

ENUNCIATS PROBLEMES PAU GEOMETRIA (2005-2009)

1. Una piràmide de base quadrada té el vèrtex en el pla d'equació $z = 3$. Tres dels vèrtexs de la base són els punts del pla OXY : $A = (1, 0, 0)$, $B = (1, 1, 0)$ i $C = (0, 1, 0)$.

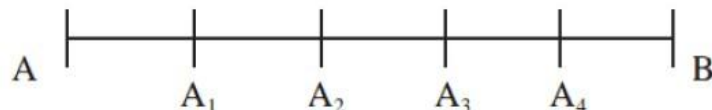
a) Feu un gràfic dels elements del problema. Quines són les coordenades del quart vèrtex de la base, D ?

b) Quin és el volum de la piràmide? $\left[\text{Volum} = \frac{\text{àrea base} \times \text{altura}}{3} \right]$

c) Si el vèrtex de la piràmide és el punt $V = (a, b, 3)$, quina és l'equació de la recta que conté l'altura sobre la base?

2. Trobeu la distància entre la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi: 2x - 3y + 3z + 5 = 0$.

3. Un segment d'origen en el punt $A = (-1, 4, -2)$ i extrem en el punt B està dividit en cinc parts iguals mitjançant els punts de divisió A_1, A_2, A_3 i A_4 (vegeu la figura). Si sabem que $A_2 = (1, 0, 2)$, quines són les coordenades de B ?



4. Considereu els vectors de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = (-1, 3, 4), \quad \vec{v}_2 = (2, -1, -3) \quad \text{i} \quad \vec{v}_3 = (1, 2k + 1, k + 3).$$

a) Trobeu l'únic valor de k per al qual aquests vectors **no** són una base de $\mathbb{R}^3$.

b) Per a un valor de k diferent del que heu trobat en l'apartat a), quins són els components

del vector $\vec{w} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$ en la base $\left\{ \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \right\}$?

5. Trobeu la distància entre la recta $r: \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z+2}{3}$ i el pla $\pi: 2x - 3y + 3z + 5 = 0$.

6. Donats els punts $A = (1, 0, 0)$ i $B = (0, 0, 1)$:
- a) Trobeu un punt C sobre la recta d'equació paramètrica $\begin{cases} x = 1 \\ y = 1 + \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}$ que faci que el triangle ABC sigui rectangle en C .
- b) Trobeu l'àrea del triangle ABC .
7. Trobeu les coordenades dels punts situats sobre la recta d'equació $(x, y, z) = (-1, 1, 1) + t \cdot (1, 2, 1)$ que estan a distància 1 del pla $2x + 2y + z = 5$.
8. Una recta r passa pel punt $A = (3, 0, 2)$ i té la direcció del vector $(-1, 1, 4)$.
- a) Trobeu quin angle forma r amb el pla horitzontal.
- b) Comproveu que no passa pel punt $B = (1, 3, 10)$.
- c) Trobeu l'equació de la recta que passa per A i B .
9. Determineu l'equació del pla perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ x + z + 2 = 0 \end{cases}$ que passa pel punt $(1, 1, 2)$. Quina distància hi ha d'aquest pla a l'origen de coordenades?
10. Considereu la recta $r: \begin{cases} 2x - 5y - z - 3 = 0 \\ x - 3y - z - 2 = 0 \end{cases}$ i el pla $p: 2x - y + az + 2 = 0$ on a és un paràmetre.
- a) Trobeu un vector director de la recta i un vector perpendicular al pla.
- b) Quin ha de ser el valor de a per tal que la recta i el pla siguin paral·lels?
- c) Esbrineu si existeixen valors de a per als quals la recta i el pla siguin perpendiculars. En cas afirmatiu, calculeu-los.
- d) Esbrineu si existeixen valors de a per als quals la recta i el pla formin un angle de 30° . En cas afirmatiu, calculeu-los.
11. Calculeu l'equació de la recta paral·lela a la recta $r: \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$ que passa pel punt $(0, 1, 0)$.
12. Determineu els extrems d'un segment AB sabent que el punt A pertany al pla $2x + y + z = 0$, el punt B pertany a la recta $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$ i el punt mitjà del segment és $(0, 0, 0)$.

