

LES FRACCIONS

1. Introducció

Llegeix aquest fragment del llibre “L’home que calculava” de Malba Tahan, i contesta les preguntes que hi ha al final.

A les rodalies d’un antic i gairebé abandonat refugi de caravanes, vam veure tres homes que discutien apassionadament al costat d’un grup de camells [...]

Aleshores Beremiz va intentar informar-se sobre el tema en discussió.

- Som germans –va explicar el més gran dels homes– i hem rebut com a herència 35 camells. Segons la voluntat del meu pare em correspon la meitat dels animals; al meu germà Hamet Namir, la tercera part; i a Harim, el més jove, la novena part. Però no sabem com realitzar la divisió, i en cada intent de repartiment proposat, la paraula d’un de nosaltres va seguida de la negativa dels altres dos. [...] Si la meitat de 35 camells és 17 i mig, si la seva tercera part i també la novena part de la quantitat en qüestió, tampoc no són exactes, com procedir a la divisió?

- Molt fàcil –va dir l’home que calculava–. Em comprometo a realitzar amb equitat el repartiment, però abans m’han de permetre que ajunti els 35 camells heretats a aquest meravellós animal que fins aquí ens ha portat en bona hora.

Aquí vaig intervenir en la situació.

- Com puc aprovar semblant disbarat? Com podrem seguir amb el nostre viatge si perdem el camell?

- Que no et preocupi, bagdadí –va dir, en veu molt baixa, Beremiz–, conec molt bé el que estic a punt de fer. Presta’m el camell i veuràs a quina conclusió arribem.

[...]

- Amics –va dir–, vaig a fer la divisió dels que ara, com poden apreciar són 36 camells, de manera justa i exacta.

Es va tornar cap al més gran dels germans, i va parlar d’aquesta manera:

- Hauries de rebre, amic meu, la meitat dels 35 camells, o sigui, 17 i mig. Ara bé, rebràs la meitat de 36 i, per tant, seran 18. No tens cap reclamació a fer, ja que surts beneficiat en aquesta operació.

Es va dirigir al segon dels hereus i va dir:

- Tú, Hamet, hauries de rebre un terç de 35 animals, o sigui, onze i una mica més. Llavors tindràs un terç de 36, és a dir, 12. No hi haurà protestes, perquè tú també surts amb avantatge en aquesta divisió.

Per últim va dir al més jove:

- Tú, jove Harim, segons l'última indicació del teu pare, hauries de beneficiar-te amb una novena part de 35, és a dir, 3 camells i part d'un altre. Però et donaré la novena part de 36, o sigui 4. Serà també apreciable el teu avantatge i bé podries dir-me gràcies pel resultat.

Després va terminar la qüestió amb la més gran claredat:

- Per aquest generós repartiment que a tots ha ajudat, corresponen 18 camells al primer de vostès, 12 al segon i 4 al tercer, la suma de les quantitats dóna com a resultat $(18 + 12 + 4)$ 34 camells, i en sobren 2. Un d'ells, com bé saben, és propietat del bagdadí, el meu amic i company aquí present; i l'altre és lògic que em correspongui a mi, per haver solucionat, en forma satisfactòria, aquest enrevessat problema de l'herència.

Qüestions de comprensió lectora:

Per què discutien els tres homes?

Quin és el problema que tenen? Què té a veure aquest problema amb les matemàtiques?

Quina operació matemàtica creus que està més relacionada amb aquest problema?

Quina part de l'herència li correspon a cada germà?

Dels personatges de la història, quin creus que sap més matemàtiques? Què fa aquest personatge per resoldre el problema? Per què creus que ho fa?

Per què creus que afegint un camell a l'herència els comptes surten molt més clares?

Creus que és justa la solució d'aquest problema?

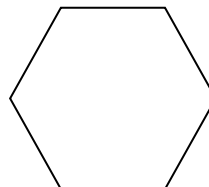
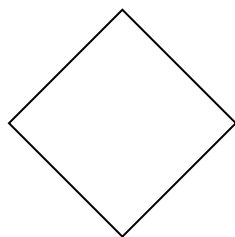
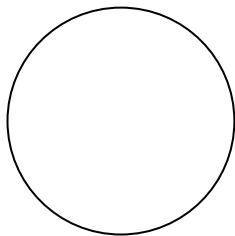
2. Visualitzant fraccions

A la vida quotidiana sovint fem servir el llenguatge matemàtic. De fet, segur que has sentit alguna vegada expressions com aquestes on apareixen fraccions:

- Posa'm un quart de pollastre.
- Els oceans ocupen quatre cinques parts de la Terra.
- La Carme i en Pau van assistir a un partit de futbol. Només es van omplir les tres quartes parts del camp i la meitat dels assistents el van abandonar abans que s'acabés el partit.
- La sisena part dels alumnes d'aquesta classe duu ulleres.
-
-

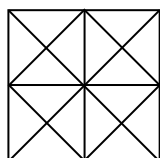
Els dos espais en blanc no són cap error: omple'ls tu amb un parell d'exemples propis.

