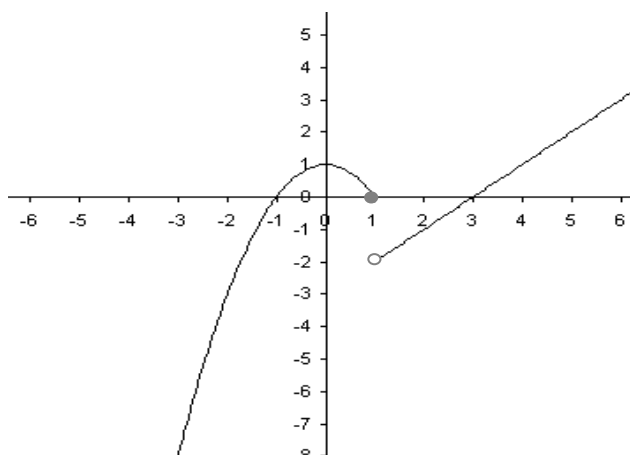


EXERCICIS DE FUNCIONS

1. De la funció definida a trossos del gràfic adjunt indica el valor dels límits següents:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$



2. Calcula el valor que ha de tenir k perquè la funció següent sigui contínua:

$$f(x) = \begin{cases} -kx + 2 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - k & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

Fes després el gràfic de la funció.

3. Estudia la continuïtat de la funció racional $y = \frac{2x^2 - 1}{x^2 - 4}$:

- Indica el tipus de discontinuïtat que es dóna.
- Calcula les asímptotes que tingui aquesta funció.
- Fes-ne la representació gràfica aproximada segons el teu estudi.

4. Calcula els límits de funcions següents:

a) $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} \frac{x^2 - 3}{x^2 + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{3x^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot e^x$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x+2)^{-x^2} \quad \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{x+5} \quad \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x}{4x-2} \right)^{2x-1} \quad \text{h) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2+1}{x^2-4}$$

5. Calcula els límits de funcions següents:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x^2+3x} \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{3x^2-5x+7}{-2x^2+50x}}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3-x^2+5}{2x \cdot (5-x)^2} \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3-\sqrt{5-x}}{1-\sqrt{5-x}}$$

6. Calcula els límits següents:

$$\begin{array}{llllll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} 2 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-5} & \text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{x^2} & \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 & \text{e) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-7) & \text{f) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^{10}} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^{10}} & \text{h) } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^{13}} & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{13}} & \text{j) } \lim_{x \rightarrow -1} x^6 & \text{k) } \lim_{x \rightarrow 0^-} x^3 & \text{l) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^6} \end{array}$$

7. Troba els límits següents:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^7 & \text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^7 & \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x} \\ \text{g) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 7^x & \text{h) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 7^x & \text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{7})^x \\ \text{m) } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 & \text{n) } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^5 & \text{ñ) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^2} \\ \text{r) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x & \text{s) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 5^x & \text{t) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^x \end{array}$$

8. Troba els límits següents:

$$\begin{array}{lll} \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x} & \text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^7} & \text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^7} \\ \text{j) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{7})^x & \text{k) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 7^{\frac{1}{x}} & \text{l) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 7^{\frac{1}{x}} \\ \text{o) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2} & \text{p) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^4} & \text{q) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^4} \\ \text{u) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^x & \text{v) } \lim_{x \rightarrow +\infty} 4^{x^2} & \text{w) } \lim_{x \rightarrow -\infty} 4^{x^2} \end{array}$$

9. Troba els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{x - 3}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 + 2x - 1}$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - x^6}{3x^2 + 2x - 1}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{x^3 - 3x^2 - 5}$

10. Troba els límits següents:

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{3x^2}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x - 2}$

k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^4}{-x^4 + 2x^2 - 5}$

l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{16}{x - 2}$

11. Determina el límit d'aquestes funcions:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x + 1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(3 - \frac{x - 4}{2} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{x-1}$

i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3)(2x - 3)$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 3x - 2}{x}$

m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x - 2}$

n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{6x - 2}{3x^3 - 7x + 1}$

12. Determina el límit d'aquestes funcions:

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 5x + 6)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (3 - x + x^2 - x^3)$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3}{5} \right)^{x^2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{\frac{2}{3x-1}}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{2x^3 + 1}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3 + 8x^2 - x + 8)$$

$$ñ) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 8x + 16}{35}$$

$$o) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5 - 2x + 3x^2 - x^3}{2x^2 - 5x - 4}$$

13. Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-4}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} 4x^4$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left[\frac{3}{x^3} \right]$$

$$g) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{2}{x^5} \right]$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3^{-x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3^{-x}$$

