x^2}{(x^2-1)^2}$, que val zero quan $x = 0$, $x = -\sqrt{3}$ o $x = \sqrt{3}$. Marquem, a la recta real, els punts que anul·len la primera derivada i els que no són del domini,



Així, la recta real queda dividida en sis intervals: $(-\infty, -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}, -1)$, $(-1, 0)$, $(0, 1)$, $(1, \sqrt{3})$ i $(\sqrt{3}, +\infty)$. Busquem el signe de la primera derivada en un punt de cada un d'aquests intervals,

$$f'(-2) > 0;\ f'(-1,5) < 0;\ f'(-0,5) < 0;\ f'(0,5) < 0;\ f'(1,5) < 0;\ f'(2) > 0.$$

L'esquema de signes per la primera derivada és




Per tant, la funció $f(x)$

- és creixent a $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$;
- és decreixent a $(-\sqrt{3}, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, \sqrt{3})$;
- té un màxim quan $x = -\sqrt{3}$;
- té un mínim quan $x = \sqrt{3}$.

Encara que en el problema no es demana, la gràfica d'aquesta funció (amb indicació de les asímptotes) és, aproximadament,

