

INDETERMINACIONS

Si considerem $-\infty$ i $+\infty$ com una extensió dels nombres reals $\mathbb{R}$, podem definir les operacions següents en els casos d'operacions amb límits de funcions:

$a + \infty \rightarrow +\infty$	$a - \infty \rightarrow -\infty$	$\infty + 0 \rightarrow \infty$	$\infty - \infty \rightarrow ?$
$a \cdot \infty \rightarrow \pm \infty$	$a \cdot 0 \rightarrow 0$	$\infty \cdot \infty \rightarrow \pm \infty$	$\infty \cdot 0 \rightarrow ?$
$\frac{\infty}{a} \rightarrow \pm \infty$	$\frac{a}{0} \rightarrow \pm \infty$	$\frac{0}{a} \rightarrow 0$	$\frac{0}{0} \rightarrow ?$
$\frac{0}{\infty} \rightarrow 0$	$\frac{\infty}{0} \rightarrow \pm \infty$	$\frac{a}{\infty} \rightarrow 0$	$\frac{\infty}{\infty} \rightarrow ?$

Per tant tenim els casos d'indeterminació:

$\infty - \infty$	$\infty \cdot 0$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$
-------------------	------------------	---------------	-------------------------

També podem establir el comportament amb potències

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a^{\infty} \rightarrow 0 \\ a^{-\infty} \rightarrow \infty \end{cases} \\ \text{Si } 0 < a > 1 \Rightarrow \begin{cases} a^{\infty} \rightarrow \infty \\ a^{-\infty} \rightarrow 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

I tenim els casos d'indeterminació següents:

∞^0	0^{∞}	0^0	1^{∞}
------------	--------------	-------	--------------

INFINITÈSIMS

Recordeu que un **infinitèsim**, quan $x \rightarrow a$ (x tendeix a a), és una funció que compleix la següent propietat: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$.

Dos infinitèsims es diuen equivalents, quan $x \rightarrow a$, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ i s'escriu que

$$f(x) \approx g(x) \text{ si } x \rightarrow a$$

Exemples d'infinitèsims equivalents:

Quan $x \rightarrow 0$	$\sin x \approx x$	$\operatorname{tg} x \approx x$	$\operatorname{arc} \sin x \approx x$
	$e^x \approx 1 + x$	$\ln(1+x) \approx x$	$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2}$

Quan calculem el límit d'una expressió que sigui indeterminada, podem substituir qualsevol terme per un infinitèsim equivalent i el límit no varia:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin(3x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{3x} = \frac{2}{3} \text{ ja que } \begin{cases} \ln(1+2x) \approx 2x \\ \sin(3x) \approx 3x \end{cases} \text{ quan } x \rightarrow 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - e^{x-2}}{1 - \cos(2-x)} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1 - (1 + x - 2)}{1 - (1 - \frac{(2-x)^2}{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{(2-x)^2} = -\infty$$

$$\text{ja que } \begin{cases} e^{x-2} \approx 1 + (x-2) \\ \cos(2-x) \approx 1 - \frac{(2-x)^2}{2} \end{cases} \text{ quan } x \rightarrow 2$$

INFINITS

Recordem que un **infinit**, quan $x \rightarrow a$ (x tendeix a a), és una funció que compleix la següent propietat: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$.

Dos infinits es diuen **equivalents**, quan $x \rightarrow a$, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ i s'escriu que

$$f(x) \approx g(x) \text{ si } x \rightarrow a$$

Exemples d'infinits equivalents:

$$\text{Quan } x \rightarrow \infty \left\{ \begin{array}{l} a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0 \approx a_n x^n \\ \sqrt[m]{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0} \approx \sqrt[m]{a_n x^n} \\ \log_b(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_0) \approx \log_b(a_n x^n) \\ \text{F. de Stirling (curiositat): } x^x \cdot e^{-x} \sqrt{2\pi x} \approx x! \end{array} \right.$$

Quan calculem el límit d'una expressió que sigui indeterminada, podem substituir qualsevol terme per un infinit equivalent i el límit no varia:

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 2x^2)}{\ln(2 + 3x^4)} = \frac{\infty}{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2x^2)}{\ln(3x^4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln 2 + \ln x^2}{\ln 3 + \ln x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x^2}{\ln x^4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \ln x}{4 \ln x} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Es diu que $f(x)$ és un **infinit d'ordre superior** a $g(x)$, quan $x \rightarrow a$, si $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$ i

s'escriu que $f(x) \gg g(x)$ si $x \rightarrow a$

Per a $x \rightarrow \infty$, tenim el següent ordre d'infinits:

$$x^x \gg x! \gg a^x \gg x^p \gg (\log_b x)^m \text{ amb } a > 1, b > 1, p > 0 \text{ i } m > 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + 2x^2 + 3x^6)}{1 + x} = \frac{\infty}{\infty} = \left\{ \begin{array}{l} \text{l'infinit del denominador és d'ordre} \\ \text{superior al infinit del numerador} \end{array} \right\} = 0$$