14. Calcula els límits següents:

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x^{-2}}{5} \right]$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left[\frac{x^5}{3} \right]$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^4 - 3x - 1}{x^3 + 3}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{3} \right]^x$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 2}}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2}{x^2 + 1} + \frac{3}{x + 2} \right]$$

15. Resol els següents límits:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{4x^2 - 1}{5x} \cdot \frac{6x}{x^3 + 1} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{1 - 2x} : \frac{5x^3}{x^2 + 12} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x^2 + 3}{5x} + \frac{6x - x^2}{3x} \right)$$

16. Calcula els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - x - 2}{2x^2 - 3x - 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12} \quad d) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 5x^2 + 6x}{x^3 + x^2 - 8x - 12}$$

17. Calcula aquests límits:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{x - 3}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 3}{(x - 1)^2}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - 3}{(x - 1)^2}$$

$$\text{g) } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$$

$$\text{h) } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + x - 6}{x^3 - x^2 - 8x + 12}$$

18. Calcula els límits següents:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x}{x^3 - 2x^2 + x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 9}{5x^2 - 13x - 6}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x^3 + 1}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - 3x^2}{x^2 + x}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4x + 4}$$

19. Calcula els límits següents:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \left[\frac{x^3 + 27}{x^2 - 9} \right]$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \left[\frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1} \right]$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x + 1} \cdot \frac{x^2 + 4}{x^2 - 2x} \right]$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

20. Calcula els límits laterals i el límit, quan existeixi, de les següents funcions en els punts que s'indiquen:

$$a) f(x) = \begin{cases} 2x-2 & \text{si } x < 3 \\ 2x & \text{si } 3 \leq x \end{cases} \text{ en } x = 3$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 1 & \text{si } x < 1 \\ x + 2 & \text{si } 1 \leq x \end{cases} \text{ en } x = 1$$

21. Donada la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 2x+5 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Calcula:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad b) \lim_{x \rightarrow -3} f(x) \quad c) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad d) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

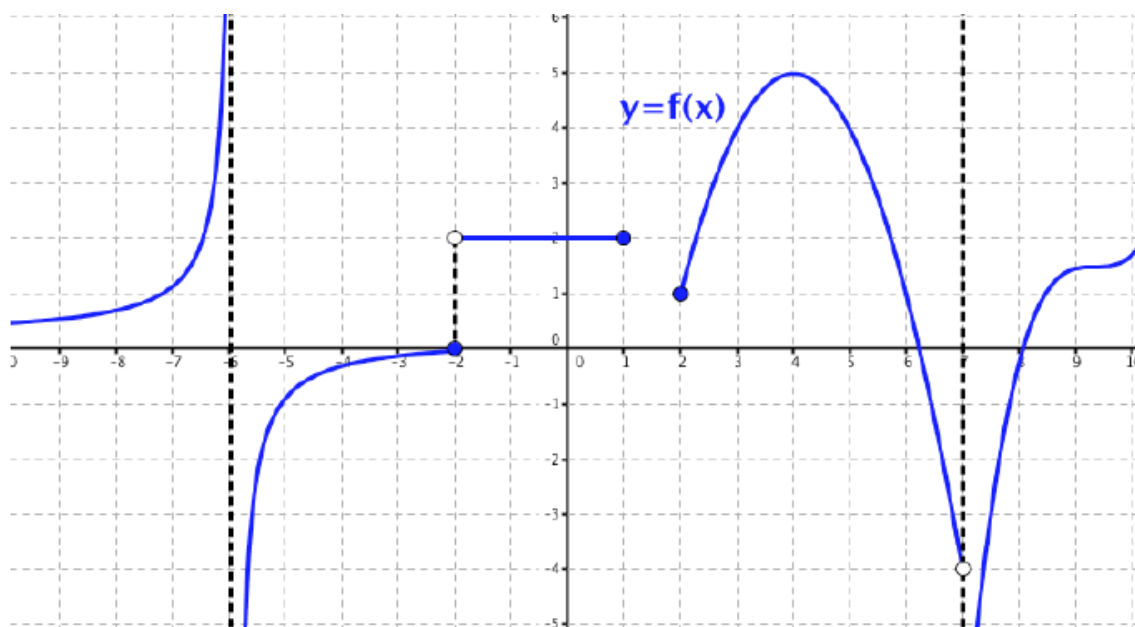
Té alguna discontinuïtat? **Justifica la resposta.**

22. Estudia la continuïtat de les funcions següents:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 4 \\ 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

