

10. Límits de funcions i continuïtat

EXERCICIS PROPOSATS

1. Exercici resolt.

2. Per cada funció, fes una taula de valors adequada per obtenir els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt[5]{5x-3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2}$

x	0,99	0,999	1,001	1,01
f(x)	0,5025126	0,50025013	0,49975012	0,49751244

 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$

x	6,99	6,999	7,001	7,01
f(x)	1,9993746	1,9999375	2,0000625	2,00062461

 $\lim_{x \rightarrow 7} \sqrt[5]{5x-3} = 2$

x	3,99	3,999	4,001	4,01
f(x)	3,9974984	3,99974998	4,00024998	4,00249844

 $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = 4$

x	-0,01	-0,001	0,001	0,01
f(x)	3,0009003	3,000009	3,000009	3,00090032

 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x} = 3$

x	1,99	1,999	2,001	2,01
f(x)	1,4000357	1,41279899	1,41562742	1,42832069

 $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2-2} = \sqrt{2}$

x	7,99	7,999	8,001	8,01
f(x)	11,994999	11,9995	12,0005	12,0049986

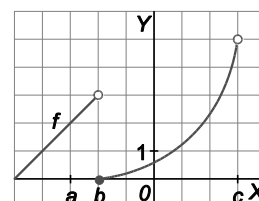
 $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x-8}{\sqrt[3]{x}-2} = 12$

3. Donada la funció de la figura, calcula, si és possible $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, els límits laterals i el límit de f a a , b i c .

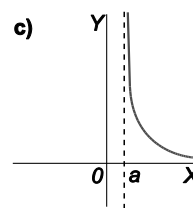
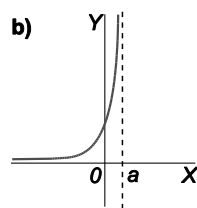
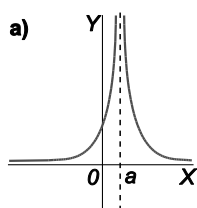
$f(a) = 2$, $f(b) = 0$ i $f(c)$ no existeix.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = 3, \quad \lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow b} f(x) \text{ no existeix,}$$

$$\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = 5, \quad \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \text{ no existeix i } \lim_{x \rightarrow c} f(x) \text{ no existeix.}$$



4. Troba $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ en aquestes funcions.



a) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ no existeix.

c) $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ no existeix, $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$.

5. Donats els límits següents, estima el seu valor utilitzant una taula de valors.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{(x+1)^4}$

e) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+1}{(5-x)^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x+2}{7-x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3}$

f) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

En tots els casos el denominador s'acosta a zero i el numerador no. Així doncs, la funció es farà molt gran en valors absoluts. Només hem de decidir quin signe tindrà.

a) Si x s'aproxima a 2 per la seva esquerra, el numerador és positiu i el denominador negatiu, per tant,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{x-2} = -\infty.$$

b) Si x s'aproxima a 7 per la seva esquerra, el numerador i el denominador són positius, per tant, $\lim_{x \rightarrow 7^-} \frac{x+2}{7-x} = +\infty$.

c) Si x s'aproxima a -1, tant per la seva esquerra com per la seva dreta, el numerador és negatiu i el denominador positiu, per tant, $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{(x+1)^4} = -\infty$.

d) Si x s'aproxima a 3 per la seva dreta, el numerador i el denominador són positius, per tant, $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x}{x-3} = +\infty$.

e) Si x s'aproxima a 5 per la seva dreta, el numerador és positiu i el denominador, negatiu, per tant,

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{x+1}{(5-x)^3} = -\infty.$$

f) Si x s'aproxima a 4, tant per l'esquerra com per la dreta, el numerador i el denominador són positius, per tant,

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty.$$

6. Exercici resolt.

7. Estima el valor dels límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+3x^2}{2x^3+8}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{3x-2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+7^x}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{6x^3+2x-3}$

- a) $\frac{x+1}{x^2+1} = \frac{\frac{x}{x^2} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}$, que, per exemple, per a $x=1000$ val $0,001000999 \approx 0$. Així, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2+1} = 0$.
- b) $\frac{5x+1}{3x-2} = \frac{\frac{5x}{x} + \frac{1}{x}}{\frac{3x}{x} - \frac{2}{x}} = \frac{5 + \frac{1}{x}}{3 - \frac{2}{x}}$, que, per exemple, per a $x=1000$ val $\frac{5,001}{2,998} \approx \frac{5}{3}$. Així, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x+1}{3x-2} = \frac{5}{3}$.
- c) Prenent $x=1000$ tenim $\frac{1}{1+7^{1000}} \approx \frac{1}{7^{1000}} \approx 0$. Així, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+7^x} = 0$.
- d) $\frac{3x^3+3x^2}{2x^3+8} = \frac{\frac{3x^3}{x^3} + \frac{3x^2}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3} + \frac{8}{x^3}} = \frac{3 + \frac{3}{x} + \frac{1}{x^3}}{2 + \frac{8}{x^3}}$, que, per exemple, per a $x=1000$ val $\frac{3,003000001}{2,000000008} \approx \frac{3}{2}$. Així, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3+3x^2}{2x^3+8} = \frac{3}{2}$.
- e) $\frac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1} = \frac{\frac{x^4}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{x^2}{x^3} + \frac{x}{x^3} + \frac{1}{x^3}} = \frac{x + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}}$, que, per exemple, per a $x=-1000$ val $\frac{-1000,000001001}{0,998998999} \approx -1000,000001 \approx -1000$, així, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4+x+1}{x^3+x^2+x+1} = -\infty$.
- f) $\frac{3x+1}{6x^3+2x-3} = \frac{\frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}}{\frac{x^3}{x^3} + \frac{2x}{x^3} - \frac{3}{x^3}} = \frac{\frac{3}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{1 + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}}$, que, per exemple, per a $x=-1000$ val, $\frac{-0,000003001}{0,999998003} \approx -0,000003001 \approx 0$, així, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x+1}{6x^3+2x-3} = 0$.

8. Estima els límits següents.

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-7}$
- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5+1}{3x^7-1}$
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3-2x}{7x^2+1}$
- e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^{-x}}{2}$
- f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{2^{-x}}$
- a) $\frac{2x}{x-7} = \frac{2}{1 - \frac{7}{x}}$, que, per exemple, per a $x=-1000$ val aproximadament 2, així $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x-7} = 2$.
- b) $\frac{2x^5+1}{3x^7-1} = \frac{\frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^7}}{3 - \frac{1}{x^7}}$, que, per exemple, per a $x=-1000$ val aproximadament 0, així, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^5+1}{3x^7-1} = 0$.
- c) $\frac{3^x}{2^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-x}$, que, per exemple, per a $x=-1000$ val aproximadament 0, així, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x}{2^x} = 0$.

- d) $\frac{x^3 - 2x}{7x^2 + 1} = \frac{x - \frac{2}{x}}{7 + \frac{1}{x^2}}$, que, per exemple, per a $x = 1000$ val aproximadament $\frac{1000}{7}$, així, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x}{7x^2 + 1} = +\infty$.
- e) $\frac{7^{-x}}{2} = \frac{1}{2 \cdot 7^x}$, que, per exemple, per a $x = 1000$ val aproximadament 0, així, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7^{-x}}{2} = 0$.
- f) $\frac{3^x}{2^{-x}} = 3^x \cdot 2^x = 6^x$, que, per exemple, per a $x = 1000$ val $6^{1000} \simeq 10^{750}$, així, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x}{2^{-x}} = +\infty$.

9. Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ en els casos següents.

a) $f(x) = \frac{x-2}{x+2}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$ c) $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2}$ d) $f(x) = \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x - 6}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{x+2} = \frac{0}{4} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-5)(x-2)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-5)}{(x+2)} = -\frac{3}{4}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{(x+1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)}{(x+1)} = \frac{0}{3} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x - 6}$, el numerador tendeix a 4 i el denominador a 0, per la qual cosa la funció es fa molt gran en valor absolut quan x tendeix a 2. Estudiem el signe de la funció quan x s'acosta a 2 per l'esquerra i per la dreta, i tenim:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 2x}{(x-2)(x+3)} = -\infty \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 2x}{(x-2)(x+3)} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x}{x^2 + x - 6} \text{ no existeix.}$$

10. Sabent que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$, calcula els límits per a $x = a$ de fg , $f \circ g$, f^g i g^f .

$$\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3 \cdot 0 = 0$$

$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$, el numerador tendeix a 3 i el denominador a 0, per la qual cosa $\frac{f}{g}$ es fa arbitràriament gran en valor absolut prop de $x = a$. Caldria estudiar el signe de $\frac{f}{g}$ quan x s'acosta a 2 per l'esquerra i per la dreta, és a dir, determinar-ne els límits laterals. Si els límits laterals existeixen i coincideixen, $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$ existirà i el seu valor coincidirà amb el dels límits laterals, en cas contrari, $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right)(x)$ no existirà.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f^g)(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = 3^0 = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (g^f)(x) = \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow a} f(x)} = 0^3 = 0 \text{ si } g(x) \geq 0 \quad \forall x \in E(a, \varepsilon). \text{ Per exemple, no existeix } \lim_{x \rightarrow a} [-(x-a)^2]^{x-a+3}.$$

11. Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 3}{2 - x^2 - 2x^3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 3}{2 - x^2 - 2x^3} = -\frac{1}{2}$, perquè el numerador i el denominador tenen el mateix grau.