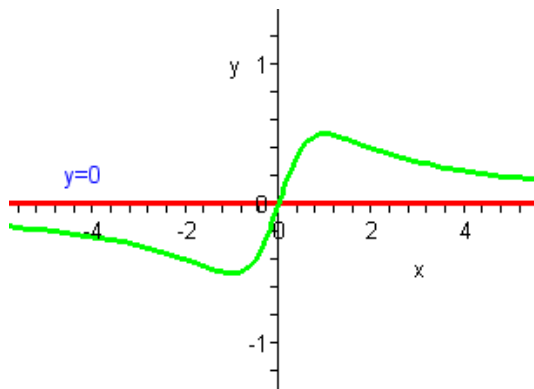
$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + 2^x}{x^{12} + 5x^{20}} = \frac{\infty}{\infty} = \left\{ \begin{array}{l} \text{l'infinit del numerador és d'ordre} \\ \text{superior al infinit del denominador} \end{array} \right\} = \infty$$

ASÍMPTOTES

Calculeu l'asímtota horitzontal de la

funció $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{1+x^2} = 0$, per tant l'asímtota horitzontal és **y = 0**



Calculeu les asímtotes horitzontals i verticals de la funció: $f(x) = \frac{x^2}{x^2-1}$

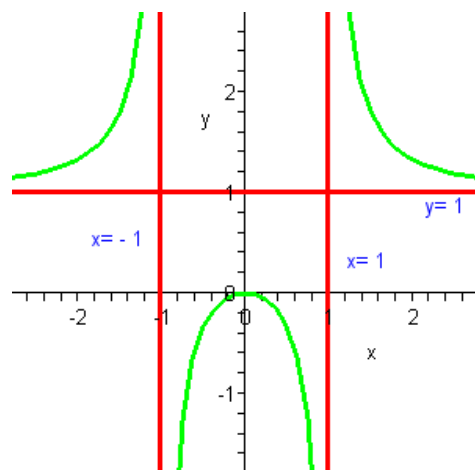
Asímtota horitzontal: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 \Rightarrow$ **y = 1**.

Domini :

$x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1$ per tant el domini és $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Asímtotes verticals (on el denominador valgui 0 i el numerador no)

$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty \Rightarrow$ **x = -1** i **x = 1** són asímtotes verticals



Calculeu les asímtotes de la funció $f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 8}$. Calculeu també els seus punts d'intersecció amb els eixos.

Domini :

$2x^2 - 8 = 0 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$ i per tant el domini és $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 8} = \frac{4 + 2 - 2}{8 - 8} = \frac{4}{0} = \infty \Rightarrow$ **x = -2** és una asímtota vertical

$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 8} = \frac{4 - 2 - 2}{8 - 8} = \frac{0}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \text{aplicant} \\ \text{Ruffini} \end{array} \right\} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{2(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2+1}{2(2+2)} = \frac{3}{8} \Rightarrow$ no hi

ha asímtota vertical

Asímtotes horitzontals

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 8} = \frac{1}{2} \Rightarrow$ **y = 1/2** és l'asímtota horitzontal

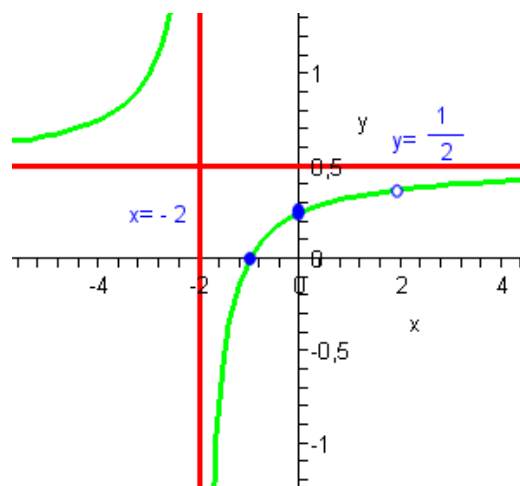
Per trobar el punt de tall amb l'eix y, si és que n'hi ha cal cercar la imatge de $x = 0$,

$$f(0) = \frac{-2}{-8} = \frac{1}{4}, \text{ o sigui el punt } \left(0, \frac{1}{4}\right)$$

Per trobar el punt de tall amb l'eix x, si és que n'hi ha cal cercar lquan $f(x) = 0$

$$\frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 8} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} -1 \\ 2 \end{cases} \text{ i com que}$$

el punt $x=2$ no pertany al domini de la funció, l'únic zero de la funció és $(-1, 0)$



Donada la funció $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1}$, indiqueu el seu domini, els seus punts d'intersecció amb els eixos i asímptotes.