23. Classifica **raonadament** les discontinuïtats que presenta la funció següent:



24. Estudia la continuïtat de les funcions següents:

$$a) f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x < 2 \\ x - 2 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ 5 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$b) g(x) = \begin{cases} \frac{5}{x-5} & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x+1} & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{10}{x+2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

25. Estudia la continuïtat de les funcions:

$$a) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq -1 \\ x^2 - 3 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} 3x-2 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 4x - 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 2 \\ x+11 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{4}{x-4} & \text{si } x < 0 \\ x-1 & \text{si } 0 < x \leq 3 \\ \frac{1}{x-3} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$d) f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x < -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si } -2 \leq x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

26. Determina el valor de "a" perquè aquesta funció sigui continua en tot R

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x} & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + a & \text{si } x > -2 \end{cases}$$

27. Determina el valor de b perquè la següent funció sigui contínua en tot el seu domini:

$$f(x) = \begin{cases} 2x-3 & \text{si } x \leq 3 \\ x+b & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

28. Troba el valor de k perquè la següent funció sigui contínua en $x = -2$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x+2} & \text{si } x \neq -2 \\ k & \text{si } x = -2 \end{cases}$$

29. Calcula m, n, p i q perquè la següent funció sigui contínua en tot $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x} & \text{si } x < -8 \\ -2m+3 & \text{si } -8 \leq x < -4 \\ x - \frac{1}{n} & \text{si } -4 \leq x < 2 \\ px & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

30. Calcula k, en cada cas, de manera que les següents funcions siguin contínues en tot $\mathbb{R}$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} kx-3 & \text{si } x < 4 \\ -x^2+10x-13 & \text{si } x \geq 4 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} 1+|x| & \text{si } x < 0 \\ k & \text{si } x = 0 \\ \frac{3}{2}x+1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

31. L'espai recorregut per un mòbil en funció del temps ve donat per la funció següent:

$$e(t) = \begin{cases} 3t^2 & \text{si } 0 \leq t < 2 \\ 3t+a & \text{si } 2 \leq t \leq 5 \\ -t^2+13t+b & \text{si } 5 < t \end{cases}$$

Determina els valors de a i b perquè la funció sigui contínua en $t = 2$ i $t = 5$

32. Un comerciant vol vendre un determinat producte, i per a això cobra 6 € per cada unitat. No obstant això, si se l'encarreguen més de 10 unitats, disminueix el preu per unitat, de manera que per cada x unitats cobra:

$$C(x) = \begin{cases} 6x & \text{si } 0 < x \leq 10 \\ \sqrt{600 + ax^2} & \text{si } x > 10 \end{cases}$$

- a) Troba el valor de a de manera que el preu varii de forma contínua al variar el nombre d'unitats que es compren.
- b) A quant tendeix el preu d'una unitat quan es compren moltíssimes unitats

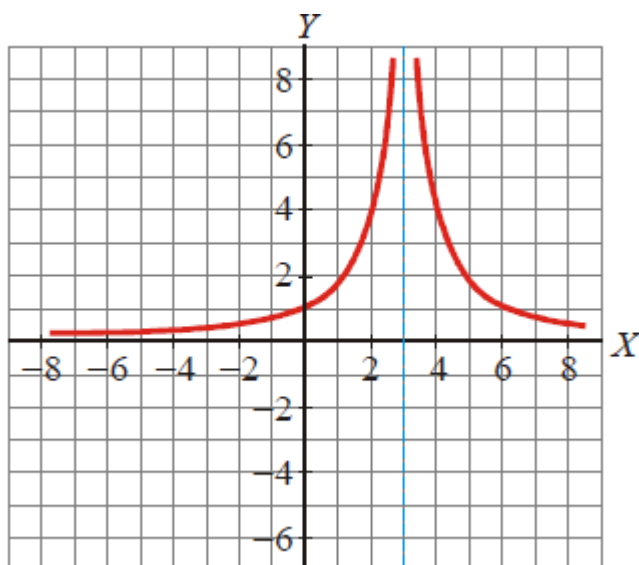
33. Dibuixa la gràfica d'una funció que s'ajusti a les condicions següents:

- Contínua en $\mathbb{R} - \{-3, 1, 5, 7\}$
- $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$, $f(1) = 0$
- Discontinuitat de salt finit en $x = 5$ i de salt infinit en $x = 7$
- $f(-2) = 0$