Més rigorosament: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x + 3}{2 - x^2 - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}}{\frac{2}{x^3} - \frac{1}{x} - 2} = \frac{1 - 0 + 0}{0 - 0 - 2} = -\frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6} = 0$, perquè el “grau” del “numerador” és més baix que el grau del denominador.

Més rigorosament: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x-2}}{x+6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x-2}}{x}}{\frac{x+6}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\frac{x-2}{x^2}}}{1 + \frac{6}{x}} = \frac{0}{1} = 0$

12 i 13. Exercicis resolts.

14. Determina el major conjunt de nombres reals on siguin contínues les funcions següents.

a) $f(x) = x^2 - 1$

e) $f(x) = [x]$

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$

f) $f(x) = \frac{2x}{x^2 - 7x + 12}$

c) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

g) $f(x) = \frac{3x-6}{x^2+1}$

d) $f(x) = \frac{|x|}{x}$

h) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \\ x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) La funció és contínua a $\mathbb{R}$ perquè és una funció polinòmica.

b) La funció és contínua a $\mathbb{R} - \{1\}$ perquè és una funció racional i el denominador s'anul·la a $x = 1$.

c) La funció és contínua a $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$ perquè és una funció racional i el denominador s'anul·la a $x = -1$ i $x = 1$.

d) La funció és contínua a $\mathbb{R} - \{0\}$, ja que la funció $|x|$ és contínua en tot $\mathbb{R}$ i el denominador s'anul·la a $x = 0$.

e) La funció és contínua a $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$, ja que la funció part entera “salta” en els nombres enters.

f) La funció és contínua a $\mathbb{R} - \{3, 4\}$ perquè és una funció racional i el denominador s'anul·la a $x = 3$ i $x = 4$.

g) La funció és contínua a $\mathbb{R}$ perquè és una funció racional i el denominador no s'anul·la en cap nombre real.

h) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$, però $f(x) = 0 \neq 2$, per tant, la funció és discontinua a $x = 1$ i contínua a la resta perquè està definida pels polinomis. Així doncs, la funció és contínua a $\mathbb{R} - \{1\}$.

15. En cada cas, troba el valor que ha de tenir la funció en el punt indicat perquè hi sigui contínua.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, en $x = 1$

b) $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-4}$, en $x = 2$

a) Com que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+1) = 2$ ha de ser $f(1) = 2$.

b) Com que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-x-2}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x+2} = \frac{3}{4}$ ha de ser $f(2) = \frac{3}{4}$.

16. Troba el valor de k que fa f contínua a $x=1$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} & \text{si } x \neq 1 \text{ y } x \neq 2 \\ 2k+1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Com que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$, ha de ser $f(1) = -2$ i, per tant, $k = -\frac{3}{2}$.

17. Exercici interactiu.

18 i 19. Exercicis resolts.

20. Calcula les asímptotes de les funcions següents.

a) $f(x) = \frac{2x-1}{x^2-9}$

c) $f(x) = \frac{2x+5}{3x}$

b) $f(x) = \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2}$

d) $f(x) = \frac{4x^2+1}{x}$

a) Asímtotes verticals:

Com que el domini de la funció és $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$, pot tenir asímptotes verticals a $x = -3$ i $x = 3$.

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2x-1}{x^2-9} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2x-1}{x^2-9} = +\infty, \text{ per tant, } x = -3 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x^2-9} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x^2-9} = +\infty, \text{ per tant, } x = 3 \text{ és asímtota vertical.}$$

Asímtotes horitzontals:

Té la mateixa asímtota horitzontal a $+\infty$ i $-\infty$, ja que el grau del numerador és més baix o igual al del denominador.

De fet:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x^2-9} = 0 \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x^2-9} = 0, \text{ per tant, } y = 0 \text{ és asímtota horitzontal a } +\infty \text{ i } -\infty.$$

Asímtotes obliqües:

No en té perquè té asímptotes horitzontals, o perquè el grau del numerador no és un més que el del denominador.

b) Asímtotes verticals:

Com que el domini de la funció és $\mathbb{R} - \{-2, -1\}$, pot tenir asímptotes verticals a $x = -2$ i $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = +\infty, \text{ per tant, } x = -2 \text{ és asímtota vertical.}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^3+2x^2+3}{x^2+3x+2} = +\infty, \text{ per tant, } x = -1 \text{ és asímtota vertical.}$$

Asímtotes horitzontals:

No té asímtotes horitzontals, perquè el grau del numerador no és més baix o igual que el del denominador.

De fet:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} = +\infty$$

Asímtotes obliques:

Té la mateixa asímtota obliqua a $+\infty$ i $-\infty$, ja que el grau del numerador és un més que el del denominador.

De fet, dividint, tenim $f(x) = \frac{3x^3 + 2x^2 + 3}{x^2 + 3x + 2} = (3x - 7) + \frac{15x + 17}{x^2 + 3x + 2}$ i, per tant, la recta $y = 3x - 7$ és una asímtota obliqua a $+\infty$ i $-\infty$.

c) Asímtotes verticals:

Com que el domini de la funció és $\mathbb{R} - \{0\}$, pot tenir asímtota vertical a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x + 5}{3x} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x + 5}{3x} = +\infty, \text{ per tant, } x = 0 \text{ és asímtota vertical.}$$

Asímtotes horitzontals:

Té la mateixa asímtota horitzontal a $+\infty$ i $-\infty$, ja que el grau del numerador és més baix o igual que el del denominador.

De fet:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x + 5}{3x} = \frac{2}{3} \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 5}{3x} = \frac{2}{3}, \text{ per tant, } y = \frac{2}{3} \text{ és asímtota horitzontal a } +\infty \text{ i } -\infty.$$

Asímtotes obliques:

No en té perquè té asímtotes horitzontals, o perquè el grau del numerador no és un més que el del denominador.

d) Asímtotes verticals:

Com que el domini de la funció és $\mathbb{R} - \{0\}$, pot tenir asímtota vertical a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{4x^2 + 1}{x} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4x^2 + 1}{x} = +\infty, \text{ per tant, } x = 0 \text{ és asímtota vertical.}$$

Asímtotes horitzontals:

No té asímtotes horitzontals, perquè el grau del numerador no és més baix o igual que el del denominador.

De fet:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 + 1}{x} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 + 1}{x} = +\infty$$

Asímtotes obliques:

Té la mateixa asímtota obliqua a $+\infty$ i $-\infty$, ja que el grau del numerador és un més que el del denominador.

De fet, dividint, tenim $f(x) = \frac{4x^2 + 1}{x} = 4x + \frac{1}{x}$ i, per tant, la recta $y = 4x$ és una asímtota obliqua a $+\infty$ i $-\infty$.

21. Calcula les asímptotes de les funcions següents.

a) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2 + 2}$ b) $f(x) = \frac{x}{x^3 - 1}$ c) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$ d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 1}{x + 3}}$

a) Asímtotes verticals: Com que el domini de la funció és $\mathbb{R}$, no pot tenir asímptotes verticals.

Asímtotes horitzontals: Té la mateixa asímtota horitzontal a $+\infty$ i $-\infty$, ja que el grau del numerador és més baix o igual que el del denominador.

De fet, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, per tant, $y = 3$ és asímtota horitzontal a $+\infty$ i $-\infty$.

Asímtotes obliques: No en té perquè té asímptotes horitzontals, o perquè el grau (numerador) $\neq 1 +$ grau (denominador).

b) Asímtotes verticals: Com que el domini de la funció és $\mathbb{R} - \{1\}$, pot tenir asímtota vertical a $x = 1$.

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, per tant, $x = 1$ és asímtota vertical.

Asímtotes horitzontals: Té la mateixa asímtota horitzontal a $+\infty$ i $-\infty$, ja que grau del numerador és més baix o igual que el del denominador.

De fet, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, per tant $y = 0$ és asímtota horitzontal a $+\infty$ i $-\infty$.

Asímtotes obliques: No en té perquè té asímptotes horitzontals, o perquè grau (numerador) $\neq 1 +$ grau (denominador).

c) Asímtotes verticals: Com que el domini de la funció és $\mathbb{R}$, no pot tenir asímptotes verticals.