Exercici 1. Representa les fraccions de les expressions anteriors sobre aquestes figures:

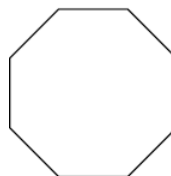


Exercici 2. Pinta la part que indica la fracció:

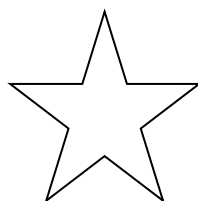
a) els $\frac{9}{16}$:



c) els $\frac{5}{8}$:



b) els $\frac{3}{10}$:

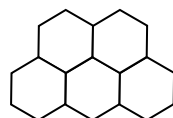


d) els $\frac{2}{7}$:

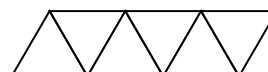


Exercici 3. Reconstrueix la figura completa si la figura representa:

a) els $\frac{5}{7}$ del total:



d) els $\frac{3}{4}$ del total:



b) els $\frac{4}{5}$ del total:



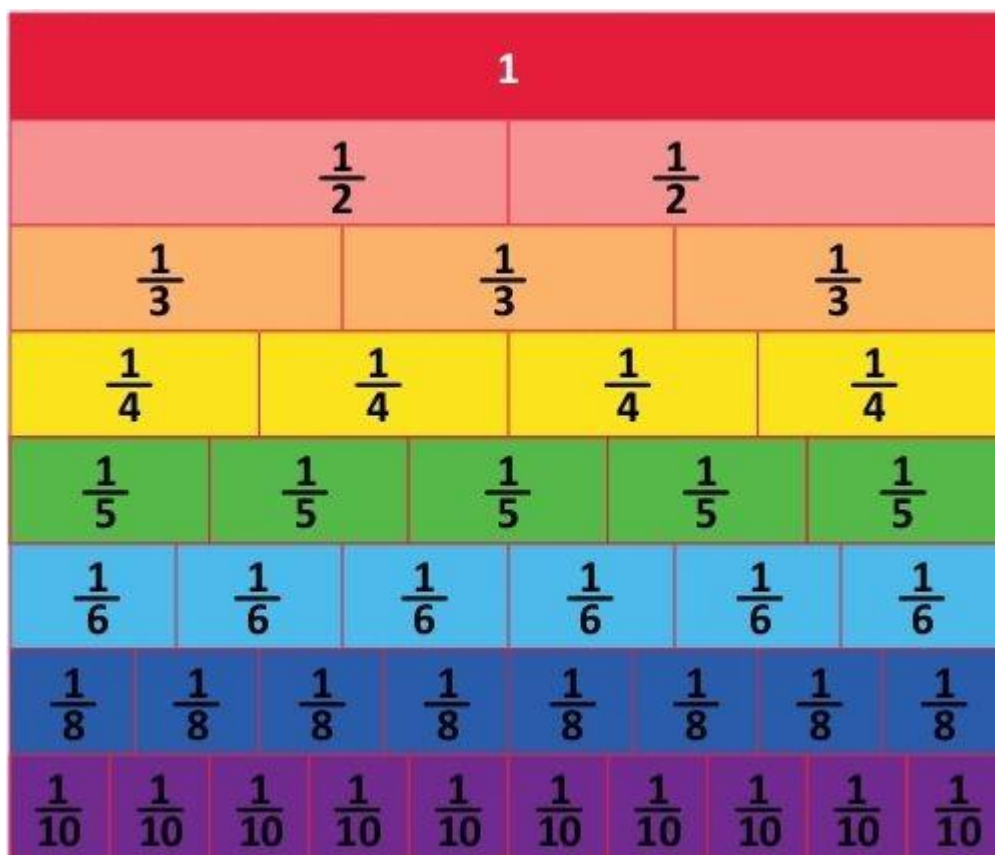
c) els $\frac{6}{10}$ del total:



3. Fraccions de la unitat

3.1. Construcció d'un quadre de fraccions

Material necessari: quadre de fraccions imprés i tisores. L'objectiu és manipular les fraccions d'un quadre com aquest:



