

1. **Calculeu la derivada de les següents funcions:**

a) $f(x) = x^3 - 3x$
 $f'(x) = 3x^2 - 3$

b) $f(x) = x^5 \cdot e^x$

Hem d'aplicar la fórmula per derivar un producte:

$$f'(x) = (x^5)' \cdot e^x + x^5 \cdot (e^x)'$$

$$f'(x) = 5x^4 e^x + x^5 e^x = x^4 e^x (5 + x)$$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

Hem d'aplicar la fórmula per derivar l'arrel quadrada d'una funció

Recordeu:

Si $f(x) = \sqrt{u(x)}$ llavors $f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 1)'}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$$

d) $f(x) = \frac{2x - 1}{x - 1}$

Hem d'aplicar la fórmula per derivar un quocient:

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)' \cdot (x - 1) - (2x - 1) \cdot (x - 1)'}{(x - 1)^2} = \frac{2 \cdot (x - 1) - (2x - 1) \cdot 1}{(x - 1)^2} = \frac{2x - 2 - 2x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{-1}{(x - 1)^2}$$

Problemes de rectes tangents a una funció en un punt

2. Trobeu l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x)=x^2-3x+2$ en el punt de la funció d'abscissa -2

L'equació de la recta tangent en el punt $(a, f(a))$ és $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

Per trobar la recta tangent necessitem el seu pendent i les coordenades del punt quan $x=-2$.

Del punt sabem que la seva abscissa és $x=-2$, la segona coordenada del punt és $f(-2)$. Per tant : punt: $(-2, 12)$

El pendent de la recta tangent és $m=f'(-2)$

$$f'(x) = 2x - 3$$

$$f'(-2) = -7$$

Per tant l'equació de la recta tangent és: $y - 12 = -7(x - (-2))$

$$y - 12 = -7x - 14$$

També es podria expressar: $7x + y = -2$

3. Troba l'equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $f(x) = \frac{x}{x-4}$ en el punt de la funció d'abscissa 2.

De la mateixa forma que en l'exercici anterior, necessitem saber les coordenades del punt i el pendent

Punt: $(2, f(2))$, per tant $(2, -1)$

El pendent de la recta tangent és $m=f'(2)$

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (x-4) - x \cdot (x-4)'}{(x-4)^2} = \frac{x-4 - x \cdot 1}{(x-4)^2} = \frac{-4}{(x-4)^2}$$

$$f'(2) = \frac{-4}{4} = -1$$

Per tant l'equació de la recta tangent és: $y - (-1) = -1(x - 2)$

També es podria expressar com: $x + y = 1$

4. Calculeu els punts en els quals la recta tangent a la funció $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$

és paral·lela a la recta $y=x$, i trobeu l'equació de les rectes tangents en aquests punts.

Recordeu:

Dos rectes són tangents si tenen el mateix pendent.

El pendent d'una recta $y=mx+n$ és m

La recta $y=x$ té pendent 1

Per tant si volem que la recta tangent sigui paral·lela a aquesta recta, volem que el pendent de la recta tangent, $f'(x)$, sigui 1.

Calculem $f'(x)$

$$f'(x) = \frac{(x-2)' \cdot (x+2) - (x-2) \cdot (x+2)'}{(x+2)^2} = \frac{1 \cdot (x+2) - (x-2) \cdot 1}{(x+2)^2} = \frac{x+2 - x+2}{(x+2)^2} = \frac{4}{(x+2)^2}$$

Volem trobar en quins valors de x és compleix $f'(x) = 1$

Per tant hem de resoldre l'equació: $\frac{4}{(x+2)^2} = 1$

$$\frac{4}{(x+2)^2} = 1$$

$$4 = (x+2)^2$$

$$4 = x^2 + 4x + 4$$

$$0 = x^2 + 4x$$

$$0 = x(x+4)$$

Les solucions d'aquesta equació són 0 i -4

Per a $x=0$ el punt de la funció és (0,-1)

(per trobar la coordenada y substituïm 0 en la funció)

Recordem que el pendent és 1

Per tant, la recta tangent en aquest punt és: $y - (-1) = 1(x - 0)$

$$\text{O bé : } y + 1 = x$$

$$x - y = 1$$

Per a $x=-4$ el punt de la funció és (-4,3)

(per trobar la coordenada y substituïm -4 en la funció)

Recordem que el pendent és 1

Per tant, la recta tangent en aquest punt és: $y - 3 = 1(x - (-4))$

$$\text{O bé : } y - 3 = x + 4$$

$$x - y = -7$$