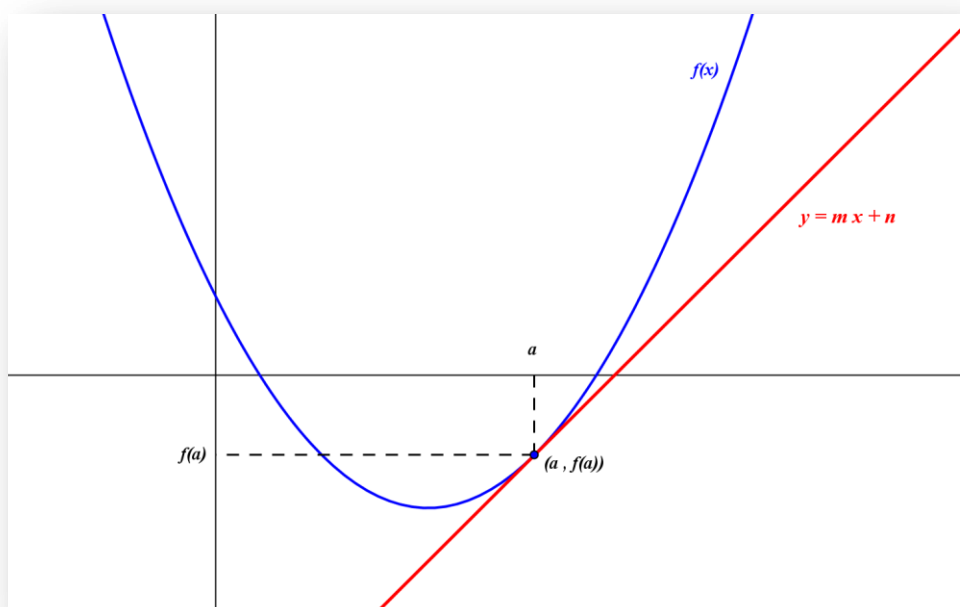


RECTA TANGENT A LA GRÀFICA D'UNA FUNCIO

Per trobar l'equació de la recta tangent a la gràfica d'una funció $f(x)$ en el punt $(a, f(a))$ cal tenir en compte que :

L'equació de la recta demanada és de la forma $y = mx + b$ on:

- $m = f'(a)$ (recorda que per definició $f'(a)$ és el pendent m de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)$ en $x=a$)
- b surt d'imposar que el punt $(a, f(a))$ és també un punt d'aquesta recta i per tant es compleix $f(a) = m \cdot a + b$



EXEMPLES :

Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$ quan $x = -1$

La recta que busquem té per equació $y = mx + b$. Cal esbrinar el valor de m i b . Per calcular els valors de m i b utilitzarem que

1. $m = f'(-1)$
2. La recta passa pel punt $(-1, f(-1))$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'(-1) = 3(-1)^2 - 4(-1) = 3 + 4 = 7$$