34. Dibuixa la gràfica d'una funció que s'ajusti a les condicions següents:

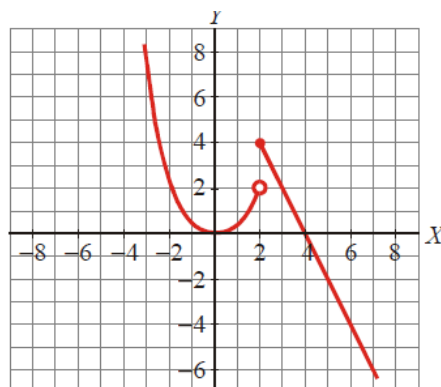
- $\text{Dom } f(x) = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -4\}$
- $f(-4) = 2$, $f(0) = 1$, $f(5) = 0$, $f(7) = -5$
- $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -3 & \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = 0 & \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 4 & \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = +\infty & \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -2 & \lim_{x \rightarrow 7^-} f(x) = 0 & \lim_{x \rightarrow 7^+} f(x) = -\infty \end{cases}$

35. Calcula els següents límits a partir de la gràfica de la funció:



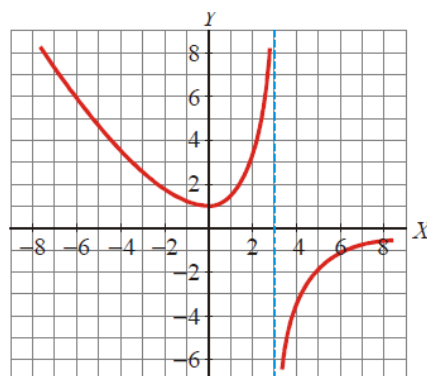
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

36. Donada la següent gràfica, calcula els límits que s'indiquen:



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

37. La següent gràfica correspon a la funció $f(x)$, sobre ella calcula:



a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

38. Calcula els següents límits:

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 1}{(2 - x)^3}$

2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - x^3}{x^2 - 1}$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 - x)^3}$

6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - x^3}{x^2}$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{4 - x^2}$

10) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{-1}{2x - 6}$

$$13) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 1}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3x^3)$$

$$17) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4}{1 + x^2}$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{3 - \sqrt{x^2 + 5}}$$

39. Calcula els següents límits:

$$3) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{5 + 3x}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x}{5 + 3x}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2 - x}$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 2x + 1}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2 + 1}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 5}{x + 3}$$

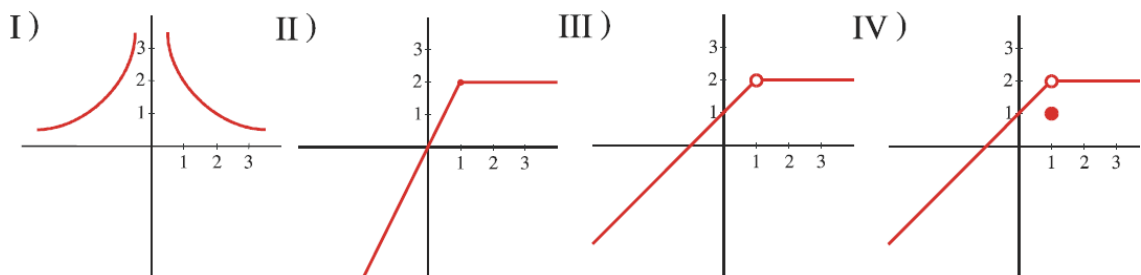
$$15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 3x}{x^2 - 1}$$

$$16) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2} - x^2 \right)$$

$$19) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{x^2 - 4}$$

$$20) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - 3x}{x^4 + 1}$$

40. Donades les funcions:



a) Estudia la continuïtat d'aquestes funcions

b) Troba la imatge de $x = 1$ per a cadascuna de les quatre funcions

41. Estudia la continuïtat de les següents funcions:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{3} & \text{si } x \leq 4 \\ x^2 - 15 & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$b) f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 3x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

42. Estudia la continuïtat de les següents funcions:

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{3x-1}{2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 0 \\ 1 - x^2 & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

43. Estudia la continuïtat de les següents funcions

$$d) f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$e) f(x) = \begin{cases} 2 - x^2 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

44. Estudia la continuïtat de la següent funció:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } -6 \leq x < -2 \\ 1 & \text{si } -2 < x \leq 1 \\ 2x + 1 & \text{si } 1 < x < 3 \\ -2x + 13 & \text{si } 3 \leq x < 5 \\ 3 & \text{si } x > 5 \end{cases}$$

45. Estudia la continuïtat de les següents funcions:

$$a) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 + x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$b) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x+2} & \text{si } x < 0 \\ \frac{3}{x+3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

46. Troba el valor de k per a què la funció f(x) sigui contínua en $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \neq 1 \\ k & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

