

Mètode de Gauss - Jordan del càlcul de la inversa d'una matriu

Calculem la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Partim de la matriu formada per la matriu A i la matriu identitat de ordre 3

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Farem que els elements de la primera columna $a_{21}=2$ i $a_{31}=3$ siguin zeros a partir de $a_{11}=2$:

Transformacions elementals a fer:

- Canviar la fila 2a pel resultat de restar la fila 2a menys la fila 1a : $f_2 \rightarrow f_2 - f_1$. Observa que per aconseguir zero, com $a_{21}=a_{11}$, n'hi ha prou amb restar les files 2a i 1a.
- Canviar la fila 3a pel resultat de restar 2 vegades la fila 3a menys 3 vegades la fila 1a : $f_3 \rightarrow 2f_3 - 3f_1$
Observa que el que fem és : $f_3 \rightarrow a_{11}f_3 - a_{31}f_1$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \rightarrow f_2 - f_1 \\ f_3 \rightarrow 2f_3 - 3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Farem que els elements de la segona columna $a_{12}=-2$ i $a_{32}=2$ siguin zeros a partir de $a_{22}=3$:

Transformacions elementals:

- Canviar la fila 1a pel resultat de sumar 3 vegades la fila 1a més 2 vegades la fila 2a : $f_1 \rightarrow 3f_1 + 2f_2$
Observa que el que fem és : $f_1 \rightarrow a_{22}f_1 - a_{12}f_2$
- Canviar la fila 3a pel resultat de restar 3 vegades la fila 3a menys 2 vegades la fila 2a : $f_3 \rightarrow 3f_3 - 2f_2$
Observa que el que fem és : $f_3 \rightarrow a_{22}f_3 - a_{32}f_2$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow 3f_1 + 2f_2 \\ f_3 \rightarrow 3f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Farem que els elements de la tercera columna $a_{13}=2$ i $a_{23}=-2$ siguin zeros a partir de $a_{33}=-2$:

Transformacions elementals que hem de fer:

- Canviar la fila 1a pel resultat de sumar la fila 1a més la fila 3a : $f_1 \rightarrow f_1 + f_3$
- Canviar la fila 2a pel resultat de restar la fila 2a menys la fila 3a : $f_2 \rightarrow f_2 - f_3$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow f_1 + f_3 \\ f_2 \rightarrow f_2 - f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Finalment farem que els elements de la diagonal siguin tots igual a 1:

Transformacions elementals que hem de fer:

- Canviar la fila 1a pel resultat de dividir la fila 1a per 6 : $f_1 \rightarrow 1/6 f_1$
- Canviar la fila 2a pel resultat de dividir la fila 2a per 3 : $f_2 \rightarrow 1/3 f_2$
- Canviar la fila 3a pel resultat de dividir la fila 3a per -2 : $f_3 \rightarrow -1/2 f_3$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow \frac{1}{6}f_1 \\ f_2 \rightarrow \frac{1}{3}f_2 \\ f_3 \rightarrow \frac{-1}{2}f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Per tant la matriu inversa de A és $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$

Ara justificarem aquest mètode

Calcular la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ és trobar una matriu $B = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}$ que

cumpleix $A \cdot B = I$, o sigui $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Si fem el producte d'aquestes dues matrius tindrem els tres sistemes d'equacions següents:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2y_1 - 2y_2 + 2y_3 = 0 \\ 2y_1 + y_2 = 1 \\ 3y_1 - 2y_2 + 2y_3 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2z_1 - 2z_2 + 2z_3 = 0 \\ 2z_1 + z_2 = 0 \\ 3z_1 - 2z_2 + 2z_3 = 1 \end{cases}$$

Fixeu-vos que els coeficients de les incògnites en tots tres sistemes són els mateixos i se diferencien en els termes independents

Quan utilitzem el mètode de Gaus-Jordan per resoldre aquests sistemes les operacions amb les tres primeres columnes són les mateixes en tots tres sistemes i, per tant, no hem de repetir-les. Fixeu-vos en les operacions amb els termes independents de cada sistema:

Per al **primer** sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow f_1 + 2f_2 \\ f_2 \rightarrow f_2 - f_1 \\ f_3 \rightarrow 2f_3 - 3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow 3f_1 + 2f_2 \\ f_3 \rightarrow 3f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -7 \end{pmatrix} \dots \text{etc.}$$