Condicció 1

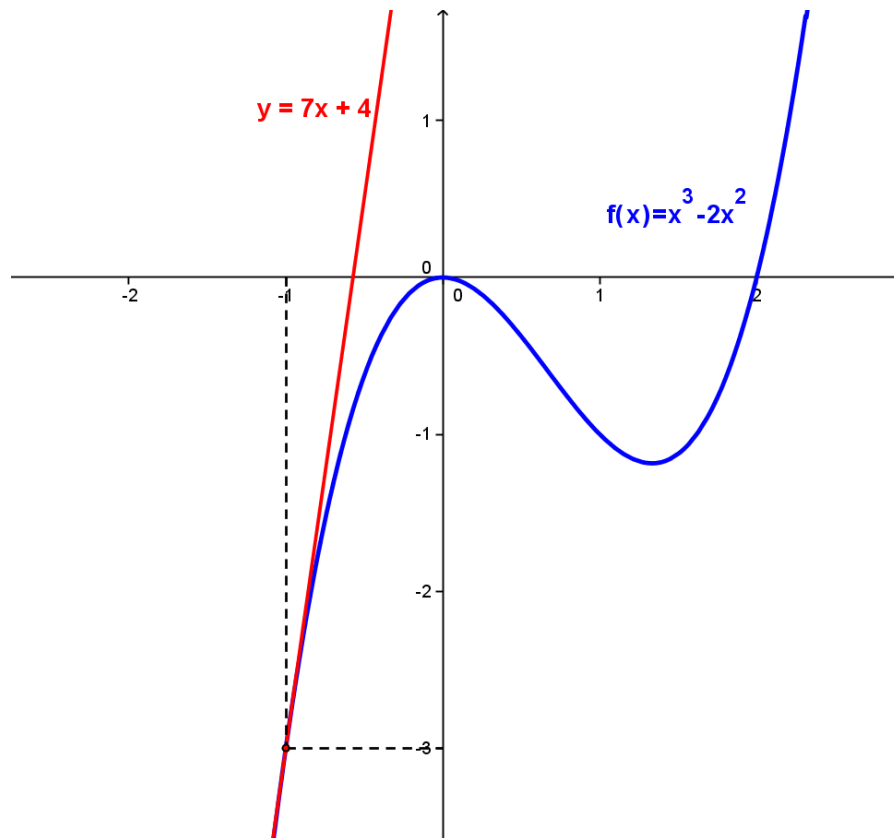
$$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1)^2 = -1 - 2 = -3 \rightarrow -3 = m \cdot (-1) + b \rightarrow -3 = 7(-1) + b \rightarrow b = 4$$

Condicció 2

$m = 7$

L'equació de la recta buscada és doncs $y = 7x + 4$

Veiem aquest resultat gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$ en el punt

$$\left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$$

La recta que busquem té per equació $y = mx + b$. Cal esbrinar el valor de m i b . Per calcular els valors de m i b utilitzarem que

$$1. \quad m = f'\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$2. \quad \text{La recta passa pel punt } \left(\frac{2}{3}, f\left(\frac{2}{3}\right)\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{16}{27}\right)$$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'\left(\frac{2}{3}\right) = 3\left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4\left(\frac{2}{3}\right) = 3 \cdot \frac{4}{9} - \frac{8}{3} = -\frac{4}{3}$$