Domini : $\mathbb{R} - \{1\}$

Talls amb els eixos:

Eix OY: Imatge de $x = 0$, $f(0) = \frac{10}{-1} = -10$, o sigui el

punt **(0, -10)**

Eix OX: $f(x) = 0$

$$\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1} = 0 \Rightarrow x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \begin{cases} 2 \\ 5 \end{cases}, \text{ o sigui,}$$

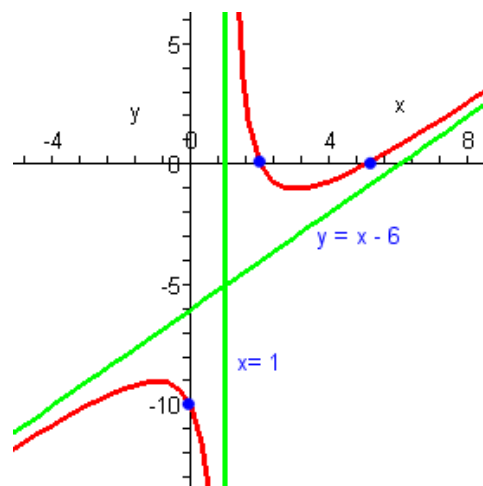
(2, 0) i (5, 0)

Asímptota horitzontal: no en té perquè

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1} = \infty$$

Asímptotes verticals:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1} = \frac{4}{0} = \infty \text{ i per tant existeixi asímptota vertical } \mathbf{x = 1}$$



Asímptota oblíqua d'equació $y = mx + n$

$$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - x} = 1$$

$$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 7x + 10}{x - 1} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 7x + 10 - x^2 + x}{x - 1} =$$

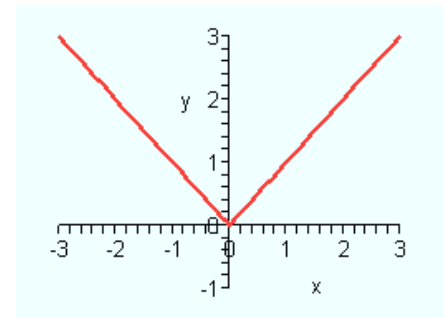
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cancel{x^2} - 7x + 10 - \cancel{x^2} + x}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-6x + 10 + x}{x - 1} = -6$$

i per tant existeixi asímptota oblíqua d'equació **y = x - 6**

Estudia la continuïtat de la funció $f(x) = |x|$

Donat que $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ i que $f(0) = 0$ tindrem:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0 \end{aligned} \right\} = f(0) \Rightarrow \text{la funció és contínua en } 0$$



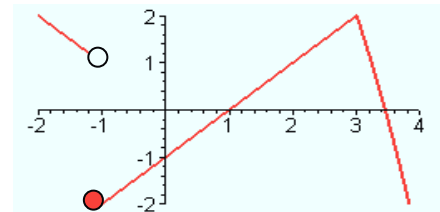
Estudia la continuïtat lateral de la funció $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x < -1 \\ x-1 & \text{si } -1 \leq x < 3 \\ -x^2 + 2x + 5 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

en els punts $x_0 = -1$ i $x_0 = 3$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} -x = 1 \neq f(-1) \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} x-1 = -1-1 = -2 = f(-1) \end{aligned} \Rightarrow$$

- f no és contínua lateralment per l'esquerra en $x = -1$
- f és contínua lateralment per la dreta en $x = -1$

Per tant la funció f no és discontínua en $x = -1$



$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 3-1 = 2 = f(3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -3^2 + 2 \cdot 3 + 5 = 2 = f(3) \Rightarrow f \text{ és contínua lateralment en } x=3 \text{ per l'esquerra i}$$

per la dreta i, per tant, és contínua en aquest punt.

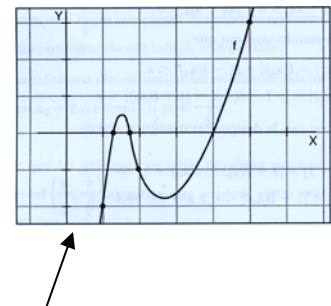
Segui f contínua en $[1, 5]$, $f(1) = -2$, $f(2) = -1$ i $f(5) = 3$. Raona si són certes les afirmacions següents:

a) $f(x) > 0 \quad \forall x \in (2, 5)$

Falsa. Pel teorema de conservació del signe, com que f és contínua en $x = 2 \in [1, 5]$ i $f(2) = -2 < 0$, existeix un entorn $E_r(2)$ en què f es negativa. Per tant, f serà negativa en $E_r(2) \cap (2, 5) \neq \emptyset$
aleshores, $\exists x \in (2, 5)$ tal que $f(x) < 0$.

b) f talla l'eix OX en l'interval $[1, 5]$

Certa. Com que f és contínua en $[1, 5]$ i ja que $f(1) = -2 < 0$ i $f(5) = 3 > 0$, es compleixen les hipòtesis del teorema de Bolzano; aleshores, $\exists x \in (1, 5)$ tal que $f(x) = 0$. Per tant, f talla l'eix OX en $c \in [1, 5]$.