Retalla totes les fraccions unitàries del quadre que et donarà el professor

3.2. Denominador de la fracció

Cada peça de $\frac{1}{2}$ l'anomenarem "meitat". Quin nom donarem a les altres peces? Copieu a la **llibreta** i empleueu el quadre següent:

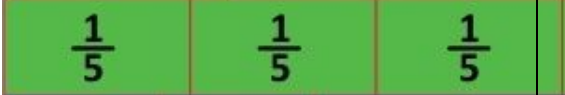
Peça	Nom	Peça	Nom
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$	
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8}$	
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{10}$	

Dels dos números que formen la fracció (el de dalt i el de baix), quin és el que dona nom a les peces? “*Donar nom*” és el mateix que “*denominar*”, per això aquest número s’anomena “denominador” de la fracció.

Copia i completa a la **llibreta** la frase: “El número responsable de donar nom a les peces és el (de baix / de dalt), i per això aquest número s’anomena “denominador de la fracció”

3.3. Numerador de la fracció

Ara agruparem algunes de les peces que hem obtingut. Copia a la **llibreta** la següent taula, i completa les files que falten.

	Enganxa les peces en aquesta columna	Fracció amb números	Fracció amb paraules
3 peces de $\frac{1}{5}$		$\frac{3}{5}$	tres cinquens
2 peces de $\frac{1}{10}$			
3 peces de $\frac{1}{8}$			

Dels dos termes de la fracció (el de dalt i el de baix), quin és el que indica el número de peces que juntem?

A aquest terme, és clar, l'anomenarem “**numerador**”.

3.4. Com s'ordenen les fraccions? Com podem saber si una fracció és més gran que una altra?

Ordena de major a menor aquestes fraccions: $\frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{9}{10}, \frac{8}{10}, \frac{6}{10}, \frac{7}{10}$. Explica en què t'has fixat per fer-ho.

Ara ordena de major a menor aquestes altres fraccions: $\frac{3}{5}, \frac{3}{8}, \frac{3}{10}, \frac{3}{5}, \frac{3}{3}, \frac{3}{6}$. I explica també en què t'has fixat per fer-ho.

Acabes de treballar l'ordenació en els dos cassos més senzills. Ara anirem complicant més la cosa.

Escriu cinc fraccions que siguin més petites que $\frac{1}{2}$ i altres cinc més grans que $\frac{1}{2}$.

Explica en què t'has fixat per saber si una fracció és més petita o més gran que $\frac{1}{2}$.

Ara escriu cinc fraccions que siguin més petites que $\frac{2}{3}$ i altres cinc més grans que $\frac{2}{3}$.

Classifica aquestes fraccions $\frac{4}{7}, \frac{1}{7}, \frac{8}{9}, \frac{6}{5}, \frac{4}{9}, \frac{3}{7}, \frac{5}{12}, \frac{2}{12}, \frac{9}{4}, \frac{7}{6}, \frac{9}{11}, \frac{6}{11}, \frac{5}{13}, \frac{8}{13}, \frac{2}{13}, \frac{6}{12}$ en cinc grups, i explica el criteri que has seguit:

- a) les fraccions pròximes a 0
- b) les fraccions pròximes a $\frac{1}{2}$ però més petites que $\frac{1}{2}$
- c) les fraccions pròximes a $\frac{1}{2}$ però més grans que $\frac{1}{2}$
- d) les fraccions pròximes a 1
- e) i les fraccions majors que 1

3.5. Ara descobrirem que una mateixa part de la unitat pot ser expressada de maneres diferents!

Agafa la peça de $\frac{1}{2}$, fixat que si juntem dues peces de $\frac{1}{4}$ obtenim la mateixa longitud.

Fes tú el mateix amb vuitens i decens, i completa a la **llibreta** una taula com la que tens a continuació.