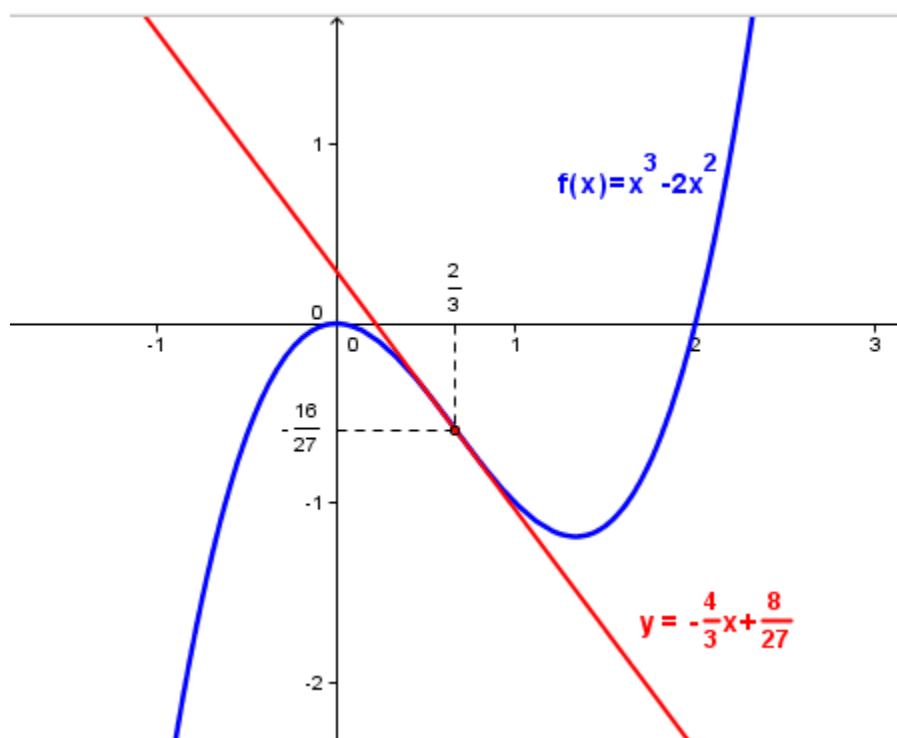
Condicció 1

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{16}{27} \rightarrow -\frac{16}{27} = m \cdot \frac{2}{3} + b \rightarrow -\frac{16}{27} = -\frac{4}{3} \cdot \frac{2}{3} + b \rightarrow b = -\frac{16}{27} + \frac{8}{9} = \frac{8}{27}$$

Condicció 2 $m = -4/3$

L'equació de la recta buscada és doncs $y = -\frac{4}{3}x + \frac{8}{27}$

Veiem aquest resultat gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$ en els punts on la funció talla a l'eix d'abscisses

Primer cal buscar aquests punts resolent l'equació $f(x) = 0$

$$\begin{aligned} x^3 - 2x^2 &= 0 \\ x^2(x - 2) &= 0 \end{aligned} \rightarrow \begin{cases} x^2 = 0 \rightarrow x = 0 \rightarrow \text{punt } (0, f(0)) = (0, 0) \\ x - 2 = 0 \rightarrow x = 2 \rightarrow \text{punt } (2, f(2)) = (2, 0) \end{cases}$$

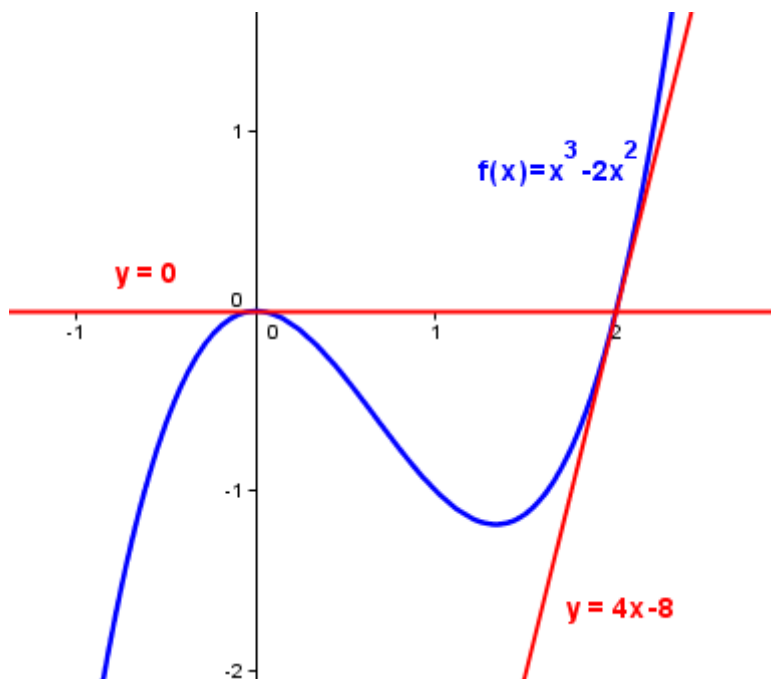
- Equació de la recta tangent en el punt (0,0)

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'(0) = 0 \\ f(0) = 0 \cdot 0 + b \rightarrow 0 = b \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = 0} \text{ és l'equació de la recta tangent en} \\ \text{el punt (0,0)}$$

- Equació de la recta tangent en el punt (2,0)

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'(2) = 4 \\ f(2) = 4 \cdot 2 + b \rightarrow 0 = 8 + b \rightarrow b = -8 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = 4x - 8} \text{ és l'equació de la recta tangent en} \\ \text{el punt (2,0)}$$

Veiem aquest resultat gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$ en els punts on la tangent és horitzontal