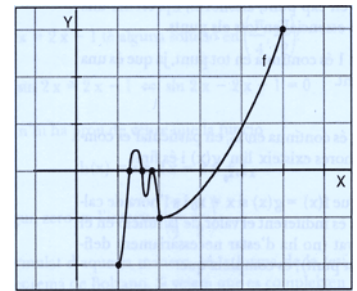


c) f no talla l'eix OX en l'interval $[1, 2]$

Falsa (en general), ja que f podria tenir una gràfica com la de la figura

d) **f pot tenir més de dos zeros en $[1, 2]$**

Certa, ja que la seva gràfica podria oscil·lar al voltant de l'eix OX entre les abscisses $x=1$ i $x=2$.



e) **Existeix $c \in [1, 5]$ tal que $f(c)=2.5$**

Certa. Pel teorema dels valors intermedis, com que f és contínua en l'interval $[1,5]$ i $2.5 \in (f(1), f(5)) = (-2, -3) \Rightarrow \exists c \in (1, 5) \subseteq [1, 5]$ tal que $f(c) = 2.5$

f) **f està afitada en l'interval $[1, 2]$**

Certa. Pel teorema de Weierstrass, com que f és contínua en l'interval $[1, 2]$, assolix el seu mínim absolut en aquest interval, m , i el seu màxim absolut en aquest interval, M , en sengles punts x_1 i x_2 d'aquest interval; aleshores,

$\forall x \in [1, 2], m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M \Rightarrow m \leq f \leq M$ en $[1, 2]$
es a dir, f està fitada en $[1, 2]$

Troba els punts de discontinuïtat de la funció $i(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ i determina de quins tipus són:

Com es tracta d'una funció racional, els punts de discontinuïtats es troben entre els zeros del denominador: $x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$

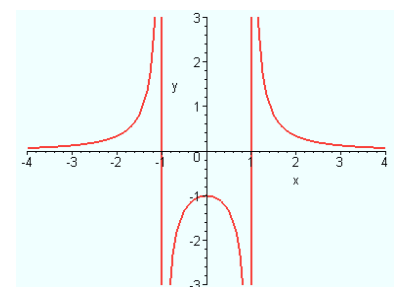
Calculem els límits laterals en $x = -1$ i $x = 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = -1 \text{ és asíptota vertical}$$

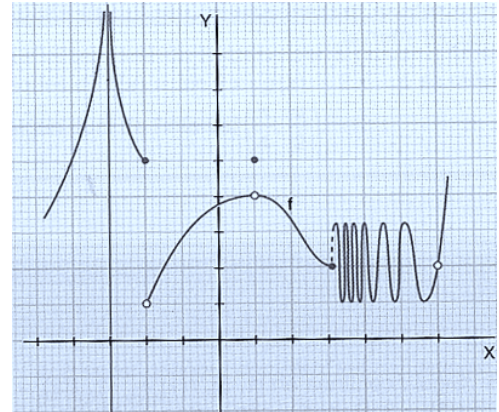
per tots dos costats i f presenta una discontinuïtat de salt infinit en $x = -1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = \frac{4}{0^+} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow x = 1 \text{ és asíptota vertical}$$

per tots dos costats i f presenta una discontinuïtat de salt infinit en $x = 1$.



Considera la gràfica de la funció f :
Indica els punts de discontinuïtats de la funció f i determina de quins tipus són.



Els punts de discontinuïtat són aquells en què s'interromp la gràfica de la funció: -3, -2, 1, 3 i 6.

En $x = -3$ tenim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ presenta una}$$

discontinuitat de salt infinit i la recta $x = -3$ és una asímtota vertical de f

En $x = -2$ tenim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 1 \end{array} \right. \text{ i } f(-2) = 5 \Rightarrow f \text{ presenta una discontinuitat de salt finit.}$$

En $x = 1$ tenim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 \end{array} \right. \text{ i } f(1) = 5 \Rightarrow f \text{ presenta una discontinuitat evitable.}$$

En $x = 3$ tenim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ no existeix} \end{array} \right. \text{ i } f(3) = 2 \Rightarrow f \text{ presenta una discontinuitat essencial.}$$

En $x = 6$ tenim:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 6^-} f(x) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 6^+} f(x) = 2 \end{array} \right. \text{ i } 6 \notin \text{domini de } f \Rightarrow f \text{ presenta una discontinuitat evitable.}$$

Troba els punts de discontinuïtats de les funcions següents i indica de quins tipus són:

a. $f(x) = \frac{3x+3}{x^2-x-2}$

Com es tracta d'una funció racional, els punts de discontinuïtats es troben

entre els zeros del denominador: $x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \begin{cases} 2 \\ -1 \end{cases}$

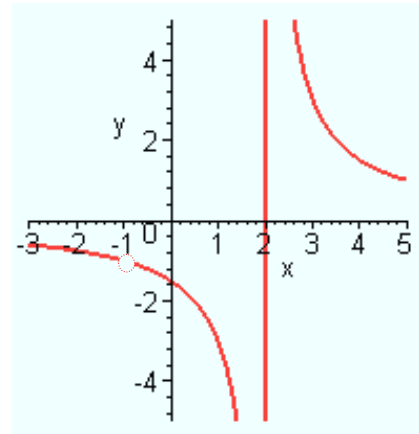
Calculem els límits laterals en $x = -1$ i $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x+3}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3\cancel{(x+1)}}{\cancel{(x+1)}(x-2)} = \frac{3}{-3} = -1 = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x+3}{x^2-x-2} \text{ i per tant } f \text{ presenta}$$

una discontinuitat evitable en $x = -1$.

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x+3}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x+3}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3(x+1)}{(x+1)(x-2)} = \frac{3}{0^+} = +\infty \end{cases} \quad i$$

per tant f presenta una **discontinuitat de salt infinit** en $x = 2$ i la recta $x = 2$ és **asíptota vertical** de f .