	Peces que fan la mateixa longitud que $\frac{1}{2}$		Fracció equivalent a $\frac{1}{2}$	
			amb números	Amb paraules
quarts			$\frac{2}{4}$	
vuitens				
decens				

Totes les fraccions que heu trobat corresponen a la mateixa longitud. S'anomenen “equivalents” i, malgrat que sigui un abús de notació, les relacionarem amb el signe d'igualtat. Així podrem escriure (completeu a la **llibreta**):

$$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{4} = \frac{\quad}{8} = \frac{5}{\quad}$$

Numèricament, es pot comprovar si dues fraccions són equivalents multiplicant en creu, és a dir, multipliquem el numerador d'una pel denominador de l'altra, i si dóna el mateix en tots dos casos és que són equivalents.

$$\frac{3}{4} \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \frac{6}{8} = \begin{array}{l} 3 \times 8 = 24 \\ 4 \times 6 = 24 \end{array}$$

Per obtenir fraccions equivalents a una fracció, el que podem fer és multiplicar o dividir numerador i denominador pel mateix nombre.

$$\frac{8}{12} \begin{array}{c} \times 3 \\ \times 3 \end{array} = \frac{24}{36}$$

$$\frac{8}{12} \begin{array}{c} :2 \\ :2 \end{array} = \frac{4}{6}$$

Escriu a la **llibreta** altres exemples de fraccions equivalents, i explica en cada cas com saps que són equivalents.

3.6. Ara sumarem fraccions

Ajunteu una peça de $\frac{1}{2}$ i una peça de $\frac{1}{3}$ i intenteu veure si amb peces de $\frac{1}{4}$ podeu aconseguir “mesurar” la mateixa longitud total. Ho aconseguíu?

I si utilitzem peces de $\frac{1}{5}$ per “mesurar” la longitud total?

I si utilitzem peces de $\frac{1}{6}$ per “mesurar” la longitud total? Ho aconseguíu ara? Quantes

peces ens calen? Quina és la fracció suma de $\frac{1}{2}$ i $\frac{1}{3}$?

Així doncs, per sumar dues fraccions, primer les hem d’escriure prenent una peça que pugui “mesurar” l’una i l’altra exactament, en definitiva hem de poder expressar-les amb el mateix denominador.

Completa a la **llibreta** la suma que acabem de fer, pegant les peces amb cola i escrivint amb números la fracció resultat al final del tot.

$$\begin{array}{c}
 \text{[Red bar with } \frac{1}{2} \text{]} + \text{[Orange bar with } \frac{1}{3} \text{]} = \\
 = \text{[Three blue bars with } \frac{1}{6} \text{ each]} + \text{[Orange bar with } \frac{1}{3} \text{]} = \text{---}
 \end{array}$$

Emprant les equivalències de fraccions, feu les següents sumes a la **llibreta**:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{5} =$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{5} =$$

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{4} + \frac{5}{8} =$$

3.7. I ara restem fraccions

Prenem una peça de $\frac{1}{2}$ i li restem una peça de $\frac{1}{3}$. Ara no les hem de posar seguides.

Com les hem de posar? Enganxeu-les a la **llibreta**! Amb quina peça podem mesurar la part que queda entre la peça de $\frac{1}{2}$ i la peça de $\frac{1}{3}$?

Observeu que la peça de $\frac{1}{6}$ pot “mesurar” exactament tant la peça de $\frac{1}{2}$ com la de $\frac{1}{3}$.

Completeu a la **llibreta**:

$$\frac{1}{3} = \frac{\quad}{6} \qquad \frac{1}{2} = \frac{\quad}{6} \qquad \text{i per tant } \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{\quad}{6} - \frac{\quad}{6} = -$$

Així doncs, per restar dues fraccions, primer les hem d’escriure prenent una peça que pugui “mesurar” l’una i l’altra exactament, en definitiva hem de poder expressar-les amb el *denominador comú*

Emprant les equivalències de fraccions, feu les següents restes a la **llibreta**:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{5} =$$

$$\frac{1}{2} - \frac{2}{5} =$$

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} =$$

$$\frac{1}{4} - \frac{5}{8} =$$

3.8. Multiplicació i divisió de fraccions

La multiplicació de fraccions es pot interpretar com fer la fracció d’un altra fracció. Per exemple, quina part de la unitat representa la meitat de la tercera part?

Si et fixes en el quadre de fraccions de la unitat, la meitat de la tercera part “mesura” el mateix que la sisena part



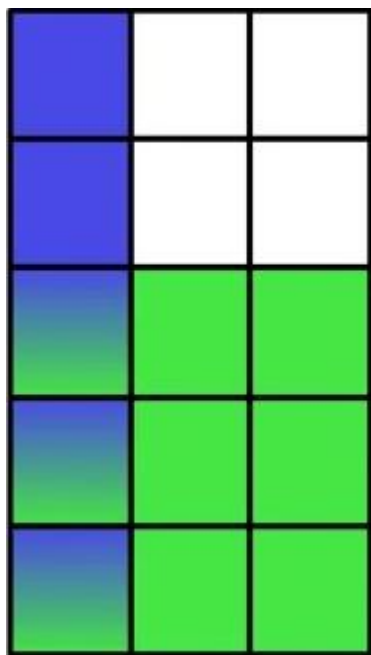
Per tant, podem escriure:

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

D'aquesta manera, podem calcular alguns exemples més, però és molt més pràctic si canviem de representació.

