

- 1 Una persona va invertir 6 000 € comprant accions de dues empreses, A i B. Al cap d'un any, el valor de les accions de l'empresa A ha pujat un 5 % i, en canvi, el valor de les accions de l'empresa B ha baixat un 10 %. Tot i això, si vengués ara les accions guanyaria 150€. Determineu quants diners va invertir en accions de cada empresa. [2 punts]

Resolució:

Anomenant x , y als imports invertits en accions de les empreses A i B tenim:

$$\begin{cases} x + y = 6000 \\ 0.05x - 0.1y = 150 \end{cases}$$

Resolent pel mètode de Gauss:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6000 \\ 0.05 & -0.1 & 150 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 6000 \\ 0 & -0.15 & -150 \end{array} \right), \text{ d'on resulta } y = 1000; \quad x = 5000.$$

- 2 Trobeu els màxims i mínims relatius de la funció $f(x) = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3$.

[2 punts]

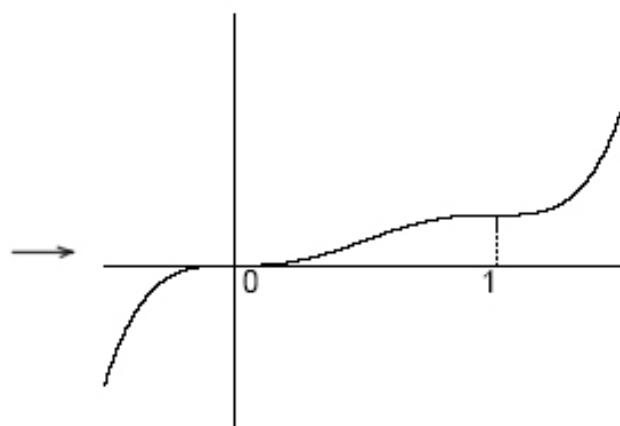
Resolució:

Resolem $f'(x) = 0$:

$$30x^4 - 60x^3 + 30x^2 = 0 \Leftrightarrow 30x^2(x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow 30x^2(x-1)^2 = 0.$$

Les arrels són $x = 0$; $x = 1$, cada una doble. Per classificar màxims i mínims, podem fer servir els signes de f' al voltant de cada un dels punts candidats a màxim o mínim. En aquest cas, com que $f'(x) = 30x^2(x-1)^2 \geq 0$ per a tot x , la funció és sempre creixent i, per tant, no hi ha ni màxims ni mínims. El criteri de la derivada segona també es pot fer servir: $f''(x) = 120x^3 - 180x^2 + 60x = 60x(2x^2 - 3x + 1)$. Tenim que $f''(0) = 0$ i $f''(1) = 0$. Per tant, hem de calcular la derivada tercera, $f'''(x) = 360x^2 - 360x + 60 = 60(6x^2 - 6x + 1)$. Tenim $f'''(0) \neq 0$ i $f'''(1) \neq 0$, en conseqüència, tant a $x = 0$ com a $x = 1$ no hi ha màxims i mínims sinó que hi ha punts d'inflexió.

No es demana la gràfica de la funció, però és



- 3 Indiqueu TOTS els productes de dues matrius diferents que es poden fer amb les matrius següents:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}.$$

Puntuació total: 2 punts.

Resolució:

Cal que el nombre de columnes de la primera matriu sigui igual al nombre de files de la segona, ja que es multipliquen files per columnes.