Si la recta tangent és horitzontal en un punt $(a, f(a))$ llavors $f'(a)=0$ ja que

les rectes horitzontals tenen pendent $m=0$

Primer doncs cal buscar aquests punts resolent l'equació $f'(x)=0$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$3x^2 - 4x = 0$$

$$x(3x - 4) = 0 \begin{cases} x = 0 \rightarrow \text{punt } (0, f(0)) = (0, 0) \\ 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{4}{3} \rightarrow \text{punt } \left(\frac{4}{3}, f\left(\frac{4}{3}\right)\right) = \left(\frac{4}{3}, -\frac{32}{27}\right) \end{cases}$$

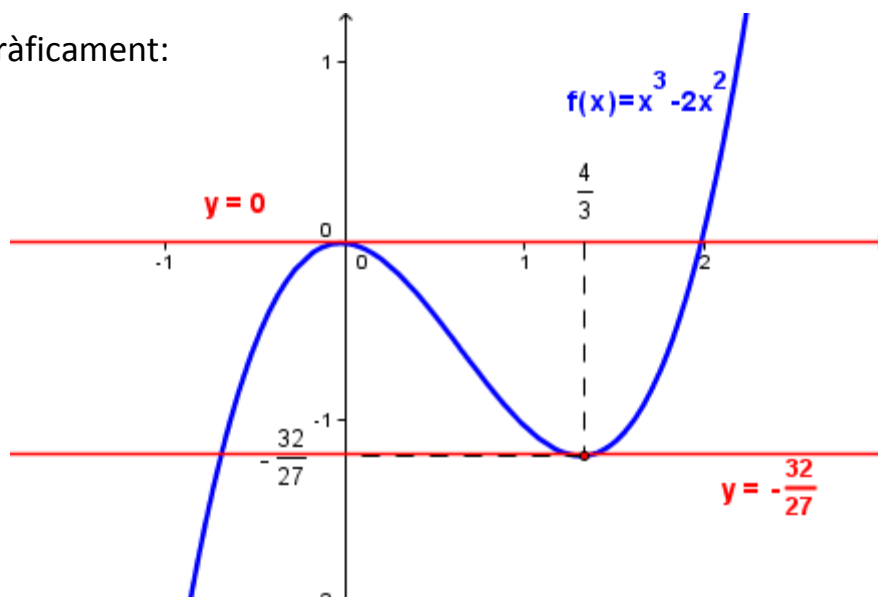
- Equació de la recta tangent en el punt (0,0)

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'(0) = 0 \\ f(0) = 0 \cdot 0 + b \rightarrow 0 = b \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = 0} \text{ és l'equació de la recta tangent en el punt } (0,0)$$

- Equació de la recta tangent en el punt $\left(\frac{4}{3}, -\frac{32}{27}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \\ f\left(\frac{4}{3}\right) = 0 \cdot \frac{4}{3} + b \rightarrow -\frac{32}{27} = 0 + b \rightarrow b = -\frac{32}{27} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = -\frac{32}{27}} \text{ és l'equació de la recta tangent en el punt } \left(\frac{4}{3}, -\frac{32}{27}\right)$$

Veiem aquest resultat gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$ en els punts on la tangent és paral·lela a la recta $y = 4x - 2$

Totes les rectes paral·leles a la recta $y = 4x - 2$ tenen la mateixa pendent $m=4$

i per tant la seva equació és de la forma $y = 4x + b$

Ara cal buscar els punts $(a, f(a))$ que compleixen $f'(a)=4$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$3x^2 - 4x = 4 \rightarrow 3x^2 - 4x - 4 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} = \frac{4 \pm 8}{6} \begin{cases} x = 2 \rightarrow \text{punt } (2, f(2)) = (2, 0) \\ x = -\frac{2}{3} \rightarrow \text{punt } \left(-\frac{2}{3}, f\left(-\frac{2}{3}\right)\right) = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{32}{27}\right) \end{cases}$$