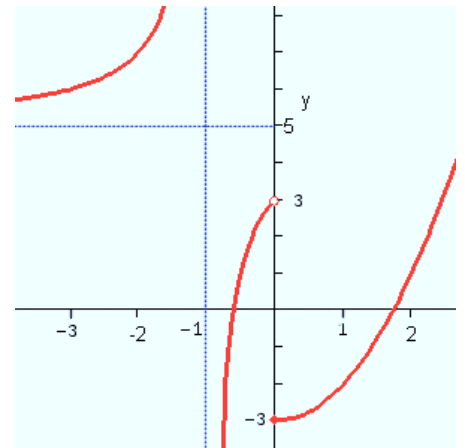
$$b. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{5x+3}{x+1} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Es tracta d'una funció definida a trossos.

En l'interval $] -\infty, 0 [$ hem de treure del domini els punts que anul·len el denominador: $x+1=0 \Rightarrow x=-1$
Estudiem el límit en aquest punt

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{5x+3}{x+1} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{5x+3}{x+1} = \frac{-2}{0^-} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{5x+3}{x+1} = \frac{-2}{0^+} = -\infty \end{cases} = \infty$$

i per tant en -1 la funció f té una **discontinuitat de salt infinit** i la recta $x=-1$ és una **asíptota vertical**



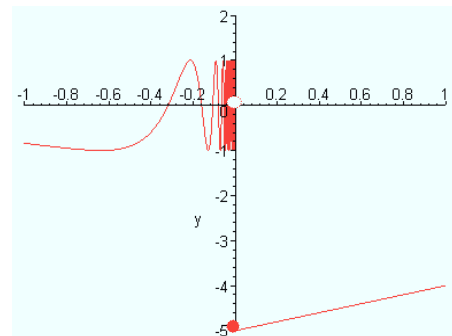
Hem d'estudiar la continuïtat en el punt separació dels trossos (zero)

$$\left\{ \begin{array}{l} g(0) = 0^2 - 3 = -3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5x+3}{x+1} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 3) = -3 \end{array} \right\} \Rightarrow f \text{ presenta una } \textbf{discontinuitat de salt finit} \text{ en } x=0$$

En l'interval $] 0, \infty [$ tenim una funció polinòmica i per tant contínua.

$$c. \quad h(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x-5 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La funció $\sin \frac{1}{x}$ és contínua per a tot $x < 0$ i presenta una **discontinuitat essencial** en el punt 0, o sigui $\lim_{x \rightarrow 0^-} \sin \frac{1}{x}$ no existeix.



Quan $x \geq 0$ tenim una expressió polinòmica i per tant la funció és contínua en l'interval $]0, \infty[$. L'únic punt discontinuïtat és $x = 0$ i tenim:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) \text{ no existeix} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-5) = -5 \end{cases} \text{ i per tant en } x=0 \text{ es presenta una discontinuïtat} \\ \text{esencial}$$

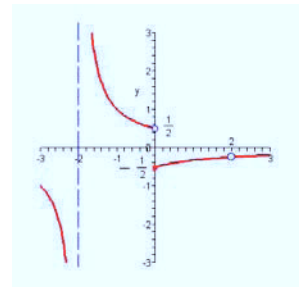
Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x^2 + 2x} & -3 \leq x < 0 \\ \frac{2-x}{x^2 - 4} & 0 \leq x \leq 3 \end{cases}$ definida en l'interval $[-3, 3]$, estudeu la seva continuïtat en els punt $x = -2$, $x = 0$ i $x = 2$

A l'interval $[-3, 0[$: $x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Domini } [-3, 0[- \{-2\}$

A l'interval $[0, 3]$: $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Domini } [0, 3] - \{2\}$

Per tant, el domini de f és $]-3, 3[- \{-2, 2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x}{x^2 + 2x} = \frac{-2}{0} = -\infty \Rightarrow \text{en } x = -2 \text{ disc. asimpt.}$$



$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2 + 2x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}(x+2)} = \frac{1}{2} \\ f(0) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2-x}{x^2 - 4} = \frac{2}{-4} = -\frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} \text{en } x = 0 \text{ discontinuïtat de salt finit i} \\ \text{és contínua lateralment per la dreta} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2-x}{x^2 - 4} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \frac{-1}{4} \Rightarrow \text{en } x = 2 \text{ disc. evitable}$$

Determina els valors de a i b perquè la funció següent sigui contínua en $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} 5 \sin x & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ a \sin x + b & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x + 3 & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

La funció f és una funció definida a trossos i en cada tros és contínua. Hem de veure si hi ha continuïtat en els extrems dels intervals de cada tros, o sigui