Asímtotes horitzontals: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, per tant, no té asímptotes horitzontals.

Asímtotes obliques: Per calcular les asímtotes obliques s'ha d'anar amb cura amb els signes.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{(-x)^2 + 3}}{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{x^2 + 3}{x^2}} = -\sqrt{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} + x)(\sqrt{x^2 + 3} - x)}{(\sqrt{x^2 + 3} - x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} - x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 3}{x^2}} = \sqrt{1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 3} - x)(\sqrt{x^2 + 3} + x)}{(\sqrt{x^2 + 3} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2 + 3} + x} = 0$$

La recta $y = -x$ és asímtota obliqua a $-\infty$ i la recta $y = x$ ho és a $+\infty$.

d) El domini de la funció és $(-\infty, -3) \cup [1, +\infty)$

Asímtotes verticals: Com que $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \infty$ i $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, $x = -3$ és asímtota vertical.

Asímtotes horitzontals: Com que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, no té asímtotes horitzontals.

Asímtotes obliques: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^3-1}{x^3+3x^2}} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}} - x \right) \left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}} + x \right)}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}} + x \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^3-1}{x+3} - x^2}{\left(\sqrt{\frac{x^3-1}{x+3}} + x \right)} = -\frac{3}{2}$$

La recta $y = x - \frac{3}{2}$ és asímtota obliqua a $+\infty$ i anàlogament, la recta $y = -x + \frac{3}{2}$ és asímtota obliqua a $-\infty$.

22 a 29. Exercicis resolts.

EXERCICIS

Límits de funcions

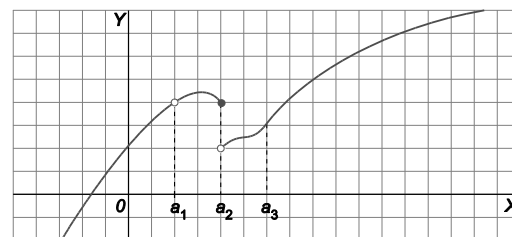
30. La gràfica de $f(x)$ és la de la figura.

Existeixen $\lim_{x \rightarrow a_1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow a_2} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a_3} f(x)$?

$\lim_{x \rightarrow a_1} f(x)$ sí que existeixen tot i que no existeixi $f(a_1)$.

$\lim_{x \rightarrow a_2} f(x)$ no existeix perquè els seus límits laterals no coincideixen.

$\lim_{x \rightarrow a_3} f(x)$ sí que existeix i, en aquest cas, val el mateix que $f(a_3)$.

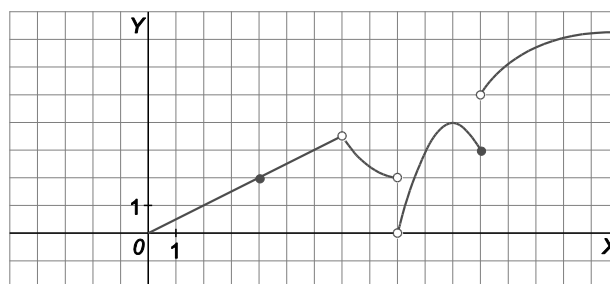


31. A partir de la gràfica de f donada a la figura, calcula, si existeixen, $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 7} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 12} f(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 7} f(x) = 3,5$$

No existeixen ni $\lim_{x \rightarrow 9} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow 12} f(x)$ ja que els seus límits laterals no coincideixen.



32. Amb l'ajuda de la calculadora, troba, si existeixen, els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{3x+2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4x - 5)$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-3}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt[3]{3x+2} = 2$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 - 4x - 5) = -5$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{|x|}$ no existeix

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+3}{x-3}$ no existeix

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - x}{x} = -1$

33. Calcula aquests límits.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 25x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 25x)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 - 4}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^2 + 7x - 3)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{7x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^2 + 7x - 3)$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - x}{x + 5}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 25x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x^3 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{25}{x^2} \right) \right] = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x^2 + 5} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 25x) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2 - 4} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-5x^2 + 7x - 3) = -\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3}{7x - 2} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-5x^2 + 7x - 3) = -\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - x}{x + 5} = -1$

34. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{2x + 5}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - x}{x + 5}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2 + 5}$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{4x^2 - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{7x - 2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x}{x^2 + 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 - 4}$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - x^2}{x^5 + x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - 2}{2x + 5} = \frac{3}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5 - x}{x + 5} = -1$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2 + 5} = 0$

g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^2 + 1}{4x^2 - 3} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3}{7x - 2} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x}{x^2 + 1} = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2 - 4} = 0$

h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 - x^2}{x^5 + x^2} = 0$

35. Resol els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3x} - \frac{3}{2x+1} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3x} - \frac{3}{2x+1} \right) = 0 - 0 = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x(x+1)} = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} = +\infty$

36. Calcula els límits a $+\infty$ i a $-\infty$ de les funcions següents.

a) $f(x) = \sqrt{x-5}$

b) $f(x) = \frac{|x|}{2-x}$

a) El límit a $-\infty$ no existeix, ja que la funció només està definida si $x \geq 5$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-5} = +\infty$.

b) $f(x) = \frac{|x|}{2-x} = \begin{cases} \frac{-x}{2-x} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x}{2-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, així $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2-x} = 1$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2-x} = -1$

37. Troba, si existeixen, aquests límits.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-2x+1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-2x+1}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x}$

e) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2+4x-1}{x^2-6x+8}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-50}{x^2+10x+25}$

i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-3}{(x-1)^2} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{x^2-2x+1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-1}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2+4x-1}{x^2-6x+8} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2+4x-1}{(x-4)(x-2)} = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3-50}{x^2+10x+25} = \frac{75}{100} = \frac{3}{4}$

g) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x^3-3)}{x^2(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3-3}{x(x-2)}$ no existeix, ja que el signe del quocient canvia si l'aproximació a 2 és per la dreta o per l'esquerra.

h) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3-3}{x(x-2)} = +\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3-3}{x(x-2)} = -\infty$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = -\infty$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = +\infty$

- l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x}{x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 3}{x(x-2)}$ no existeix, ja que el signe del quocient canvia segons si l'aproximació és a la dreta o a l'esquerra.

38. En cas d'existir, calcula els límits següents.

- | | | | |
|--|--|--|---|
| a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$ | d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$ | g) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{9 - x^2}$ | j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$ | e) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 9}$ | h) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2}$ | k) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 + x - 90}{\sqrt{x} - 3}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$ | f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$ | i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$ | l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x}$ |

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{10}{2} = 5$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{0}{12} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{-2}{2} = -1$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x-1} = -3$

e) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{16} = 4$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} + 1 = 2$

g) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{9 - x^2}$ no existeix, ja que l'arrel està definida només si $x \in [-3, 3]$.

h) $\lim_{x \rightarrow 3^-} \sqrt{9 - x^2} = 0$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$

j) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\sqrt{x} + 1} = \frac{1}{2}$

k) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 + x - 90}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x+10)(\sqrt{x} + 3)}{(\sqrt{x} - 3)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x+10)(\sqrt{x} + 3)}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} (x+10)(\sqrt{x} + 3) = 114$

l) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 2x} = \frac{-2}{-1} = 2$

Continuïtat d'una funció

39. Calcula, si n'hi ha, els punts de discontinuïtat de les funcions següents i classifica'ls.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-3}{x-1} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 0 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases} \quad \text{d) } f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$$

a) Discontinuitat de salt infinit a $x=1$.

b) Discontinuitat evitable a $x=2$, perquè $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$ i $f(2) = 0$.

c) És contínua en tot $\mathbb{R}$ perquè $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 2+2 = 4 = f(2)$.

d) Discontinuitat evitable a $x=2$, perquè no existeix $f(2)$, però sí que existeix $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

40. La funció $f(x) = \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1}$ no està definida per a $x=1$ ni per a $x=-1$.

a) Estudia'n la continuïtat.

b) Quins valors s'han d'adjudicar a $f(1)$ i $f(-1)$ perquè la funció f sigui contínua a $\mathbb{R}$?

a) La funció és contínua a $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

b) Tenim $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x+1)(x+3)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow -1} (x+3) = 2$ i $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+3x^2-x-3}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+3) = 4$, per tant, hem de definir $f(1) = 4$ i $f(-1) = 2$.

Observem que els límits anteriors proven, a més, que les discontinuïtats a $x=-1$ i $x=1$ són evitables.