13. Considereu el sistema d'equacions
$$\begin{cases} px + 7y + 8z = 1370 \\ x + y + z = 200 \\ 7x + py + 8z = 1395 \end{cases}$$
- Discutiïu-lo en funció del paràmetre p .
 - Doneu la interpretació geomètrica en els casos en què el sistema és incompatible.
 - Resoleu el sistema per a $p = 6$.
14. Trobeu l'equació del pla perpendicular a la recta $r: \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ que passa per l'origen de coordenades.
15. Trobeu els punts de la recta $r: x - 1 = y + 2 = z$ que equidisten dels plans $\pi_1: 4x - 3z - 1 = 0$ i $\pi_2: 3x + 4y - 1 = 0$.
16. A l'espai es consideren els tres plans d'equacions:
 $\pi_1: x + 2y + z = 1$, $\pi_2: px + y + pz = 1$ i $\pi_3: px + y + 2z = 1$, on p és un paràmetre real.
- Esbrineu per a quins valors de p els tres plans es tallen en un únic punt. Trobeu aquest punt quan $p = 1$.
 - Hi ha algun valor de p que faci que la intersecció comuna sigui una recta? Si és així, escriviu l'equació vectorial d'aquesta recta.
 - Trobeu quina és la posició relativa dels tres plans quan $p = 1/2$.
17. Considereu els punts de l'espai $P = (-1, a - 1, 3)$, $Q = (0, a - 2, 1 - a)$ i $R = (2, -1, 6 - 6a)$.
- Trobeu el valor de a per al qual els tres punts estan alineats.
 - Quan els tres punts estan alineats, quina és l'equació de la recta que els conté?
18. Trobeu l'equació de la recta continguda en el pla $\pi: x + 2y + 6z - 2 = 0$, que talla els eixos OY i OZ .
19. Considereu la recta d'equació $r: x = \frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{2}$.
- Expresseu el quadrat de la distància d'un punt qualsevol (x, y, z) de la recta al punt $P = (1, 2, 5)$ com una funció de la coordenada x .
 - Trobeu quin valor de x fa mínima aquesta funció, deduiu quin punt Q de la recta és el més proper a P i calculeu la distància del punt a la recta.
 - Escriviu l'equació de la recta que passa per P i Q i comproveu que és perpendicular a r .

20. Discutiu el sistema següent $\begin{cases} x + 2y + z = 5 \\ 2x + py + 2z = 10 \\ px + 6y + 3z = 12 \end{cases}$ en funció del paràmetre p . Doneu

la interpretació geomètrica del sistema en cada cas i resoleu-lo quan sigui compatible.

21. Trobeu les equacions dels plans paral·lels a $\pi: 2x - y + 2z = 3$ situats a 6 unitats de distància d'aquest.

22. Donada la matriu següent dependent d'un paràmetre m :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & m & 2m \\ m & 2 & 2+m \end{pmatrix}$$

- a) Estudieu-ne el rang segons els valors de m .
b) Digueu quina és la posició relativa dels plans $\pi_1: x + y + 2z = 2$, $\pi_2: 2x + my + 2mz = 2 + m$ i $\pi_3: mx + 2y + (2 + m)z = 0$, segons els valors de m .

23. Una recta r és paral·lela a la recta $s: x - 1 = y - 1 = z - 1$, talla en un punt A la

recta $t: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{2} = z + 1$, i en un punt B la recta $l: \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{3}$.

- a) Trobeu l'equació del pla determinat per les rectes r i t .
b) Trobeu el punt B calculant el punt d'intersecció del pla anterior amb la recta l .
c) Trobeu l'equació de la recta r .
d) Trobeu el punt A .

24. Donades les rectes $r: \frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{-1}$ i $s: \frac{x-1}{1} = \frac{y+7}{2} = \frac{z+5}{3}$ i el punt $P = (1, 1, -1)$,

volem trobar l'equació de la recta que passa per P i que talla r i s . Per aconseguir-ho:

- a) Trobeu l'equació general o cartesiana (és a dir, l'equació de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π que conté la recta r i el punt P .
b) Trobeu el punt M calculant el punt d'intersecció del pla π amb la recta s .
c) Trobeu l'equació de la recta que passa pels punts P i M .
d) Comproveu que la recta trobada en l'apartat anterior és la que busquem.