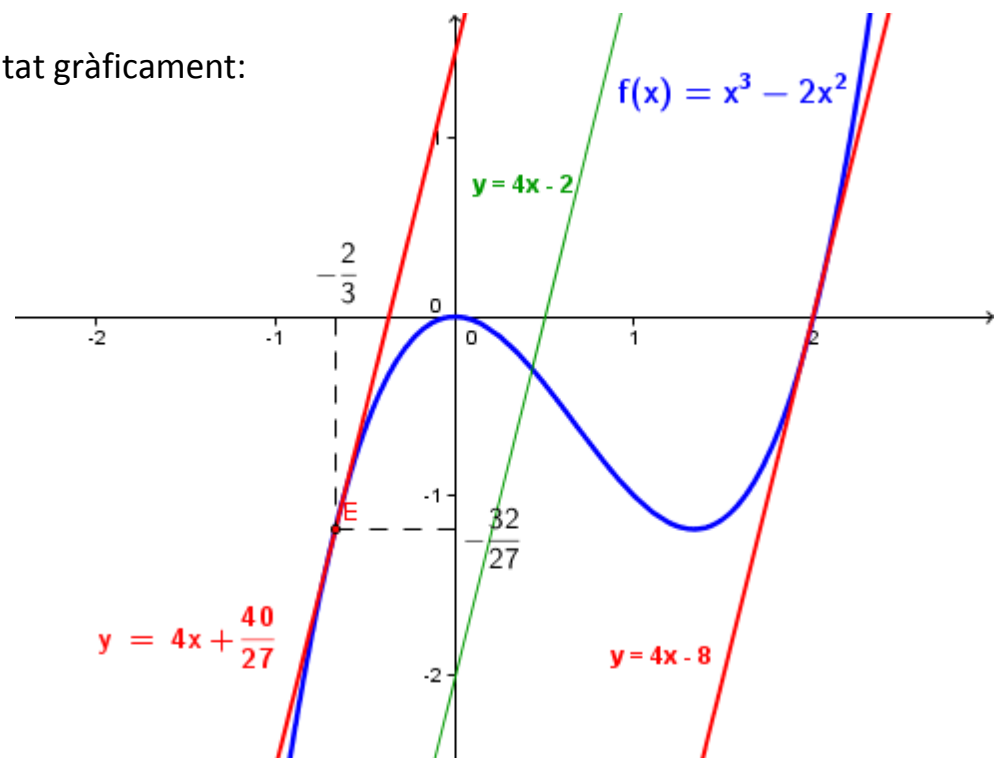
- Equació de la recta tangent en el punt $(2, 0)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'(2) = 4 \\ f(2) = 4 \cdot 2 + b \rightarrow 0 = 8 + b \rightarrow b = -8 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = 4x - 8} \text{ és l'equació de la recta tangent en el punt } (2, 0)$$

- Equació de la recta tangent en el punt $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{32}{27}\right)$

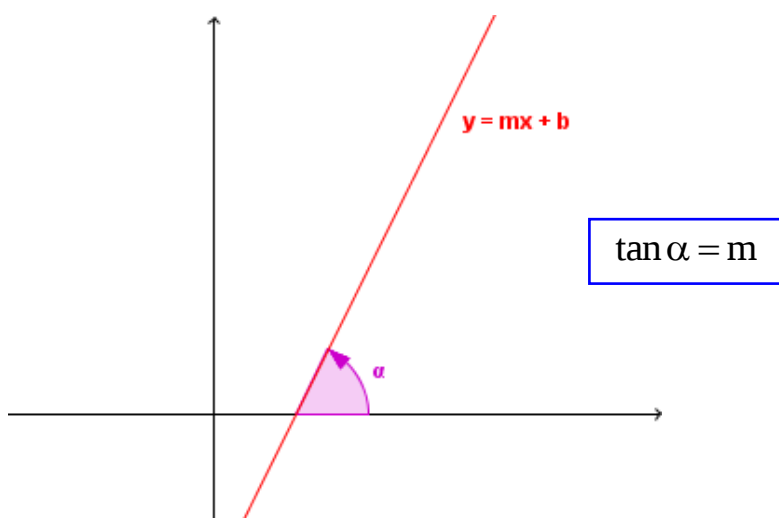
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'\left(-\frac{2}{3}\right) = 4 \\ f\left(-\frac{2}{3}\right) = 4 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) + b \rightarrow -\frac{32}{27} = -\frac{8}{3} + b \rightarrow b = \frac{40}{27} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = 4x + \frac{40}{27}} \text{ és l'equació de la recta tangent en el punt } \left(-\frac{2}{3}, -\frac{32}{27}\right)$$

Veiem aquest resultat gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$ en els punts on la tangent forma un angle de 135° amb l'eix d'abscisses

La pendent m d'una recta $y=mx+b$ està directament relacionada amb la tangent de l'angle α que forma la recta amb l'eix d'abscisses de tal manera que $\tan \alpha = m$.