Per tant, són possibles els productes indicats amb Sí a la taula següent:

	A - 2x2	B - 3x2	C - 2x3	D - 2x1	E - 1x2
A - 2x2	(*)	A·B No	A·C Sí	A·D Sí	A·E No
B - 3x2	B·A Sí	(*)	B·C Sí	B·D Sí	B·E No
C - 2x3	C·A No	C·B Sí	(*)	C·D No	C·E No
D - 2x1	D·A No	D·B No	D·C No	(*)	D·E Sí
E - 1x2	E·A Sí	E·B No	E·C Sí	E·D Sí	(*)

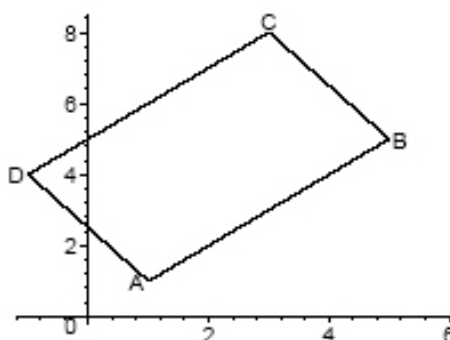
(*) Les matrius han de ser diferents

- 4 Escriviu un sistema d'inequacions lineals que doni com a zona solució l'interior del paral·lelogram que té vèrtexs A(1, 1), B(5, 5), C(3, 8), i D(-1, 4).

(2 punts)

Resolució:

El paral·lelogram és:



Les condicions seran:

Costat AB ; $y - 1 > x - 1$; $y - x > 0$.

Costat BC ; $y - 5 < -\frac{3}{2}(x - 5)$; $3x + 2y < 25$.

Costat CD ; $y - 4 < (x + 1)$; $y - x < 5$.

Costat DA ; $y - 1 > -\frac{3}{2}(x - 1)$; $3x + 2y > 5$.

- 5 Una empresa càrnia té dues plantes: l'escorxador i la sala d'especejament. L'empresa disposa de 10 xofers, 7 camions amb capacitat per a 7 tones de càrrega i 12 furgons amb capacitat per a 3 tones per a transportar carn de l'escorxador a la sala d'especejament. Cada dia s'han de transportar un mínim de 42 tones de carn. Se sap que el cost per viatge d'un camió és de 70 € i el cost per viatge d'un furgó és de 29 €.

- a) Quants camions i quants furgons es necessiten cada dia per a traslladar la carn de l'escorxador a la sala d'especejament, de manera que el cost sigui el mínim possible?
b) Quin és aquest cost?

(2 punts)

Resolució:**Apartat a**

Anomenem x el nombre de camions i y el nombre de furgons.

S'ha de plantejar el sistema d'inequacions lineals següent, amb les restriccions que presenta el problema:

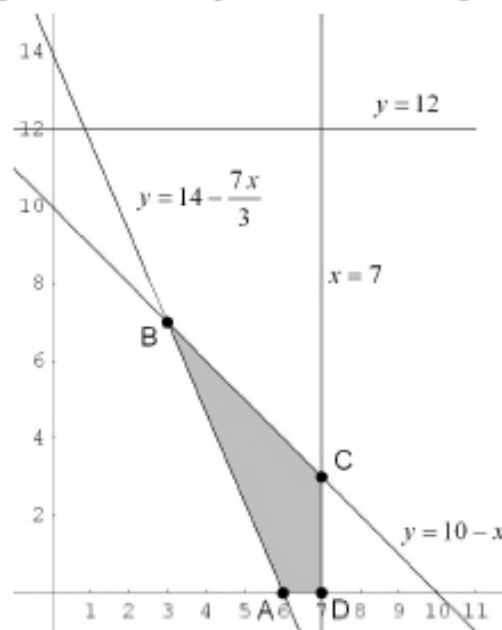
$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 7x + 3y \geq 42 \\ x \geq 0, \quad x \leq 7 \\ y \geq 0, \quad y \leq 12 \end{cases}$$

S'ha de resoldre aquest sistema d'inequacions i donar la regió factible.

De la primera inequació de [1] s'obté la restricció $y \leq 10 - x$.

De la segona inequació de [1] s'obté la restricció $y \geq 14 - \frac{7x}{3}$

Aleshores, la regió factible del problema és la següent:



S'han de calcular els vèrtexs de la regió factible.

A partir de la gràfica de la regió factible es veu que $A = (6, 0)$
i $D = (7, 0)$.