Per exemple, podem representar la unitat com un rectangle, i dividir-lo en tantes files com indiqui el denominador de una de les fraccions a multiplicar, i tantes columnes com indiqui l'altre denominador.

Així, si volem multiplicar tres cinquens per un terç, es pot representar de la següent manera:



Si dividim el rectangle en tres columnes, cadascuna representa un terç del total, i per representar les tres cinquenes parts d'aquest terç, dividim la columna blava en cinc parts iguals i agafem tres, el resultat seran els tres quadradets pintats de verd i blau.

Quin és el resultat, llavors, de fer tres cinquenes parts d'un terç de rectangle?

$$\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} = \frac{?}{?}$$

Practica aquesta manera de representar multiplicacions de fraccions a la teva **llibreta** amb les següents multiplicacions:

$$\frac{3}{7} \times \frac{2}{3} = \frac{?}{?} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{5}{7} = \frac{?}{?}$$

Quina creus que és la regla numèrica per multiplicar fraccions?

I quant a la divisió? Quina és la regla numèrica per dividir fraccions? Investiga i posa alguns exemples de divisions de fraccions a la teva **llibreta**.

4. Fraccions al tangram

Si observem les peces del tangram podem veure que, per exemple, el triangle mitjà (m) és la meitat del triangle gran (g).



Tenint present que:

t: taulell quadrat

g: triangle gran

m: triangle mitjà

p: triangle petit

q: quadrat

r: romboide

completa la taula següent:

	t	g	m	p	r	q
t	1					
g						
m		1/2				
p						
r						
q						

Raona les següents qüestions:

- Què signifiquen els 1 que apareixen a la taula?
- Quantes fraccions utilitzem per relacionar dues peces? Per què?
- Com són les fraccions que relacionen dues peces qualssevol?

Fraccions majors i menors que la unitat:

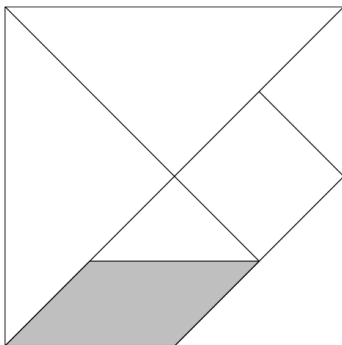
- Quan un objecte es mesura sobre ell mateix fa una unitat.

- Les mesures d'objectes més grans que la unitat són fraccions que 1.
- Les mesures d'objectes més petits que la unitat són fraccions que 1.

Practica una mica:

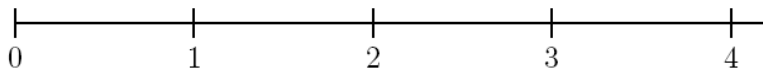
- $q + p = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} =$
- $3g - m = \frac{3}{4} - \frac{1}{8} =$
- $g + 3r =$
- $3q - 3p =$
- $m + r - 4p =$
- $\frac{2}{4} + 5 \cdot \frac{1}{8} =$
- $5 + \frac{4}{5} =$

Si el taulell del tangram fa 12 x 12 cm, quant mesura l'àrea del romboide?

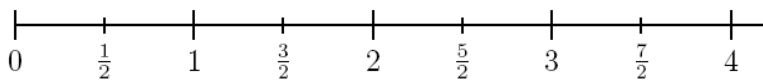


5. Representació de la recta numèrica

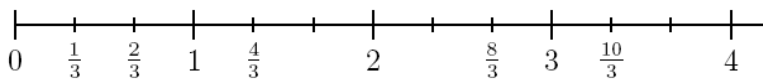
Si sobre una recta marques segments iguals



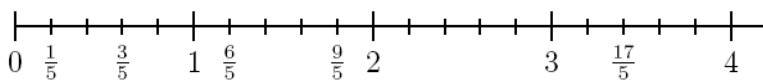
i cada segment el divideixes en trossets iguals, pots representar-hi fraccions com per exemple meitats:



o terços:



o cinquens:



Per tant, cada fracció està representada per un punt de la recta.

Observa que hi ha fraccions que són majors que la unitat. Quines són aquestes? Com pots distingir que una fracció és major que la unitat?

Poden haver-hi fraccions majors que 2? I que 3? Com es reconeixen? Posa'n exemples.