Lavors se'ns demana trobar les rectes tangents a la gràfica de la funció $f(x)$ que tenen per pendent $m = \tan 135^\circ = -1$.

Busquem ara els punts on la seva recta tangent té pendent $m = -1$ resolent

L'equació $f'(x) = -1$

$$f'(x) = 3x^2 - 4x$$

$$3x^2 - 4x = -1 \rightarrow 3x^2 - 4x + 1 = 0 \rightarrow$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{6} = \frac{4 \pm 2}{6} \begin{cases} x = 1 \rightarrow \text{punt } (1, f(1)) = (1, -1) \\ x = \frac{1}{3} \rightarrow \text{punt } \left(\frac{1}{3}, f\left(\frac{1}{3}\right)\right) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{27}\right) \end{cases}$$

- Equació de la recta tangent en el punt $(1, -1)$

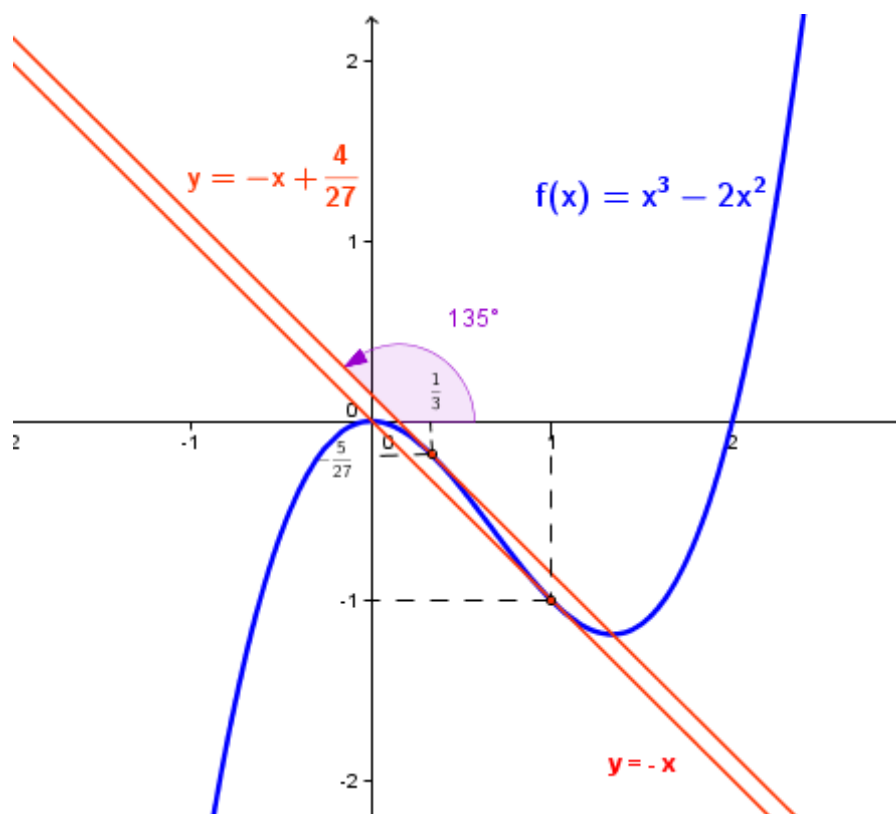
$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'(1) = -1 \\ f(1) = -1 \cdot 1 + b \rightarrow -1 = -1 + b \rightarrow b = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = -x} \text{ és l'equació de la recta tangent en el punt } (1, -1)$$