25. Donats el pla $\pi: 3x - 2y + 5z = 6$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z+2}{-3}$, busqueu el punt de tall, si existeix.
26. Donats el punt $P = (7, 5, 1)$, el pla $\pi: x - 2y - 3z = 10$ i la recta $r: \begin{cases} 3x - 2y + 2z = 7 \\ x - 6y - 2z = 5 \end{cases}$:
- Trobeu la distància del punt P al pla π .
 - Trobeu la distància del punt P a la recta r .
 - Trobeu la distància de la recta r al pla π .
27. Les rectes $r_1: \frac{x-a}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z+1}{4}$ i $r_2: \frac{x+2}{1} = \frac{y-b}{2} = \frac{z-4}{-1}$ són coplanàries (és a dir, estan incloses en un mateix pla).
- Expliqueu, raonadament, quina és la posició relativa d'aquestes rectes.
 - Trobeu la relació que hi ha entre els paràmetres a i b .
 - Trobeu els valors de a i b si el pla que les conté passa pel punt $P = (2, 4, 6)$.
28. Donats el punt $P = (1, 2, 3)$ i la recta $r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-5}{-1}$:
- Trobeu l'equació cartesiana (és a dir, de la forma $Ax + By + Cz + D = 0$) del pla π que passa per P i és perpendicular a la recta r .
 - Trobeu el punt de tall entre la recta r i el pla π .
29. Sigui r i s dues rectes de l'espai les equacions respectives de les quals, que depenen d'un paràmetre real b , són les següents:
- $$r: \begin{cases} bx + y + 3z = 1 \\ x + 2y + 5z = 1 \end{cases}, \quad s: \frac{x}{1} = \frac{y-b}{b+1} = \frac{z+1}{-1}$$
- Trobeu el punt de tall de la recta r amb el pla d'equació $x = 0$ i el punt de tall de la recta s amb aquest mateix pla.
 - Calculeu un vector director per a cada una de les dues rectes.
 - Estudieu la posició relativa de les dues rectes en funció del paràmetre b .
30. Donats el pla $\pi: x + 2y - z = 0$ i el punt $P = (3, 2, 1)$:
- Calculeu l'equació contínua de la recta r que passa per P i és perpendicular a π .
 - Calculeu el punt simètric del punt P respecte del pla π .

31. Siguin $P = (3 - 2a, b, -4)$, $Q = (a - 1, 2 + b, 0)$ i $R = (3, -2, -2)$ tres punts de l'espai $\mathbb{R}^3$.
- a) Calculeu el valor dels paràmetres a i b per als quals aquests tres punts estiguin alineats.
 - b) Trobeu l'equació contínua de la recta que els conté quan estan alineats.
 - c) Quan $b = 0$, trobeu els valors del paràmetre a perquè la distància entre els punts P i Q sigui la mateixa que la distància entre els punts P i R .
 - d) Si $b = 0$, calculeu el valor del paràmetre a perquè els punts P , Q i R determinin un triangle equilàter.

32. Considereu en l'espai $\mathbb{R}^3$ les rectes r i s , les equacions respectives de les quals són:

$$r: (x, y, z) = (4, 1, 0) + \lambda(m, 1, 1), \quad s: \begin{cases} x + 2y + mz = 0 \\ x + y + z = 1 \end{cases},$$

en què m és un paràmetre real. Estudieu si hi ha cap valor d'aquest paràmetre per al qual les rectes siguin perpendiculars i es tallin.

33. Donats els vectors $\vec{v}_1 = (a + 1, 2a, 1)$, $\vec{v}_2 = (-2, a, 2a)$ i $\vec{v}_3 = (a, -2, 4a - 2)$ de $\mathbb{R}^3$:
- a) Calculeu l'angle que formen $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$ quan $a = 0$.
 - b) Trobeu el valor del paràmetre a perquè els vectors $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ i $\vec{v}_3$ siguin perpendiculars dos a dos.