Per al **segon** sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow f_1 + 2f_2 \\ f_2 \rightarrow f_2 - f_1 \\ f_3 \rightarrow 2f_3 - 3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow 3f_1 + 2f_2 \\ f_3 \rightarrow 3f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \dots \text{etc.}$$

Per al **tercer** sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow f_1 + 2f_2 \\ f_2 \rightarrow f_2 - f_1 \\ f_3 \rightarrow 2f_3 - 3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow 3f_1 + 2f_2 \\ f_3 \rightarrow 3f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix} \dots \text{etc.}$$

Per tant, ja que fem les mateixes operacions, resulta més adient resoldre tots tres sistemes a la vegada. És per això que col·loquem a la dreta de la matriu A la matriu identitat (termes independents, per columnes, dels tres sistemes):

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{pmatrix} \dots \text{etc}$$

Tema de matrius:

Trobeu la matriu inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 \\ -1 & 4 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

Una vegada que hem fet que els elements de la primera columna a_{21} i a_{31} siguin zeros i hem obtingut

la matriu $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, podem continuar les transformacions elementals treballant amb

números enters (sense recórrer a les fraccions).

Farem que els elements de la segona columna a_{12} i a_{32} siguin zeros a partir de a_{22} :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow 3f_1 + f_2 \\ f_3 \rightarrow 3f_3 - 2f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Farem que els elements de la tercera columna a_{13} i a_{23} siguin zeros a partir de a_{33} :

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 12 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 6 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow f_1 + 2f_3 \\ f_2 \rightarrow f_2 + f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -2 & -8 \end{pmatrix}$$

Finalment farem que els elements de la diagonal siguin tots igual a 1:

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 6 & -3 & -12 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & 3 & -2 & -8 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow \frac{1}{3}f_1 \\ f_2 \rightarrow \frac{1}{3}f_2 \\ f_3 \rightarrow -\frac{1}{6}f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$$

Per tant la matriu inversa de A és $A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -4 \\ 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} \end{pmatrix}$

Calculeu la inversa de la matriu $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.

Partim de la matriu formada per la matriu A seguit de la matriu identitat de ordre 3

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Farem que els elements de la primera columna a_{21} i a_{31} siguin zeros a partir de a_{11} :

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \rightarrow 7f_2 - 2f_1 \\ f_3 \rightarrow 2f_3 + 3f_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -4 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & -20 & 20 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$$

Per aconseguir-ho hem substituït:

- la fila 2a pel resultat de sumar la fila segona per $a_{11}=7$ menys la primera per $a_{21}=2$, o sigui: $f_2 \rightarrow 7f_2 - 2f_1$
- la fila 3a pel resultat de sumar la fila tercera per $a_{11}=7$ menys la primera per $a_{31}=-3$, o sigui: $f_3 \rightarrow 2f_3 + 3f_1$

En la matriu resultat farem que els elements de la segona columna $a_{12} = -2$ i $a_{32} = -20$ siguin zeros a partir de $a_{22}=11$

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & -4 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & -20 & 20 & 3 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow 11f_1 + 2f_2 \\ f_3 \rightarrow 11f_3 + 20f_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 77 & 0 & 14 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & 11 & -4 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & -7 & 140 & 77 \end{pmatrix}$$

Per aconseguir-ho hem substituït:

- la fila 1a pel resultat de sumar la fila primera per $a_{22}=11$ menys la segona per $a_{12}=-2$ o sigui: $f_1 \rightarrow 11f_1 + 2f_2$
- la fila 3a pel resultat de sumar la fila tercera per $a_{22}=11$ menys la segona per $a_{32}=-20$, o sigui: $f_3 \rightarrow 11f_3 + 20f_2$

En la matriu resultat farem que els elements de la tercera columna $a_{23} = -4$ i $a_{13} = 14$ siguin zeros a partir de $a_{32}=140$

$$\begin{pmatrix} 77 & 0 & 14 & 7 & 14 & 0 \\ 0 & 11 & -4 & -2 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 140 & -7 & 140 & 77 \end{pmatrix} \begin{matrix} f_1 \rightarrow 10f_1 - f_3 \\ f_2 \rightarrow 35f_2 + f_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 770 & 0 & 0 & 77 & 0 & -77 \\ 0 & 385 & 0 & -77 & 385 & 77 \\ 0 & 0 & 140 & -7 & 140 & 77 \end{pmatrix}$$

Per aconseguir-ho hem substituït:

- la fila 1a pel resultat de sumar la fila primera per 10 menys la tercera (ja que $a_{32}=140$ és igual a $10 \cdot a_{13}$ que val 14), o sigui: $f_1 \rightarrow 10f_1 - f_3$
- la fila 2a pel resultat de sumar la fila segona per 35 més la tercera (ja que $a_{32}=140$ és igual a $-35 \cdot a_{23}$ que val -4), o sigui: $f_2 \rightarrow 35f_2 + f_3$

Ara falta dividir: la fila 1a per 770, la fila 2a per 385 i la fila 3a per 140

$$\begin{aligned} f_1 &\rightarrow \frac{1}{770} f_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \end{pmatrix} \\ f_2 &\rightarrow \frac{1}{385} f_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{10} & 1 & \frac{2}{10} \end{pmatrix} \\ f_3 &\rightarrow \frac{1}{140} f_3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{20} & 1 & \frac{11}{20} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

I la matriu inversa és :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & 1 & \frac{2}{10} \\ -\frac{1}{20} & 1 & \frac{11}{20} \end{pmatrix}$$

Podem comprovar aquest resultat:

$$\begin{pmatrix} 7 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{10} \\ -\frac{2}{10} & 1 & \frac{2}{10} \\ -\frac{1}{20} & 1 & \frac{11}{20} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Determineu, segons els valors de m, el rang de les matrius

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-m & 0 & 2+m \\ 0 & 0 & m^2-4 & 2-m \end{pmatrix} \text{ i } B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & m & 2 \\ m & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$$

Rang d'A:

La matriu A està esglaonada i per tant, per calcular el seu rang hem de contar les files no nul·les que en té.

Els elements a_{22} i a_{33} depenen de m i per tant hem d'esbrinar per quins valors de m aquests són diferents de zero

$$\begin{cases} a_{22} = 2 - m = 0 \Rightarrow m = 2 \\ a_{33} = m^2 - 4 = 0 \Rightarrow m = \pm 2 \end{cases}$$

Tenim tres casos:

- Si $m \neq 2$ i $m \neq -2$ el rang de A és 3 (tres files no nul·les)
- Si $m=2$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-m & 0 & 2+m \\ 0 & 0 & m^2-4 & 2-m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ el rang d'A és 2
- Si $m=-2$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-m & 0 & 2+m \\ 0 & 0 & m^2-4 & 2-m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$ el rang d'A és 3

Rang d'B (mitjançant Gauss):

Per calcular el rang de la matriu B hem d'esglaonar-la (mètode de Gauss)

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & m & 2 \\ m & 0 & 1 & m \end{pmatrix} \begin{matrix} f_2 \rightarrow f_2 - f_1 \\ f_3 \rightarrow f_3 - mf_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & -2m & 1-m^2 & -2m \end{pmatrix} \begin{matrix} f_3 \rightarrow f_3 - 2mf_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Una vegada la matriu B està esglaonada hem de contar les files no nul·les que en té.

L'element a_{33} depenen d' m i per tant hem d'esbrinar per quins valors d' m aquest és diferent de zero

$$a_{33} = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow m = \pm 1$$

Tenim tres casos:

- Si $m \neq 1$ i $m \neq -1$ el rang de B és 3 (tres files no nul·les)
- Si $m=1$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ el rang d'B és 2
- Si $m=-1$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1-m^2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ el rang d'B és 2

Rang d'B (mitjançant determinants):

En $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m & 3 \\ 1 & 1 & m & 2 \\ m & 0 & 1 & m \end{pmatrix}$ tenim l'element $a_{11}=1 \neq 0$ i per tant $\text{rang}(B) \geq 1$

Orlem aquest element amb la fila 2a i columna 2a. El menor que resulta $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1$ i per tant $\text{rang}(B) \geq 2$

Podem orlar aquest menor de dues formes:

- Amb la fila 3a i columna 3a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & m \\ 1 & 1 & m \\ m & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 2m^2 - m^2 - 2 = m^2 - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -1 \\ 1 \end{cases}$
 - o Si $m \neq 1$ i $m \neq -1$ el rang de B és 3 (determinant no nul)
- Amb la fila 3a i columna 4a $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ m & 0 & m \end{vmatrix} = m + 4m - 3m - 2m = 0$ per qualsevol valor d' m

Per tant

Si $m \neq 1$ i $m \neq -1$ el rang de B és 3 i

Si $m=1$ o $m=-1$ el rang de B és 2