El vèrtex C és el punt d'intersecció entre les rectes $x = 7$ i
 $y = 10 - x$. Aleshores, $C = (7, 3)$.

El vèrtex B s'obté a partir de la solució del sistema
d'equacions

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ 7x + 3y = 42 \end{cases}$$

Es resol aquest sistema, per exemple, pel mètode de Gauss:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 7 & 3 & 42 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 \\ 0 & -4 & -28 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -4y &= -28 \rightarrow y = 7 \\ x + 7 &= 10 \rightarrow x = 3 \end{aligned}$$

Per tant, $B = (3, 7)$.

Es planteja la funció objectiu $f(x, y) = 70x + 29y$ a partir de l'enunciat del problema.

Finalment, s'ha de calcular el valor de la funció objectiu en cadascun dels vèrtexs de la regió factible i escollir el vèrtex que dona el valor màxim.

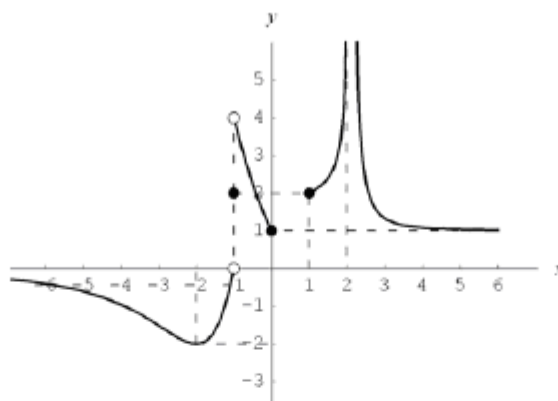
$$f(6, 0) = 420, f(3, 7) = 413, f(7, 3) = 577, f(7, 0) = 490.$$

La funció objectiu pren el valor mínim en el vèrtex B. Per tant, perquè el cost sigui mínim, haurà d'utilitzar 3 camions i 7 furgons.

Apartat b

· El cost és de 413 €.

6 Sigui f la funció que es representa en la figura



- indica un punt que pertany a la gràfica de la funció.
- indica un punt que no pertany a la gràfica de la funció.

Respongueu a les preguntes següents a partir de la informació que teniu en la gràfica:

- a) Determineu el domini i el recorregut de f .
- b) Calculeu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.
- c) Determineu les asímptotes de la funció.
- d) Determineu el valor de $f(-1)$. És contínua f en el punt $x = -1$? Raoneu la resposta.
- e) Digueu si el pendent de la recta tangent a f en el punt $x = -4$ és positiu, negatiu o zero. Raoneu la resposta.
- f) Té algun extrem relatiu f en l'interval $(-\infty, -1)$? En cas afirmatiu, digueu quin és aquest extrem i si es tracta d'un màxim o un mínim.
- g) Determineu els intervals de creixement i decreixement de la funció.

(2 punts)

Resolució:

Apartat a

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -1) \cup \{-1\} \cup (-1, 0] \cup [1, 2) \cup (2, +\infty) = (-\infty, 0] \cup [1, 2) \cup (2, +\infty).$$

$$\text{Rec}(f) = [-2, 0) \cup [1, +\infty).$$

Apartat b

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 4.$$

Apartat c

f té una asímptota vertical en $x = 2$.

f té una asímptota horitzontal en $y = 0$ i una altra en $y = 1$.

Apartat d

$$f(-1) = 2.$$

La funció no és contínua en $x = -1$, ja que $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

Apartat e

El pendent de la recta tangent a f en el punt $x = -4$ és negatiu, ja que f és decreixent en aquest punt i la recta tangent a f en aquest punt no és horitzontal.

Apartat f

f té un mínim relatiu en el punt $x = -2$.

Apartat g

f és decreixent en l'interval $(-\infty, -2) \cup (-1, 0) \cup (2, +\infty)$.

f és creixent en l'interval $(-2, -1) \cup (1, 2)$.