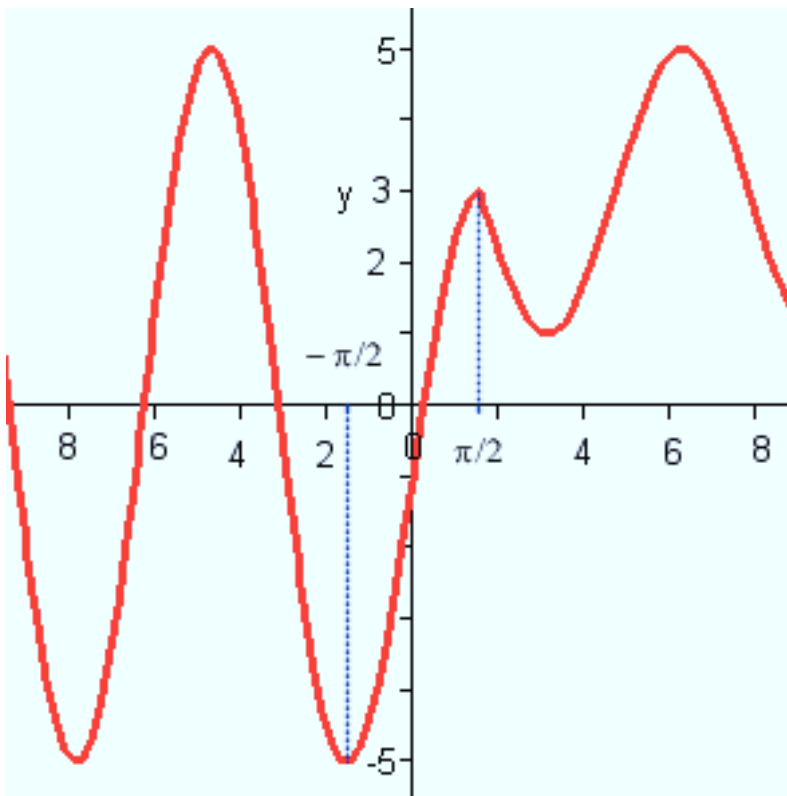
quan $x = -\frac{\pi}{2}$ i quan $x = \frac{\pi}{2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} f(x) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^-} 5 \sin x = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} (a \sin x + b) \\ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (a \sin x + b) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} (2 \cos x + 3) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -5 = -a + b \\ a + b = 3 \end{array} \right.$$

Hem de resoldre el sistema d'equacions $\begin{cases} -a + b = -5 \\ a + b = 3 \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & -5 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = -1 \end{cases} \text{ i per tant}$$

la funció: $f(x) = \begin{cases} 5 \sin x & \text{si } x < -\frac{\pi}{2} \\ 4 \sin x - 1 & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x < \frac{\pi}{2} \\ 2 \cos x + 3 & \text{si } x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ és contínua en $\mathbb{R}$



Estudi i representació d'una funció

Estudieu i representeu la gràfica de $f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1)$

Domini: $\mathbb{R}$, ja que és polinòmica.

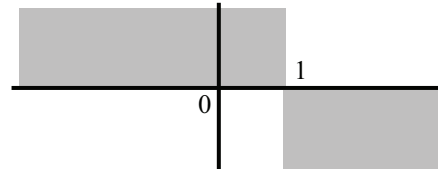
Talls amb els eixos:

Amb l'eix OX: $0 = f(x) = (x+2)^2 \cdot (x-1) \Leftrightarrow x = -2 \text{ o } x = 1$

Amb l'eix OY: $f(0) = (0+2)^2 \cdot (0-1) = -4$

Signe: Hem de considerar els intervals determinats pels zeros de f , ja que no té discontinuïtats:

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 1)$	1	$(1, +\infty)$
	-		-	0	+
	$\nwarrow$		$\nwarrow$		$\nwarrow$
	$f(-1) = 2$		$f(0) = -4$		$f(2) = 16$



Asíntotes i branques infinites:

f no té asíntotes, ja que és polinòmica de grau més gran que 1.

f té branques infinites per tots dos costals, ja que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

Intervals de monotonia i extrems relatius:

$$f'(x) = 2(x+2) \cdot (x-1) + (x+2)^2 = 2x^2 + 2x - 4 + x^2 + 4x + 4 = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$$

Els zeros de f són $x = -2$ i $x = 0$.

f no té discontinuïtats, ja que és polinòmica; per tant, els intervals de monotonia de f són els determinats pels zeros de f' :

x	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, 0)$	0	$(0, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$	m	$\nearrow$

$$\begin{aligned} f'(-3) &= +9 \\ f'(-1) &= -3 \\ f'(1) &= +9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(-2) &= 0 \\ f(0) &= -4 \end{aligned}$$

f té dos extrems relatius: Màxim $(-2, 0)$ i Mínim $(0, -4)$.