41. Troba el major nombre de conjunts reals on siguin contínues les funcions següents.

a) $f(x) = 2x^3 - 5x$

d) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-5}$

b) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2+4}$

e) $f(x) = \frac{x^2-4}{x^3-4x}$

c) $f(x) = \frac{3x+7}{x-2}$

f) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+5x+4}$

a) $\mathbb{R}$

d) $\mathbb{R} - \{-1-\sqrt{6}, -1+\sqrt{6}\}$

b) $\mathbb{R}$

e) $\mathbb{R} - \{-2, 0, 2\}$

c) $\mathbb{R} - \{2\}$

f) $\mathbb{R} - \{-4, -1\}$

42. Investiga per a quins valors reals són contínues les funcions següents i classifica les possibles discontinuïtats que trobis.

a) $f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < 1 \\ x+7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 2x+6 & \text{si } x < 1 \\ x-7 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

- a) Les expressions que defineixen la funció són contínues, per tant, hem d'estudiar què passa en els extrems dels intervals de definició.

Com que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 8$, la funció és contínua a $\mathbb{R}$.

- b) Com que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 8$ i $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -6$, la funció és contínua a $\mathbb{R} - \{1\}$ i té una discontinuïtat de salt finit a $x = 1$.

43. Estudia la continuïtat de la funció següent i dibuixa-la.

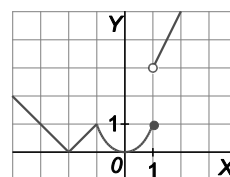
$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 & \text{si } -1 < x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Com que cada una de les expressions que defineixen f són funcions contínues, hem de veure què passa en els extrems dels intervals de definició:

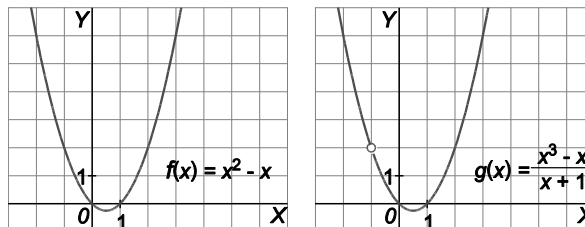
$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} |x+2| = 1 \text{ i } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} x^2 = 1, \text{ per tant, és contínua a } x = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 = 1 \text{ i } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 3, \text{ per tant, té una discontinuïtat de salt finit a } x = 1.$$

En resum, la funció és contínua a $\mathbb{R} - \{1\}$.



44. Com s'observa, en dibuixar la gràfica de les funcions $f(x) = x^2 - x$ i $g(x) = \frac{x^3 - x}{x+1}$ s'obté la mateixa gràfica per a totes dues, excepte en un punt.



Per tant, aquestes funcions no són iguals. Indica'n les diferències fent un estudi del que succeeix en el punt d'abscisses $x = -1$.

Les funcions no són iguals, ja que $D(f) = \mathbb{R}$ i $D(g) = \mathbb{R} - \{-1\}$.

No obstant això, a $x = -1$ tenim:

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 - x}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - x) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

A la resta de punts, òbviament totes dues funcions coincideixen.

45. Determina a i b perquè la funció següent sigui contínua a tot $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ ax + b & \text{si } 0 \leq x \leq 3 \\ x - 5 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Els únics punts on podria no ser contínua són els de les abscisses $x=0$ i $x=3$. Perquè f sigui contínua en aquests punts, els límits laterals han de ser iguals. Per tant:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = b \\ 3a + b = -2 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 1.$$

Per a aquests valors coincideix el valor de la funció en els punts considerats amb límits calculats, per tant, la funció és contínua a tot $\mathbb{R}$.

46. En cada cas, calcula els valors de m i n perquè les funcions siguin contínues en tot $\mathbb{R}$.

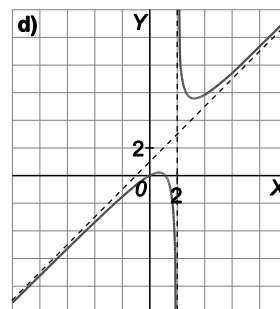
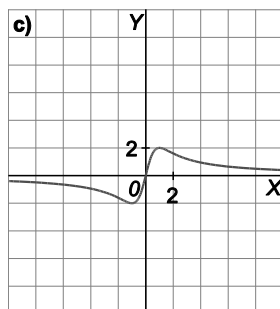
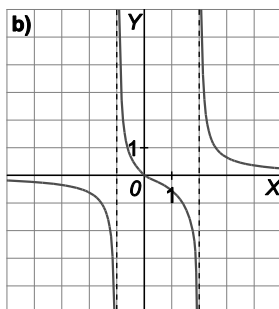
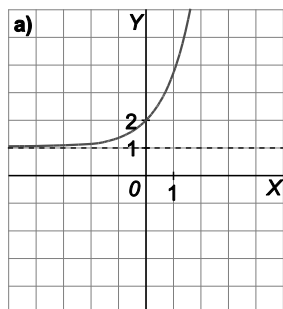
a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x \leq 0 \\ mx + n & \text{si } 0 < x < 2 \\ -1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 3mx - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ nx^2 - 4m & \text{si } -1 < x \leq 3 \\ n + 2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 = n \\ 2m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -2, n = 3$

b) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3m - 1 = n - 4m \\ 9n - 4m = n + 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m - n = 1 \\ -4m + 8n = 2 \end{cases} \Rightarrow m = \frac{5}{2}, n = \frac{3}{2}$

47. Digueu de quin tipus són les asímptotes de cada una de les funcions donades per les gràfiques següents, i dona una equació si aquesta resulta evident.



a) Asímptota horitzontal: $y = 1$.

b) Asímtotes verticals: $x = -1$, $x = 2$. Asímtota horitzontal: $y = 0$.

c) Asímtota horitzontal: $y = 0$.

d) Asímtota vertical: $x = 2$. Asímtota obliqua: $y = x + 1$.

48. Calcula totes les asímptotes de les funcions següents.

a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$

f) $f(x) = \frac{x^3 + 2x + 7}{x^2 + x + 1}$

b) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \frac{3}{x + 5}$

h) $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$

d) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 4x + 3}$

i) $f(x) = 2x - 3 + \frac{5}{x - 4}$

e) $f(x) = \frac{x^2}{x + 1}$

j) $f(x) = x - \frac{x^2}{x - 3}$

- a) No té asímptotes.
 b) La recta $y = 2$ és asímptota horitzontal a $-\infty$ i $+\infty$.
 c) La recta $y = 0$ és asímptota horitzontal a $-\infty$ i $+\infty$ i la recta $x = -5$ és asímptota vertical.
 d) La recta $y = 1$ és asímptota horitzontal a $-\infty$ i $+\infty$ i la recta $x = 3$ és asímptota vertical.
 e) La recta $x = -1$ és asímptota vertical i la recta $y = x - 1$ és asímptota obliqua a $-\infty$ i $+\infty$.
 f) La recta $y = x - 1$ és asímptota obliqua a $-\infty$ i $+\infty$.

g) $f(x) = \frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt{x}} = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$, per tant, la recta $x = 0$ és asímptota vertical (només per la dreta, ja que $D(f) = (0, +\infty)$) i, com que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, la recta $y = x$ és asímptota obliqua a $+\infty$.

h) La recta $y = x$ és asímptota obliqua a $+\infty$, ja que, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+3}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} = 1$ i

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+3} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+3} - x)(\sqrt{x^2+3} + x)}{\sqrt{x^2+3} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x^2+3} + x} = 0$. De la mateixa manera, es comprova que la recta $y = -x$ és asímptota obliqua a $-\infty$.

- i) La recta $x = 4$ és asímptota vertical i la recta $y = 2x - 3$ és asímptota obliqua a $-\infty$ i $+\infty$.
 j) La recta $y = -3$ és asímptota horitzontal a $-\infty$ i $+\infty$ i la recta $x = 3$ és asímptota vertical.

49. Sigui la funció $f(x) = a + \frac{b}{x+c}$ amb a, b i c nombres reals. Calcula'ls sabent que:

- La gràfica de f presenta a $-\infty$ una asímptota horitzontal d'equació $y = 2$.
- La gràfica de f presenta a $x = 1$ una asímptota vertical.
- El punt $(6, 3)$ pertany a la gràfica de f .

La primera condició ens diu que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$, per tant, $a = 2$.

Per la segona condició, el denominador de $f(x) = \frac{ax + (ac+b)}{x+c}$ s'ha d'anul·lar si $x = 1$, per tant, $c = -1$.

Finalment, la tercera condició ens diu que $f(6) = 3$, és a dir, $a + \frac{b}{6+c} = 3 \Rightarrow 2 + \frac{b}{6-1} = 3 \Rightarrow b = 5$.

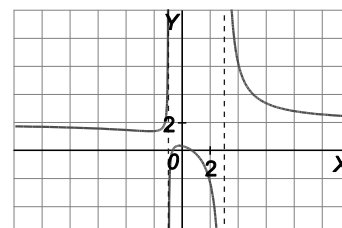
50. Troba les asímptotes de la funció $f(x) = \frac{1-2x^2}{3+2x-x^2}$ i dibuixa'n la gràfica.

