

RECEPTES SOBRE GEOMETRIA

A. Vector director d'una recta i vector perpendicular a un pla

$$\text{Recta } r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases} \Rightarrow \text{Vector director: } \mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

$$\text{Pla } p: a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \Rightarrow \text{Vector perpendicular: } \mathbf{v} = (a_1, b_1, c_1)$$

B. Interpretació geomètrica d'un sistema d'equacions lineals

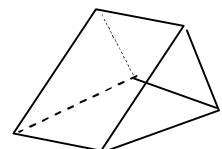
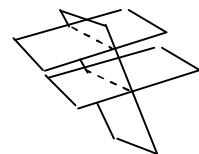
Indicarem els casos que us trobareu més habitualment en exàmens: Sistemes 2x2 i 3x3

A1. Sistemes de 2 equacions i 2 incògnites

- Si el sistema és compatible i determinat, representa geomètricament 2 rectes d'un pla que es tallen en un punt (s'anomenen *rectes secants*)
- Si el sistema és compatible i indeterminat, aleshores és que les dues equacions són equivalents; per tant, representa geomètricament 2 *rectes coincidents*.
- Si el sistema és incompatible, no té solució i es tracta de 2 *rectes paral·leles*.

A2. Sistemes de 3 equacions amb 3 incògnites (cada equació representarà un pla de l'espai)

- Si el sistema és compatible i determinat, representarà 3 plans amb un únic punt en comú (és, per tant, un angle de 3 cares, o *angle trièdre*)
- Si el sistema és compatible determinat, et pots trobar amb 2 possibilitats:
 - o Només una incògnita serveix de paràmetre (rang=2). Aleshores, els 3 plans tenen en comú una recta (s'anomenen plans d'un *feix*)
 - o Dues incògnites fan de paràmetres (rang=1). Aleshores, les 3 equacions són equivalents i, per tant, es tracta de 3 *plans coincidents*.
- Si el sistema és incompatible, es podrien presentar 2 situacions:
 - o rangA=1 i rangA'=2. Aleshores, es tracta de 3 *plans paral·lels*.
 - o rangA=2 i rang A'=3. En aquest cas, poden sortir 2 situacions:
 - o Si n'hi ha 2 plans paral·lels (o sigui, amb coeficients proporcionals), aleshores el sistema representa 3 plans, dos dels quals són paral·lels i l'altre els talla.
 - o Si veiem que no n'hi ha 2 plans paral·lels, aleshores és que els 3 plans són cares d'un prisma triangular. El sistema representa, doncs, un *prisma triangular*.



C. Posicions relatives de dues rectes a l'espai

$$\text{Recta } r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

$$\text{Recta } r': \begin{cases} a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \\ a_4x + b_4y + c_4z = d_4 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

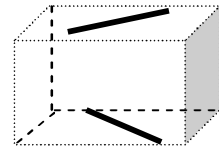
A la dreta hem indicat les matrius A i A'

$$\leftarrow A \rightarrow$$

$$\leftarrow L \quad A' \quad L \rightarrow$$

El $\text{rang}(A)$ serà com a mínim 2 i, com a màxim, 3. El $\text{rang}(A')$ pot estar entre 2 i 4. Les possibilitats existents són les següents:

- § $\text{rang}(A)=2, \text{rang}(A')=2$. Aleshores les 4 equacions equivalen a dues (*rectes coincidents*)
- § $\text{rang}(A)=2, \text{rang}(A')=3$. Aleshores, en la matriu A , les 4 files equivalen a dues, però el sistema no té cap solució (*rectes paral·leles*)
- § $\text{rang}(A)=3, \text{rang}(A')=3$. Aleshores, el sistema té exactament una solució i, per tant, es tracta de 2 *rectes secants*.
- § $\text{rang}(A)=3, \text{rang}(A')=4$. Aleshores, és un sistema incompatible, o sigui, les rectes no tenen cap punt en comú, però com que $\text{rang}(A)=3$, no poden ser paral·leles i, per tant, ocupen una posició a l'espai com en la figura (es diu que les *rectes es creuen*)



Nota: De vegades es posen exercicis que parlen de *rectes coplanàries* (o sigui, rectes que estan contingudes en un pla). Penseu que dels 4 casos anteriors, en els 3 primers són rectes coplanàries i que els 3 casos junts equivalen a la igualtat $\det(A') = 0$. Per exemple, si us donen 2 rectes en les quals apareix un coeficient k desconegut, i us demanen el valor de k per tal que siguin coplanàries, només heu de resoldre l'equació $\det(A') = 0$ per obtenir el valor de k .

D. Posicions relatives d'una recta i un pla a l'espai

$$\text{Recta } r: \begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \end{cases}$$

$$\text{Pla } p: a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \end{pmatrix}$$

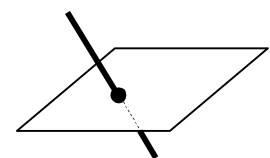
A la dreta hem indicat les matrius A i A'

$$\begin{vmatrix} \leftarrow & A & \rightarrow \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \leftarrow & L & A' & L & \rightarrow \end{vmatrix}$$

El $\text{rang}(A)$ serà com a mínim 2 i, com a màxim, 3. El $\text{rang}(A')$ pot estar també entre 2 i 3. Les possibilitats existents són les següents:

- § $\text{rang}(A)=2, \text{rang}(A')=2$. Aleshores les 3 equacions equivalen a les 2 primeres, o sigui, tots els punts de la recta compleixen l'equació del pla (*recta continguda en el pla*)
- § $\text{rang}(A)=2, \text{rang}(A')=3$. Aleshores, en la matriu A , les 3 files equivalen a dues, però el sistema no té cap solució (*recta és paral·lela al pla*)
- § $\text{rang}(A)=3, \text{rang}(A')=3$. Aleshores, és un sistema compatible, o sigui, la recta i el pla tenen exactament un punt en comú; es diu que la *recta és secant al pla*.