Intervals de curvatura i punts d'inflexió:

$$f''(x) = 3(x+2) + 3x \cdot 1 = 6x + 6$$

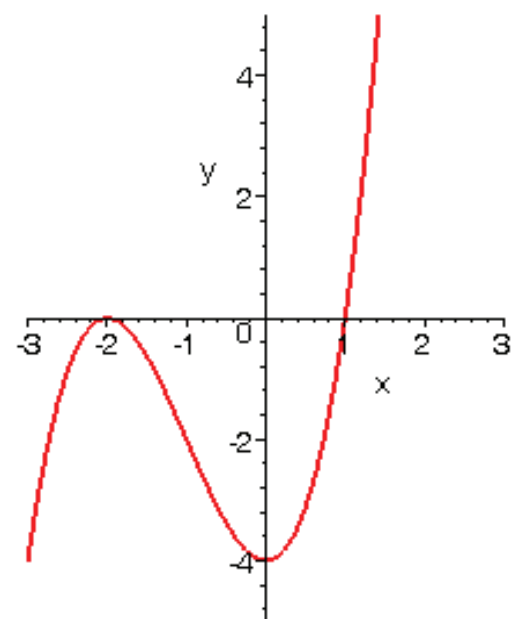
Els zeros de f'' són $x = -1$, i com que no té discontinuïtats (ja que és polinòmica), els intervals de curvatura de f són:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	PI	$\cup$

$$f''(-2) = -6 \quad f''(0) = 6 \quad \text{i} \quad f(-1) = -2$$

Té un punt d'inflexió en el punt $(-1, -2)$

La seva gràfica és:



Representa gràficament la funció $f(x) = x^3 - x^2 - 8x$

El **domini** de la funció és $\mathbb{R}$. No té asímptotes ni verticals, ni horitzontals ni obliqües

Zeros: $x^3 - x^2 - 8x = x(x^2 - x - 8) = 0 \Rightarrow x = 0, x = \frac{1 \pm \sqrt{33}}{2} = \begin{cases} -2.37... \\ 3.37... \end{cases}$

Signe de la funció:

$]-\infty, -2.37[$	$]-2.37, 0[$	$]0, 3.37[$	$]3.37, +\infty[$
-	+	-	+

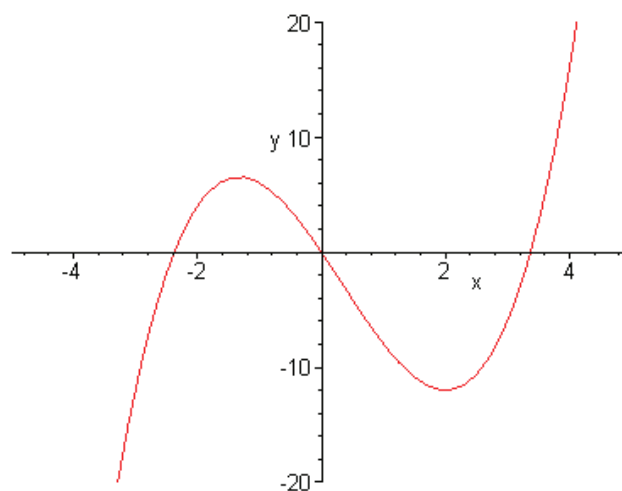
Calculem: $f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 \Rightarrow f'(x) = 0$ quan $x = \frac{2 \pm \sqrt{100}}{6} = \begin{cases} -1.33... \\ 2 \end{cases}$ i per tant

	$]-\infty, -1.33[$	-1.33	$]-1.33, 2[$	2	$]2, +\infty[$
f'	+	0	-	0	+
f	creix ↗	Màxim en $\left(-\frac{4}{3}, \frac{176}{27}\right)$	decreix ↘	Mínim en $(2, -12)$	creix ↗

Calculem $f''(x) = 6x - 2 \Rightarrow 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = 1/3$ i:

	$]-\infty, \frac{1}{3}[$	$\frac{1}{3}$	$]\frac{1}{3}, +\infty[$
f''	< 0	0	> 0
f	Còncava $\cap$	Punt d'inflexió en $\left(\frac{1}{3}, -\frac{74}{27}\right)$	Convexa $\cup$

La gràfica de la funció és:



Representa gràficament les funció $k(x) = x e^x$

El **domini** és $\mathbb{R}$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty \Rightarrow$ té una **branca parabòlica**

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = -\infty \cdot 0 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0$ ja que e^{-x} és un infinit de grau

superior a x i per tant el quocient tendeix a zero. Per tant la recta $y=0$ és una **asímtota horitzontal** quan $x \rightarrow -\infty$

Els **zeros**: $x=0$

Signe	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
k	-	+

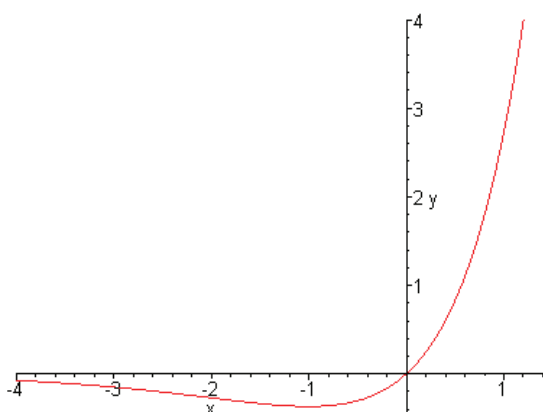
Monotonia: $k'(x) = (1+x)e^x$ i per tant $k'(x)=0$ si $x = -1$. Llavors:

	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, \infty)$
k'	-	0	+
k	decreix	Mínim en el punt $(-1, -0.367)$	creix

Calculem: $k''(x) = (2+x)e^x \Rightarrow (2+x)e^x = 0 \Rightarrow 2+x=0 \Rightarrow x = -2$ i per tant:

	$(-\infty, -2)$	-2	$(-2, +\infty)$
k''	-	0	+
k	Còncava $\cap$	Punt d'inflexió en $(-2, -0.27)$	Convexa $\cup$

Amb aquesta informació, la gràfica és:



Exercicis sobre funcions

La figura mostra la gràfica d'una funció polinòmica de segon grau que passa per l'origen i que és la derivada d'una funció f. Resoleu els apartats següents.

