

PAU - Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials - Solucionari quinzena 5

- 2 El benefici $B(x)$ (expressat en milers d'euros) que obté una empresa per la venda de x unitats d'un determinat producte és representat per la funció:

$$B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \quad \text{per a} \quad 50 \leq x \leq 250.$$

- a) Si ha venut 110 unitats, quin benefici ha obtingut?
- b) Quantes unitats pot haver venut si el benefici obtingut ha estat de 3.900 milers d'euros?
- c) Quantes unitats ha de vendre per tal que el benefici sigui màxim? Quin és aquest benefici màxim?
- d) Quina quantitat d'unitats ha de vendre per no tenir pèrdues?

Puntuació per cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.

Resolució:

- a) $B(110) = 4800$ milers d'euros. (Es pot calcular per Ruffini o bé substituint x per 100)
- b) Si $B(x) = 3900$ resulta l'equació: $3900 = -x^2 + 300x - 16100$ o de forma equivalent $x^2 - 300x + 20000 = 0$, d'on resulten $x_1 = 200$ i $x_2 = 100$. Per tant pot haver venut 100 o 200 unitats de producte.
- c) Per obtenir el benefici màxim hem d'igualar a 0 la derivada de $B(x)$ que representa una paràbola amb un vèrtex amb màxim. Tenim $B'(x) = -2x + 300$. Per tant el màxim s'obté per $x_M = 150$, valor pel qual el benefici és $B(150) = 6400$ milers d'euros.
- d) Per no tenir pèrdues cal que $B(x) = -x^2 + 300x - 16100 \geq 0$. Resolent la igualtat obtenim els extrems del segment on $B(x) \geq 0$. Aquests són:

$$x = 150 \pm \sqrt{22500 - 16100} = \begin{cases} 230 \\ 70 \end{cases}.$$

Per tant no tindrà pèrdues per $70 \leq x \leq 230$.

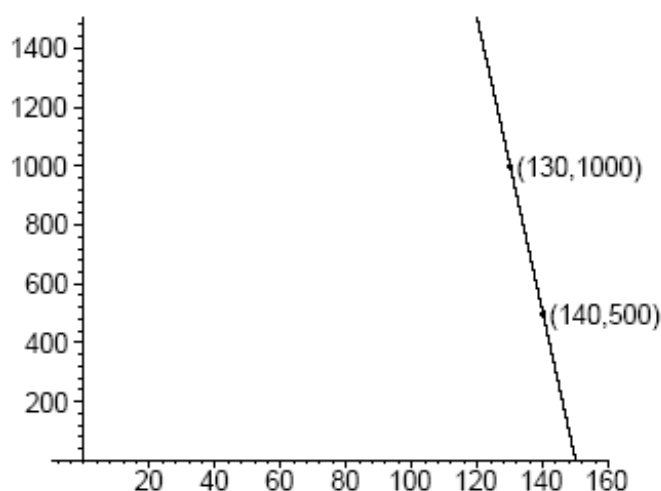
PAU - Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials - Solucionari quinzena 5

- 3 Si una joguina es ven a 130 €, la compren 1000 persones. Per cada euro que augmenta aquest preu, disminueix en 50, respectivament, el nombre de compradors.
- Feu un gràfic del nombre de joguines que es venen en funció del preu de venda i doneu la fórmula que l'expressa.
 - El preu de cost d'una joguina és de 80 €. Calculeu el preu p , que dona un benefici total màxim.
 - Trobeu el nombre de joguines que es venen si el preu és p i calculeu-ne el benefici màxim.

Puntuació: apartat a) 2 punts; apartat b) 1 punt; apartat c) 1 punt. Total: 4 punts.

Resolució:

- a) Gràfica del nombre de joguines que es venen en funció del preu:



L'equació de la gràfica serà: $v(p) = 1000 - 50(p - 130) = -50p + 7500$.

- b) El benefici total serà el nombre de joguines venudes $v(p)$ multiplicat pel benefici en cada una que és $p - 80$. Per tant la funció benefici total en termes del preu de venda serà:

$$B(p) = v(p) \cdot (p - 80) = (7500 - 50p)(p - 80) = -50p^2 + 11500p - 600000.$$

La gràfica d'aquesta funció és una paràbola amb un màxim en el seu vèrtex que correspon a

$$p = \frac{11500}{100} = 115 \text{ €}.$$

- c) El nombre de joguines venudes serà $v(115) = -50 \cdot 115 + 7500 = 1750$, i el benefici màxim

$$B(115) = (7500 - 50 \cdot 115)(115 - 80) = 1750 \cdot 35 = 61250 \text{ €}.$$

PAU - Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials - Solucionari quinzena 5

- 4 Disposem de material per poder impermeabilitzar 200 m^2 de superfície. Volem fer una bassa de base rectangular en què la llargada mesuri el triple que l'amplada i amb la profunditat adequada per gastar tot el material. Interessa que el volum d'aigua que càpiga a la bassa sigui màxim.
- Escriu la relació que hi ha entre l'altura i el costat petit de la base de la bassa.
 - Escriu la funció que dona la capacitat de la bassa en funció del costat petit de la base.
 - Calculeu les dimensions de la bassa perquè la capacitat sigui màxima. (Els resultats s'han de precisar fins als centímetres.)
 - Determineu-ne el volum.

Puntuació de cada apartat: 1 punt. Total: 4 punts.

Resolució:

- a) Anomenem x al costat petit de la base i y a la profunditat. La superfície total a impermeabilitzar és $S = 3x \cdot x + 2x \cdot y + 2 \cdot 3x \cdot y = 3x^2 + 8xy$, que ha de ser igual a 200. Per tant la relació demanada és $3x^2 + 8xy = 200$.

- b) El volum de la bassa, expressat en termes de x , serà

$$V = 3x \cdot x \cdot y = 3x^2 y = 3x \cdot \frac{200 - 3x^2}{8}.$$

- c) Per tal que la capacitat sigui màxima igulem la derivada a 0 per obtenir els extrems relatius. $V'(x) = \frac{3}{8}(200 - 9x^2)$, i igualant a 0 obtenim $x^2 = \frac{200}{9}$. Dels dos valors de x , únicament un és positiu i té sentit en el problema. Per tant,

$V(x)$ té un extrem relatiu per $x = \frac{10\sqrt{2}}{3} = 4,71 \text{ m}$. Es tracta d'un màxim ja que la funció és una paràbola amb vèrtex cap a munt (el signe del coeficient de x^2 és negatiu). Per tant és el valor buscat. El costat llarg serà

$$3x = 10\sqrt{2} = 14,14 \text{ m}, \text{ i la profunditat } y = \frac{200 - 3x^2}{8x} = \frac{200 - \frac{200}{3}}{\frac{80\sqrt{2}}{3}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} = 3,54 \text{ m}.$$

- d) Finalment el volum és $V = \frac{10\sqrt{2}}{3} \cdot 10\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{4} = \frac{500\sqrt{2}}{3} = 235,702 \text{ m}^3$.