Les asímptotes verticals es poden trobar a $x = -1$ i $x = 3$, que són els valors que anul·len el denominador.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$, per tant, la recta $x = -1$ és asímptota vertical.

$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$, per tant, la recta $x = 3$ és asímptota vertical.

Com que els graus del numerador i del denominador coincideixen, té una asímptota horitzontal a $-\infty$ i $+\infty$, d'equació $y = 2$.



51. El denominador de la funció $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5}$ s'anul·la per a dos valors: $x = -1$ i $x = 5$, i, no obstant això, només té una asymptota vertical. Explica per què.

Com que $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4x - 5} = \frac{(x-5)(x-2)}{(x-5)(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}$ si $x \neq 5$, la funció té una única asymptota vertical $x = -1$.

Síntesi

52. Estudia raonadament les asymptotes i la continuïtat de la funció $f(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}$.

Tenim $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$ i la funció és contínua en el seu domini.

La recta $x = -1$ és una asymptota vertical:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty.$$

No té asymptotes horitzontals, ja que el grau del numerador és més alt que el del denominador, o, més formalment:

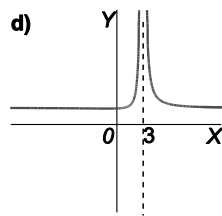
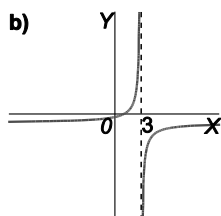
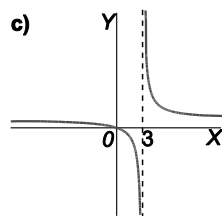
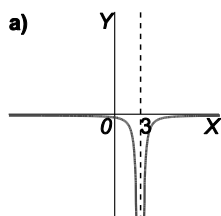
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = -\infty \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{(x+1)^2} = +\infty, \text{ per la qual cosa no té asymptotes horitzontals.}$$

Sí que té asymptota obliqua, ja que el grau del numerador és un més que el del denominador.

Dividint, tenim:

$$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 2x + 1} = x - 2 + \frac{4x + 2}{x^2 + 2x + 1}, \text{ amb la qual cosa la recta } y = x - 2 \text{ és asymptota obliqua a } -\infty \text{ i } +\infty.$$

53. A continuació es mostra el comportament de quatre gràfiques al voltant de la seva asymptota vertical $x = 3$.



Associa cada gràfica amb una d'aquestes funcions:

I. $f(x) = \frac{x}{x-3}$

III. $g(x) = \frac{x-1}{(x-3)^2}$

II. $h(x) = \frac{-2}{(x-3)^2}$

IV. $j(x) = \frac{1-x}{x-3}$

I amb c, perquè $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$.

II amb a, perquè $\lim_{x \rightarrow 3^-} h(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 3^+} h(x) = -\infty$.

III amb d, perquè $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = +\infty$.

IV amb b, perquè $\lim_{x \rightarrow 3^-} j(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 3^+} j(x) = -\infty$.

54. Completa la taula següent (*f* i *g* són funcions reals de variable real).

Formulació analítica	Interpretació gràfica
$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$	***
***	La gràfica de <i>f</i> passa per l'origen de coordenades.
Si $x \in [-1, 3]$, llavors $f(x) < g(x)$	***
***	<i>f</i> i <i>g</i> es tallen en el punt d'abscisses $x = 4$
L'equació $f(x) = -6$ no té solució.	***
***	La recta $y = 1$ talla la gràfica de <i>g</i> en els punts $(-5, 1)$ i $(1, 1)$.

Formulació analítica	Interpretació gràfica
$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$	Té una asímptota vertical a $x = 2$ i la gràfica decreix per l'esquerra.
$f(0) = 0$	La gràfica de <i>f</i> passa per l'origen de coordenades.
Si $x \in [-1, 3]$, llavors $f(x) < g(x)$	La gràfica de <i>g</i> està per sobre de la de <i>f</i> si $x \in [-1, 3]$.
$f(4) = g(4)$	<i>f</i> i <i>g</i> es tallen en el punt d'abscisses
L'equació $f(x) = -6$ no té solució.	La gràfica no talla la recta $y = -6$.
$g(-5) = 1$ i $g(1) = 1$	La recta $y = 1$ talla la gràfica de <i>g</i> en els punts $(-5, 1)$ i $(1, 1)$.

55. Sigui *f* la funció definida per $f(x) = \frac{x+3}{|x|-3}$. Quin és el domini de *f*? Calcula els límits $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Estudia els límits $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$.

El domini de *f* és $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{x-3} = 1 \text{ y } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{-x-3} = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+3}{x-3} = +\infty \text{ y } \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+3}{x-3} = -\infty.$$

56. Calcula els nombres a , b i c , sabent que la recta $y = 2x - 3$ és una asímptota obliqua de la funció:

$$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1}$$

$f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{x + 1} = ax + (b - a) + \frac{a - b + c}{x + 1}$, així, $y = ax + (b - a)$ és l'asímtota obliqua, per la qual cosa $a = 2$, $b = -1$ i c , en principi, pot prendre qualsevol valor.

Però observem que si $c = -3$, $f(x) = \frac{2x^2 - x - 3}{x + 1} = 2x - 3$ si $x \neq -1$, és a dir, la seva gràfica és una recta amb un forat i, tot i que rigorosament, la recta $y = 2x - 3$ és asímptota d'aquesta funció, no se sol considerar com a tal.

En resum: $a = 2$, $b = -1$, $c \neq -3$.

57. Si $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = b$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$, calcula $\lim_{x \rightarrow a} 2g(x)$.

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b = c + \lim_{x \rightarrow a} g(x) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} g(x) = b - c. \text{ Per tant, } \lim_{x \rightarrow a} 2g(x) = 2b - 2c.$$

58. Si f és una funció contínua definida a $\mathbb{R}$ i que admet com a asímptota la recta $y = x - 1$, aleshores es pot assegurar que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$?

Ens diuen que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$, així que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x - 1) = +\infty$, per tant, podem assegurar el que ens demanen.

59. És possible que dues funcions polinòmiques diferents coincideixin per a tots els valors d'un cert interval $[a, b]$?

No, perquè llavors el polinomi diferència tindria arrels infinites (tots els nombres de l'interval $[a, b]$), per tant, totes dues funcions haurien de ser la mateixa.

60. Si la funció $f + g$ és contínua a $x = 2$, pots concloure que tant f com g són contínues en aquest punt?

$$\text{No, per exemple } f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}, \quad g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Cap d'aquestes no és contínua a $x = 2$, però $(f + g)(x) = x + 1$ que sí que és contínua a $x = 2$.

61. Suposa que f és contínua a l'interval $[1, 4]$ i que f mai no s'anul·la en aquest interval. Què pots dir sobre els signes de $f(1)$ i de $f(4)$?

Els signes de $f(1)$ i de $f(4)$ han de ser iguals perquè, en cas contrari, com que f és contínua, hauria de tallar l'eix d'abscisses en algun punt de $[1, 4]$.

62. Hi ha algun valor de k per al qual la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ 2k + 1 & \text{si } x = 0 \\ 3x & \text{si } x > 0 \end{cases}$ sigui contínua a $x = 0$?

Perquè f sigui contínua a $x = 0$, s'ha de complir que $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, però $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$.

Per tant, no hi ha cap valor de k que faci f contínua a $x = 0$.

63. Si $f(x) = \frac{g(x)}{t(x)}$, amb $g(x)$ i $t(x)$ polinomis i $t(x) \neq 0$ per a qualsevol x real, quin és el màxim nombre d'asímptotes que pot tenir la funció $y = f(x)$?

Si $t(x) \neq 0$, f no pot tenir asímptotes verticals.

Pot tenir una asímptota horitzontal, si grau $g(x) \leq$ grau $t(x)$ o tenir una asímptota obliqua si grau $g(x) = 1 +$ grau $t(x)$.

Així doncs, f podrà tenir, com a màxim, una asímptota.

64. Si f és contínua a $x = 2$, quin és el valor de $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - f(2)$?

Si f és contínua a $x = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, per tant, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) - f(2) = 0$.

65. Determina si l'afirmació següent és certa o falsa: "Si $x = a$ no pertany al domini de f , llavors no existeix $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ".

Fals; per exemple, si $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 1}$ i $a = 1$, l'afirmació és falsa.