- Determineu els intervals de creixement i decreixement de f.
- Determineu els màxims i els mínims relatius i els punts d'inflexió de f.
- Traceu un esbós de la gràfica de f

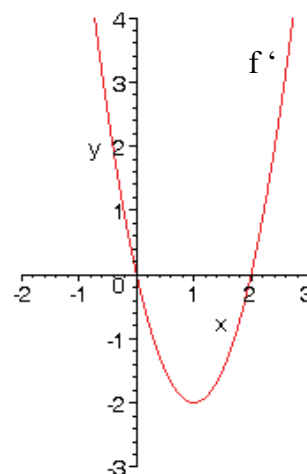
- a) Els intervals de creixement de f són aquells en que $f' > 0$, i els de decreixement, aquells en que $f' < 0$.

Per tant, hem de considerar els intervals en què f' té signe constant, que seran els determinats pels zeros i les discontinuïtats de f en $D(f)$.

En aquest cas, $D(f) = \mathbb{R}$ i f' no té discontinuïtats, ja que és derivable en $\mathbb{R}$ i f és polinòmica. Així, a partir de la gràfica de f' podem elaborar la següent taula de monotonia de f :

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 2)$	2	$(2, +\infty)$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
f(x)				m	Creix

Per tant, f és estrictament creixent en $(-\infty, 0)$ i en $(2, +\infty)$, i estrictament decreixent en $(0, 2)$.



- b) La taula de monotonia de f ens permet d'afirmar que f té un màxim relatiu en $x=0$ i un mínim relatiu en $x = 2$, i no té més extrems relatius.

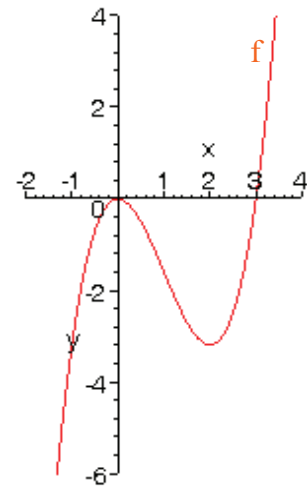
D'altra banda, per a trobar els punts d'inflexió, el millor que podem fer és obtenir-los a partir de la taula de curvatura de f , ja que no podem calcular explícitament les derivades successives.

Sabem que els intervals de curvatura de f corresponen als intervals en què f'' té signe constant i aquests corresponen als de monotonia f' .

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	Decreix	m	Creix
$f''(x)$	-	0	+
$f(x)$	$\cap$	PI	

Així, doncs, $x = 1$ és un punt d'inflexió de f , ja que f passa de ser còncava a ser convexa, i és contínua en aquest punt.

- c) Tenint en compte la informació que hem obtingut sobre f , una possible gràfica és :



Trobeu les funcions polinòmiques $ax^3 + bx^2 + cx + d$ la derivada segona de les quals sigui $x - 1$. Quina o quines tenen un mínim relatiu en el punt $(4, -1/3)$.

Indicació: A partir de la informació que us donen, mireu de trobar les quatre equacions que us permetran obtenir les quatre incògnites

Sigui $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Vegem quines condicions han de satisfer els coeficients perquè la derivada segona sigui $x - 1$: $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ i $f''(x) = 6ax + 2b \Rightarrow 6ax + 2b = x - 1$

Com que els polinomis són iguals si i només si tenen iguals tots els coeficients del mateix grau, aquesta igualtat és equivalent al sistema: $\begin{cases} 6a = 1 \\ 2b = -1 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{6}; b = -\frac{1}{2}$

Per tant, les funcions buscades són les de la forma: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + cx + d$

Imposem que $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$ sigui un mínim relatiu:

En primer lloc, f ha de tenir un extrem relatiu en $x = 4$, i com que f és derivable en aquest punt (perquè és polinòmica), s'ha de complir $f'(4) = 0$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + c \Rightarrow f'(4) = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}4^2 - 4 + c = 0 \Rightarrow c = -4$$

En segon lloc, f ha de passar pel punt $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$

$$f(4) = -\frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{6}4^3 - \frac{1}{2}4^2 - 4 \cdot 4 + d = -\frac{1}{3} \Rightarrow d = \frac{-64 + 48 - 2 + 96}{6} \Rightarrow d = 13$$

Falta comprovar que en el punt $\left(4, -\frac{1}{3}\right)$ hi ha un mínim relatiu, o sigui $f''(4) > 0$:

$$f''(x) = x - 1 \Rightarrow f''(4) = 4 - 1 = 3 > 0 \text{ i, per tant, aquesta condició ja es compleix.}$$

La funció buscada és: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 4x + 13$