E. Posicions relatives de dos plans a l'espai

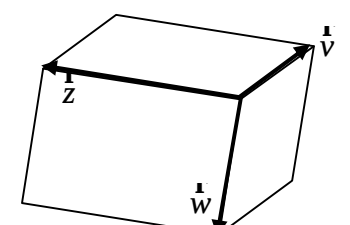
$$\text{Pla } p: a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$\text{Pla } p': a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

§ Si $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} \neq \frac{d_1}{d_2}$, els plans són paral·lels.

§ Si **no es compleix** $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$, els plans es tallen en una recta

E. Productes escalar, vectorial i mixt

Producte escalar: $\begin{cases} \vec{v} \cdot \vec{w} = \ \vec{v}\ \ \vec{w}\ \cos a \\ \text{on } a \text{ és l'angle de } \vec{v} \text{ i } \vec{w} \end{cases}$ Observeu que $\ \vec{v}\ = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$	§ Si els vectors s'expressen en una base ortonormal (3 vectors unitaris i ortogonals), $(v_1, v_2, v_3) \cdot (w_1, w_2, w_3) = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$ § Així doncs, $\ (v_1, v_2, v_3)\ = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$
Mòdul prod vectorial: $\begin{cases} \ \vec{v} \wedge \vec{w}\ = \ \vec{v}\ \ \vec{w}\ \sin a \\ \text{on } a \text{ és l'angle de } \vec{v} \text{ i } \vec{w} \end{cases}$	§ El vector producte vectorial el podeu calcular desenvolupant el determinant següent: $(v_1, v_2, v_3) \wedge (w_1, w_2, w_3) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$ on $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ són els vectors unitaris directors dels eixos de coordenades, X, Y i Z
Producte mixt de 3 vectors $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$: És el valor de $\vec{v} \cdot (\vec{w} \wedge \vec{z})$, el qual coincideix amb el determinant dels 3 vectors i, també, amb el volum del prisma que es pot construir prenent els vectors com a arestes (figura adjunta)	 El producte mixt és el volum del prisma

F. Com “convertir” un vector en unitari

- Donat un vector $\vec{v}$, es poden obtenir 2 vectors de mòdul 1 (o sigui, *vectors unitaris*) a partir d'ell. Aquests vectors són els següents:

- $\vec{u}_1 = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, que serà del mateix sentit que el vector $\vec{v}$
- $\vec{u}_2 = -\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, que serà de sentit contrari al del vector $\vec{v}$

Exemple: El mòdul del vector $\vec{v} = (1, -2, 2)$ és $\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$. Per tant, el vector $(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ és unitari i té el mateix sentit.

F. Distàncies

- Distància entre 2 punts de l'espai**

La distància entre dos punts A i B és, per definició, el mòdul del vector $\overrightarrow{AB}$, o sigui,

$$d(A, B) = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + (b_3 - a_3)^2}$$

- Distància d'un punt a un pla** (Punt $P = (p_1, p_2, p_3)$, pla $p : ax + by + cz = d$)

$$dist(P, p) = \frac{|ap_1 + bp_2 + cp_3 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

- **Distància d'un punt a una recta**

Per calcular la distància d'un punt P a una recta r , pots fer el següent:

1. Calcular un vector director de la recta (vector $\vec{v}$) i un punt, A , sobre la recta

2. Aplicar la fórmula
$$\text{dist}(P, r) = \frac{\|\vec{AP} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$$

També pots fer-ho de la següent manera:

1. Calcules l'equació del pla que passa per P i és perpendicular a la recta r
2. Resols el sistema format per les equacions del pla i de la recta r . Si P' és el punt solució d'aquest sistema, resulta:

$$\boxed{\text{dist}(P, r) = \text{dist}(P, P')}$$

- **Distància entre 2 plans paral·lels**

Per calcular la distància entre 2 plans paral·lels, p i p' , calcula un punt P en p' i, després, calcula $\text{dist}(P, p)$.

- **Distància entre 2 rectes paral·leles**

El cas és similar totalment a l'anterior: Si les rectes són r i r' , has de calcular un punt P en r' i, després, calcular $\text{dist}(P, r)$.

F. Angles

- **Angle de 2 vectors, $\vec{v}$ i $\vec{w}$:**

El podràs obtenir a partir de la fórmula del producte escalar de la següent manera:

$$\cos a = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\|\vec{v}\| \|\vec{w}\|} = \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}}$$

- **Angle de 2 rectes**

És el menor dels angles que formen dos vectors directores de les rectes; per tant, es calcula aplicant la fórmula anterior, però aplicant-la en valor absolut:

$$\cos a = \left| \frac{v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{w_1^2 + w_2^2 + w_3^2}} \right|$$

- **Angle de dos plans** (pla $p: ax + by + cz = d$, pla $p': mx + ny + pz = q$)

És el menor dels angles que formen dos vectors perpendiculars als plans. Per tant, es calcula com en el cas anterior, però utilitzant els vectors (a, b, c) i (m, n, p) :

$$\cos a = \left| \frac{am + bn + cp}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} \right|$$

- **Angle d'una recta i un pla**

És defineix de forma una mica diferent: És el complementari del menor dels angles formats per un vector de la recta i un vector perpendicular al pla (**angle vermell**). Per tant, s'aplica la fórmula:

$$\sin a = \left| \frac{v_1 a + v_2 b + v_3 c}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \right|$$