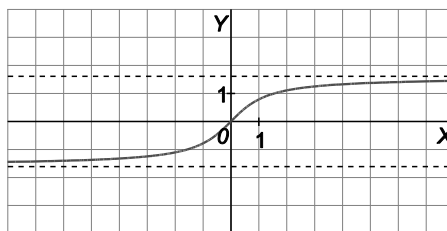
66. Si la funció f és un quocient de polinomis i el denominador s'anul·la a $x = 3$, llavors la recta $x = 3$ serà una asímptota vertical de $y = f(x)$ en tots els casos?

No, perquè podria ser que el numerador també s'anul·lés a $x = 3$ i aleshores la funció podria tenir una discontinuïtat evitable, que és el que passa, per exemple, amb la funció $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 9}{x - 3}$.

67. Si $x = a$ és una asímptota vertical de $y = f(x)$, és cert o és fals que llavors el nombre a no està en el domini de f ?

Fals; per exemple, si $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 3 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ i $a = 0$, l'afirmació és falsa.

68. Pot expressar-se la funció la gràfica de la qual és la de la figura amb un quocient de polinomis?



No, la gràfica de la figura presenta dues asíptotes horitzontals i si una corba és quocient de polinomis només pot tenir una asíptota horitzontal, ja que si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k$, llavors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k$.

69. Si $y = a$ és una asíptota horitzontal de $y = f(x)$, llavors és possible que el valor de a pertanyi al recorregut de la funció?

És possible, per exemple, passa amb $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{1}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ i $a = 0$.

PROBLEMES

70. Una empresa produeix ratolins sense fil en grans quantitats. Atenent a les despeses de la posada en marxa de la maquinària, al salari dels seus treballadors i a altres factors, s'ha arribat a la conclusió que produir p ratolins té un cost total, en euros, de $C(p) = 10p + 100\,000$.

- Troba l'expressió de la funció C_m que ens dona el preu unitari mitjà d'un ratolí en fabricar p unitats.
- Calcula $C_m(10)$ i $C_m(1000)$. A què és degut que hi hagi tanta diferència entre un cost i un altre?
- Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} C_m(p)$ i dona una interpretació econòmica al resultat.

a) $C_m(p) = \frac{C(p)}{p} = 10 + \frac{100\,000}{p}$

b) $C_m(10) = 10010$ € i $C_m(1000) = 110$ €, la diferència rau en el fet que una component important del preu de producció de p ratolins, 100000 €, és independent del nombre de ratolins.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} C_m(p) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(10 + \frac{100\,000}{p} \right) = 10$ €, quan p es fa gran, el preu unitari mitjà s'aproxima a 10 €, ja que l'altre sumand, a causa de la despesa de la posada en marxa de la maquinària, etc., es va amortitzant perquè hi ha molta producció.

71. Abans de començar la producció en sèrie, una empresa aeronàutica ha fabricat 3 aparells per vendre'ls per un total de 9 milions d'euros, després de calcular les despeses de fabricació, realitzar l'estudi de mercat, etc. Una vegada efectuat aquest treball, començarà la producció en sèrie, sent llavors el cost de fabricació de cada avió de 0,3 milions d'euros.

Es representa per x el nombre d'avions fabricats en sèrie, i per $f(x)$ el preu d'un avió per a x avions construïts.

a) Explica per què $f(x) = \frac{0,3x+9}{x+3}$ per a $x > 0$.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i explica en termes econòmics el valor obtingut.

a) Els tres primers aparells han costat 9 milions d'euros i cada un dels següents, 0,3 milions d'euros, així doncs, els $x + 3$ primers avions costaran $(0,3x + 9)$ milions d'euros, per la qual cosa, el preu d'un avió per a x avions fabricats serà $f(x) = \frac{0,3x+9}{x+3}$ si $x > 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,3$, la qual cosa significa que si fabriquen molts avions, poden obviar l'alt preu dels tres primers aparells.

72. S'ha investigat el temps T , en minuts, que es triga a realitzar certa prova d'atletisme en funció del temps d'entrenament x , en dies, i s'obté:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{300}{x+30} & \text{si } 0 \leq x \leq 30 \\ \frac{1125}{(x-15)(x-5)} + 2 & \text{si } x > 30 \end{cases}$$

- a) Justifica que la funció T és contínua en tot el seu domini.
b) Es pot afirmar que com més s'entrena un esportista menys temps trigarà a realitzar la prova? Algun esportista tardarà més de 10 minuts a realitzar la prova?
c) Encara que un esportista s'entreni suficientment, serà capaç de fer la prova en menys de 3 minuts? I en menys de 2 minuts?

- a) T és contínua a $[0, 30)$ ja que el denominador no s'anul·la en aquest interval. Per aquesta mateixa raó, ho és si $x > 30$ (observeu que el seu denominador només s'anul·la si $x = 15$ o si $x = 5$).

Vegem si és contínua a $x = 30$:

$$\lim_{x \rightarrow 30^-} T(x) = 5; \quad \lim_{x \rightarrow 30^+} T(x) = \frac{1125}{15 \cdot 25} + 2 = 5; \quad T(30) = 5, \text{ per tant, } T \text{ és contínua en tot el seu domini.}$$

- b) Si $x < 30$, com més temps entreni, més gran serà el denominador i, per tant, el temps serà inferior. Anàlogament si $x > 30$. Finalment, com que T és contínua a $x = 30$, podem assegurar el que es demana.

Com que la inequació $\frac{300}{x+30} > 10$, és a dir, $300 > 300 + 10x$ no té solució a $[0, 30]$ i la inequació $\frac{1125}{(x-15)(x-5)} + 2 > 10$, és a dir, $1125 > 8(x-15)(x-5)$, $x^2 - 20x + 65,625 < 0$ tampoc no té solució si $x > 30$ (el discriminant és negatiu), resulta que cap esportista no tardaria més de 10 minuts a fer la prova.

- c) En menys de 3 minuts sí. N'hi ha prou que $\frac{1125}{(x-15)(x-25)} < 1$ i això passa, per exemple, a $x = 60$ dies.

En menys de 2 minuts no, perquè T és estrictament decreixent i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

73. Les conclusions d'un estudi demogràfic estableixen que el nombre d'individus d'una determinada població d'una espècie protegida vindrà donada, en els pròxims anys, per la funció següent:

$$f(t) = \frac{15\,000t + 10\,000}{2t + 2}$$

Sent t el nombre d'anys transcorreguts.

- Quina és la dimensió actual de la població?
 - Si aquesta funció fos vàlida indefinidament, s'estabilitzaria la dimensió de la població?
- El valor de $f(0)$, és a dir, 5000 habitants.
 - Sí, s'estabilitzaria en torn dels 7500 habitants perquè $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 7500$.

74. Les pèrdues o els guanys d'una empresa, expressats en centenes de milers d'euros quan han transcorregut t anys, venen reflectits per la funció $f(t) = \frac{2t - 4}{t + 2}$.

- Guanya diners l'empresa els dos primers anys?
 - Quant guanyarà el cinquè any?
 - Existeix límit per als guanys? En cas afirmatiu, quin és aquest límit?
- No, perquè si $t \leq 2$, $f(t) \leq 0$.
 - $f(5) - f(4) = \frac{10 - 4}{7} - \frac{8 - 4}{6} = \frac{6}{7} - \frac{2}{3} = \frac{4}{21} \approx 0,19 \times 100\,000 \text{ €}$, és a dir, 19000 €.
 - Sí, perquè $\frac{2t - 4}{t + 2} = 2 - \frac{8}{t + 2}$, per tant, aquesta empresa mai no guanyaria més de 200 000 €.

PER APROFUNDIR

75. Posa un exemple de dues funcions f i g tals que no existeixin $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$, però sí que existeixi $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \text{ i } g(x) = -f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ -1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

76. Si existeixen $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$, pot assegurar-se que existeix $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$?

Sí, perquè $g(x) = (f(x) + g(x)) - f(x)$ i si existeix el límit de dues funcions, també existeix el límit de la diferència d'aquestes funcions.

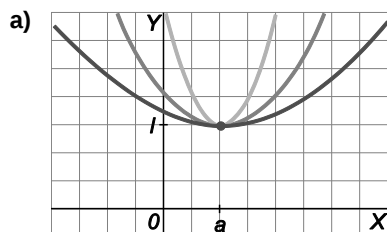
77. Si $f(x) = g(x)$ excepte en 2009 punts, què pots dir dels límits de totes dues funcions a $x = 5$?

Podem afirmar que existeix el límit d'una de les funcions només si existeix el de l'altra i, en el cas d'existir, seran iguals.

78. a) Comprova gràficament que si f, g i h són tres funcions tals que $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = l$

llavors $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = l$

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right)$



b) Com que $-x^2 \leq x^2 \sin \frac{1}{x} \leq x^2$, i $\lim_{x \rightarrow 0} (-x^2) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$,

tenim $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 \sin \frac{1}{x} \right) = 0$.