- Equació de la recta tangent en el punt $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{27}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \\ f\left(\frac{1}{3}\right) = -1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + b \rightarrow -\frac{5}{27} = -\frac{1}{3} + b \rightarrow b = \frac{4}{27} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = -x + \frac{4}{27}} \text{ és l'equació de}$$

la recta tangent en el punt $\left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{27}\right)$

Veiem aquest resultat
gràficament:



Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = x^3 - 2x^2$ en els punts on la funció talla a la funció $g(x) = x^3 - 8$

Troblem primer els punts on es tallen les gràfiques de les funcions $f(x)$ i $g(x)$ resolent l'equació $f(x) = g(x)$

$$x^3 - 2x^2 = x^3 - 8$$

$$2x^2 = 8$$

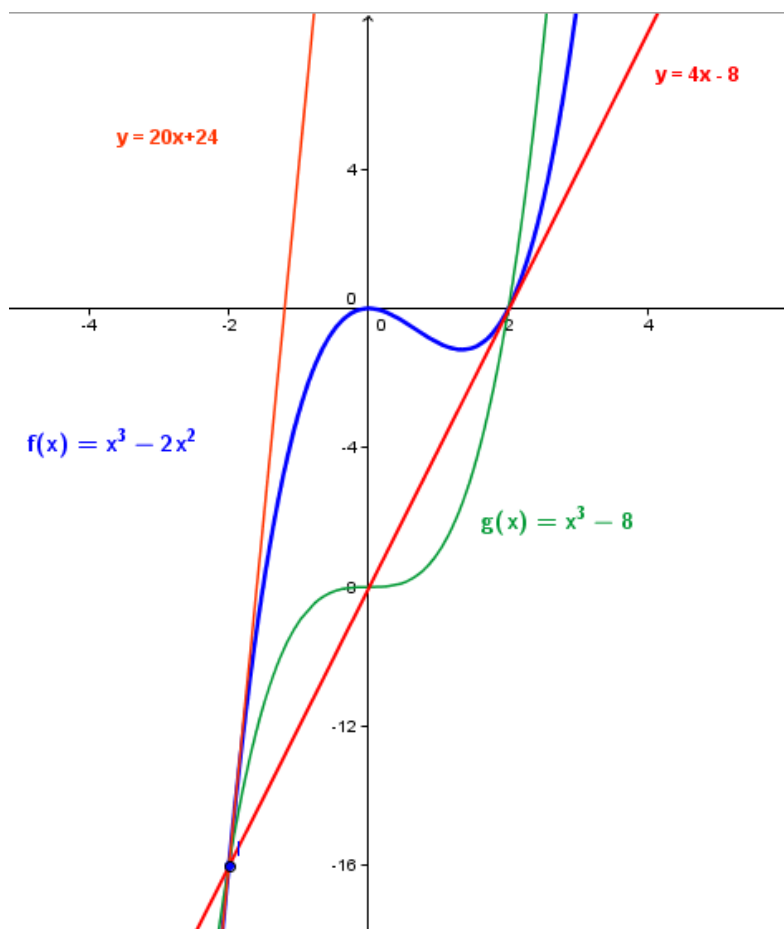
$$x^2 = 4 \rightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow \text{punt } (2, f(2)) = (2, 0) \\ x = -2 \rightarrow \text{punt } (-2, f(-2)) = (-2, -16) \end{cases}$$

- Equació de la recta tangent en el punt (2,0)

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'(2) = 4 \\ f(2) = 4 \cdot 2 + b \rightarrow 0 = 8 + b \rightarrow b = -8 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = 4x - 8} \text{ és l'equació de la recta tangent} \\ \text{en el punt (2,0)}$$

- Equació de la recta tangent en el punt (-2,-16)

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = 3x^2 - 4x \rightarrow m = f'(-2) = 20 \\ f(-2) = 20 \cdot (-2) + b \rightarrow -16 = -40 + b \rightarrow b = 24 \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{y = 20x + 24} \text{ és l'equació de la} \\ \text{recta tangent en el punt (-2,-16)}$$



Aquest és el resultat gràficament