79. Calcula les asímptotes obliques, si existeixen, de:

a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

b) $f(x) = 2x + 2^{-x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = 1$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)(\sqrt{x^2 + 1} + x)}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = -1$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$

Per tant, la recta $y = x$ és asímptota obliqua per la dreta i la recta $y = -x$ ho és per l'esquerra.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 2^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2^{-x}}{x} \right) = 2$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 2^{-x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2^{-x}) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 2^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 - \frac{2^{-x}}{x} \right) = +\infty$ Per tant, la recta $y = 2x$ és asímptota obliqua per la dreta.

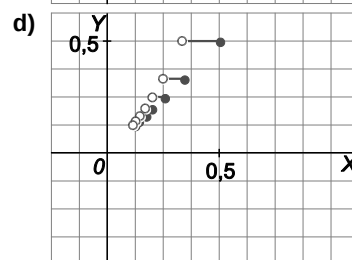
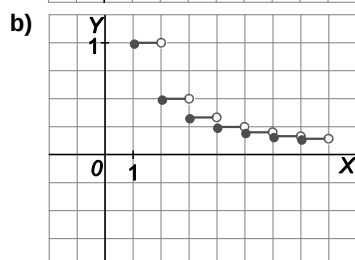
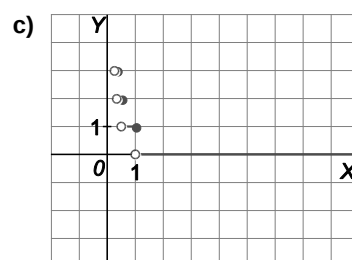
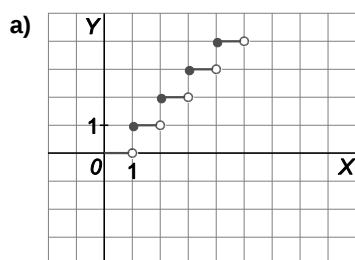
80. En cada cas, dibuixa els punts del pla (x, y) amb $x \geq 0$ que compleixen les condicions:

a) $y = [x]$

b) $y = \frac{1}{[x]}$

c) $y = \left[\frac{1}{x} \right]$

d) $y = \left[\frac{1}{\frac{1}{x}} \right]$



81. Hi ha algun nombre c per al qual existeixi el límit següent?

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 4x + cx + 2c}{x^2 + x - 2}$$

Calcula c i el límit corresponent.

Com que el denominador s'anul·la a $x = 1$, perquè existeixi aquest límit el numerador també s'ha d'anul·lar a $x = 1$, per tant, $2 + 4 + c + 2c = 0$. Així $c = -2$ i $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 2x - 4}{x^2 + x - 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2(x^2 + x - 2)}{x^2 + x - 2} = 2$.

ENTORN MATEMÀTIC

Spyrador 007

En Joan i en Xavier estan jugant a tennis, però al cap de poc d'haver començat, en Joan s'adona que en Xavier no està concentrat: "Eh! Què et passa, Xavier? No toques bola". En Xavier seu a terra i amb la cara desencaixada li diu a en Joan que està molt preocupat per la feina. En Joan l'anima i comenta "vinga, anem a canviar-nos i a prendre un refresc i m'expliques el problema". En efecte, al cap de mitja hora, estan asseguts en una terrassa i en Xavier li explica a en Joan les seves preocupacions: "El futur de l'empresa depèn d'un nou producte – l'Spyrador 007–, una potent aspiradora robòtica petita i silenciosa com un espia. El meu cap m'ha demanat que avaluï quantes unitats podem fabricar per assegurar uns guanys suficients per assumir riscos en el cas que ens falli algun client. Fa un parell de setmanes que dono voltes al problema i no aconsegueixo trobar la solució." En Joan es posa a riure dient: "no et preocupis, per a què tens un amic matemàtic com jo que es passa el temps fent números, comptes i equacions? Dona'm totes les dades i en poc temps t'asseguro que et trobo una solució". Dit i fet, al cap de quatre dies, en Joan envia a en Xavier el correu següent: "Amb les dades que em vas donar, he conclòs que els guanys totals de la teva empresa en funció del nombre d'aspiradores venudes, x , es pot aproximar per la funció:

$$3. \quad G(x) = \begin{cases} 10x(x-50) & \text{si } 0 \leq x \leq 50 \\ 50\sqrt{x^2 + 36x - 4300} & \text{si } x > 50 \end{cases}$$

Ajuda en Xavier a analitzar la proposta del seu amic contestant aquestes preguntes:

- Hi ha una diferència essencial entre fabricar 49 unitats i fabricar 51 unitats?
- Justifica que la funció guanys és contínua.
- Quantes aspiradores s'han de fabricar per obtenir el guany mínim?
- Venent moltes unitats, es pot arribar a guanyar 60 € per unitat?
- Quin és el guany màxim per unitat que es pot obtenir?

$$a) \quad G(49) = 10 \cdot 49(49 - 50) = -490 ; \quad G(51) = 50\sqrt{51^2 + 36 \cdot 51 - 4300} \approx 585.$$

Això vol dir que si venen 49 unitats, perden diners, però si en venen 51, en guanyen.

$$b) \quad G(x) \text{ és contínua a } x = 50, \text{ ja que } \lim_{x \rightarrow 50^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 50^-} 10x(x-50) = 10 \cdot 50(50-50) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 50^+} G(x) = \lim_{x \rightarrow 50^+} 50\sqrt{x^2 + 36x - 4300} = 50\sqrt{50^2 + 36 \cdot 50 - 4300} = 0 \quad \text{i} \quad G(50) = 10 \cdot 50(50 - 50) = 0$$

A més, a la resta dels valors la funció és contínua.

$$c) \quad \text{La primera funció, és negativa a l'interval } (0, 50) \text{ amb un mínim a } x = 25, G(25) = -6250.$$

La segona funció és sempre positiva, per a valors més grans de 50.

Per tant, el guany mínim es dona quan es fabriquen 25 aspiradores, que és quan més diners es perden.

$$d) \quad \text{A l'interval } (0, 50) \text{ la funció } G \text{ és negativa. A partir de } x = 50, \text{ la funció és positiva i creixent, però:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{G(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{50\sqrt{x^2 + 36x - 4300}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 50\sqrt{1 + \frac{36}{x} - \frac{4300}{x^2}} = 50$$

Així doncs, no es podrà guanyar mai més de 50 € per unitat.

$$e) \quad \text{El guany màxim per unitat serà de 50 € aproximadament i, com s'ha comentat a l'apartat anterior, no s'assoleix mai.}$$

Matecologia

La Susanna té una empresa “Solucions Matecològiques”. La seva feina consisteix a oferir plans d’actuació a les empreses per tal de reduir l’impacte ambiental que produeix la seva activitat. Ara acaba d’entregar un estudi a una central tèrmica de carbó per reduir la pol·lució que aquesta genera. Està contenta perquè creu que ha trobat una bona solució. La conclusió final de l’informe és la següent:

Reduir l’abocament d’una central tèrmica que crea carbó és una tasca costosa si ens proposem reduir la pol·lució en alts percentatges i amb preus desorbitats si ens proposem reduir-la quasi totalment. Naturalment, reduir la pol·lució en petits percentatges té un cost molt menor. Per això, si volem construir una funció que lligui el percentatge de reducció amb el cost que ens suposa, aquesta funció ha de contemplar les característiques anteriors i, per tant, no serà una funció lineal, ni tan sols polinòmica sinó una mica més sofisticada. Analitzant les dades referents a les seves instal·lacions hem estimat que el cost en euros de reduir un x % l’abocament ve donat per la funció:

$$C(x) = \frac{10\,000x}{100 - x}, \text{ amb } 0 \leq x < 100$$

Analitza la proposta de la Susanna, contestant aquestes preguntes:

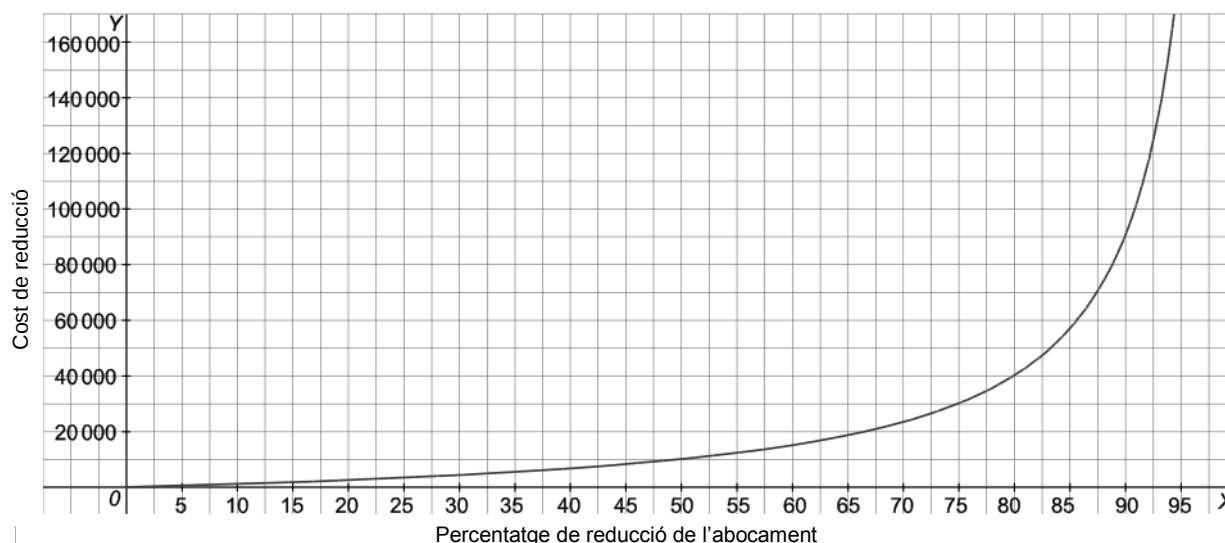
- Calcula el cost de reducció d’un 20 % de l’abocament.
- Calcula quin percentatge de reducció s’aconseguirà si s’inverteixen 10 000 €.
- Calcula el cost de reduir en un 80 % l’abocament.
- Dibuixa la gràfica de la funció $C(x)$ en tot el seu domini.

a) $C(20) = \frac{10\,000 \cdot 20}{100 - 20} = \frac{200\,000}{80} = 2\,500 \text{ €}.$

b) Resolem l’equació $\frac{10\,000x}{100 - x} = 10\,000$; $x = 50$. És a dir, es reduiria en un 50 %.

c) $C(80) = \frac{10\,000 \cdot 80}{100 - 80} = \frac{800\,000}{20} = 40\,000 \text{ €}.$

d)



AUTOAVALUACIÓ

Comprova el que has après

Les quatre primeres qüestions fan referència a la funció f , definida per a tot $x > 4$, per $f(x) = -2x + 1 + \frac{8}{x-4}$.

Cal respondre justificant si són certes o falses les afirmacions que es fan:

1. Una altra expressió per a f és $f(x) = \frac{2x^2 - 9x + 12}{4 - x}$.

Manipulant l'expressió donada per a $f(x)$, s'arriba a $f(x) = -2x + 1 + \frac{8}{x-4} = \frac{(-2x+1)(x-4)+8}{x-4} = \frac{2x^2-9x-4}{x-4}$ que no coincideix amb l'enunciat anterior, per tant, 1 és falsa.

2. La recta $x = 4$ és asímptota vertical de la gràfica f .

Certa, perquè, per exemple, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$

3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

Falsa, perquè $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-2x + 1 + \frac{8}{x-4} \right) = -\infty$

4. La recta d'equació $y = -2x + 1$ és una asímptota obliqua de la gràfica f .

Certa, perquè $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{8}{x-4} = 0$

5. Troba el valor del límit: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x(x+1)}{x-2} = -2$$

6. Calcula: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 2x^3}{6x^3 - 5x^2 + 2x - 1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 2x^3}{6x^3 - 5x^2 + 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{4}{x^2} - 2}{6 - \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$$

7. Determina el límit: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x + 1})$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2 - 2x + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{(x-1)^2}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - |x-1|)$. Per a valors grans de x , (en concret, $x > 1$), $|x-1| = x-1$, així doncs, el límit demanat és $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - (x-1)) = 1$.

8. Troba el valor de k que fa que la funció següent sigui contínua en tot $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} x^2 - kx, & \text{si } x \leq -2 \\ 6kx - 3, & \text{si } x > -2 \end{cases}$.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - kx & \text{si } x \leq -2 \\ 6kx - 3 & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

f és contínua a $\mathbb{R} - \{-2\}$ sigui quin sigui el valor de k .

Perquè sigui contínua a $x = -2$, ha de passar que $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, és a dir:

$$4 + 2k = -12k - 3, k = \frac{-1}{2}. \text{ Així doncs, si } k = \frac{-1}{2}, \text{ la funció serà contínua a tot } \mathbb{R}.$$

9. Si la recta $y = 2x + 1$ és una asímptota obliqua per la dreta de la funció racional $y = f(x)$, calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 3}$.

Com que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (2x + 1)] = 0$, llavors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - (2x + 1)}{x} = 0$, és a dir, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 2$ i com que f és un quocient de

polinomis, el grau del numerador serà una unitat més gran que el del denominador. Així doncs, $\frac{f(x)}{x^2 + 3}$ és un

quocient de polinomis amb el grau del denominador més gran que el del numerador i, per tant, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x^2 + 3} = 0$.

10. Escriu una funció racional definida a $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ i tal que la seva gràfica admeti com a asímptotes les rectes $x = 1$ i $y = 2$.

Per exemple, $f(x) = \frac{2x}{x-1}$

Relaciona i contesta

Tria l'única resposta correcta en cada cas

1. Si $f(x) = x^2 + x - 4$, llavors:

A. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$

D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 4) = +\infty$. La resposta correcta és la B.

2. La corba donada per $f(x) = \frac{3}{x} + 4$ admet com a asímptota la recta d'equació:

A. $y = \frac{3}{x}$

B. $y = 4$

C. $y = 0$

D. $y = 3$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{x} + 4 \right) = 4$, per tant, la recta $y = 4$ és asímptota. La resposta correcta és la B.

3. En una d'aquestes quatre funcions, la recta $x = 1$ no és asímptota vertical. En quina?

A. $f(x) = \frac{1}{(x-1)^2}$

B. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$

C. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1}$

D. $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{(x-1)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x-1} = -1.$$

Per tant, $x = 1$ no és asímptota vertical. La resposta correcta és la C.

Assenyala, en cada cas, les respostes correctes

4. Si $f(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1$, la gràfica de f compleix:

- A. Té dues asímptotes. C. Té una asímptota obliqua.
B. Té com a asímptota vertical la recta $x = 0$. D. Té com a asímptota horitzontal la recta $y = 0$.

$f(x) = \frac{1}{x} - 2x + 1$ té dues asímptotes: La recta $x = 0$, ja que, per exemple, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ i la recta $y = -2x + 1$, perquè

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (-2x + 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$. Per tant, la resposta A és vertadera.

La B és vertadera, tal com acabem de veure, i també la C.

La D és falsa, ja que $f(x) = \frac{1 - 2x^2 + x}{x}$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

5. Si $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$ llavors:

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ B. $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ C. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ D. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ per tant, la A és vertadera.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$. La C és falsa.

$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. La B és vertadera.

$\lim_{x \rightarrow -1} x^2 = 1$ i $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1}{x} = -1$. La D és vertadera.

Tria la relació correcta d'entre les dues afirmacions donades

6. Sigui $f(x) = x \cdot g(x)$ i siguin aquestes dues afirmacions:

1. La gràfica de g talla la recta $y = 1$.
2. La gràfica de f talla la recta $y = x$.

Llavors:

- A. $1 \Rightarrow 2$ però $2 \not\Rightarrow 1$ B. $2 \Rightarrow 1$ però $1 \not\Rightarrow 2$ C. $1 \Leftrightarrow 2$ D. 1 i 2 s'exclouen entre si.

$1 \Rightarrow 2$, perquè si existeix a tal que $g(a) = 1$, llavors $f(a) = ag(a) = a$, per tant, la gràfica de f talla la recta $y = x$, almenys el punt d'abscissa a .

$2 \not\Rightarrow 1$, perquè el fet que existeixi b tal que $f(b) = b$, és a dir, $bg(b) = b$ pot ocórrer sent $b = 0$ i $g(b) \neq 1$. Per exemple, si $g(x) = -x^2$ i $f(x) = x(-x^2) = -x^3$, la gràfica de f talla la recta $y = x$ (en el punt $(0, 0)$), però la gràfica de g mai no talla la recta $y = 1$.

Així doncs, la resposta correcta és la A.

Raona quina de les dades següents és innecessària

7. Per saber si l'equació $f(x) = 1$ té o no solució a l'interval $[-2, 2]$ es donen les dades següents:

1. $D(f) = \mathbb{R}$ 2. f és contínua a $[-2, 2]$ 3. $f(-2)$ és negativa 4. $2 < f(2)$

Llavors, pot eliminar-se, per innecessària:

- A. La dada 1
B. La dada 2
C. La dada 3
D. La dada 4

Sobra la dada 1. $D(f) = \mathbb{R}$, perquè, n'hi ha prou que el domini de f contingui l'interval $[-2, 2]$ i això està assegurat per la dada 2.