47. Troba el valor de m per a què f(x) sigui contínua en tot $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 + mx - 1 & \text{si } x \leq 1 \\ 2x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

48. Troba les asímptotes de les següents funcions:

$$a) \quad f(x) = \frac{1}{4 - x^2}$$

$$b) \quad f(x) = \frac{2x^2}{(x+2)^2}$$

$$c) \quad f(x) = \frac{x+3}{x^2 - x - 2}$$

$$d) \quad f(x) = x^2 - x$$

49. Troba les asímptotes de les següents funcions:

$$a) \quad f(x) = \frac{-x^3 + x}{2}$$

$$b) \quad f(x) = \frac{x^3 - 1}{x + 3}$$

$$c) \quad f(x) = \frac{x}{x+2}$$

$$d) \quad \frac{x}{x^2 - 9}$$

50. Troba les asímptotes de les següents funcions:

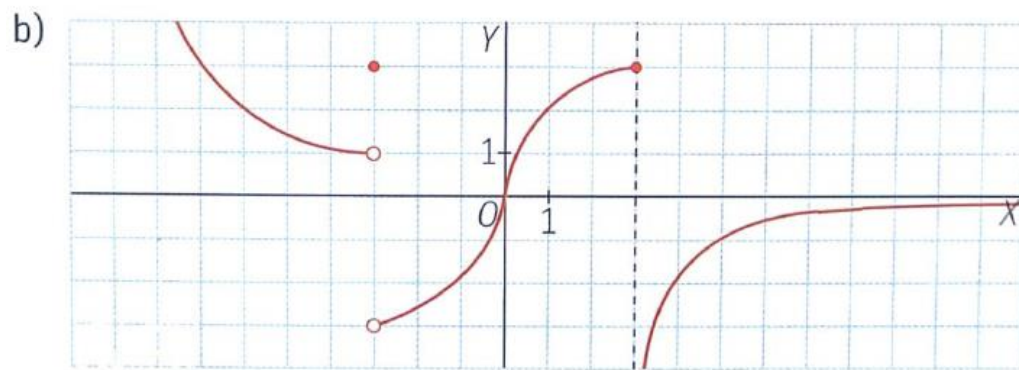
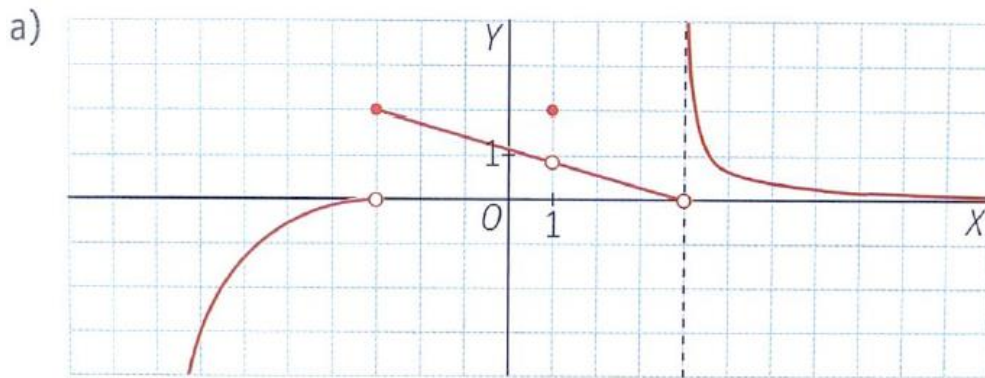
$$a) \quad f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{2x + 1}$$

$$b) \quad f(x) = \frac{1 - 3x}{2 - x}$$

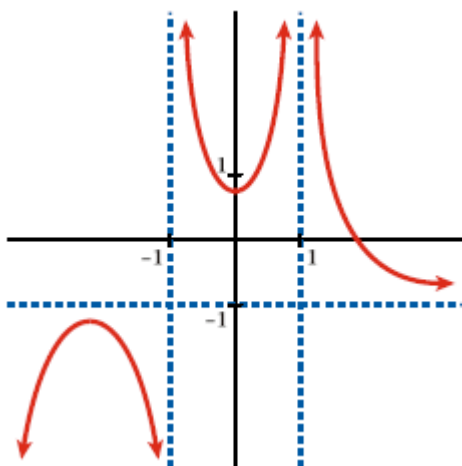
c) $f(x) = \frac{4x^2 - 3}{x}$

d) $f(x) = \frac{1 + x^2}{x^3}$

51. Troba les discontinuïtats de les següents funcions i digues **justificadament** de quin tipus són:



52. Troba, observant la gràfica de $f(x)$ els límits següents:



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$

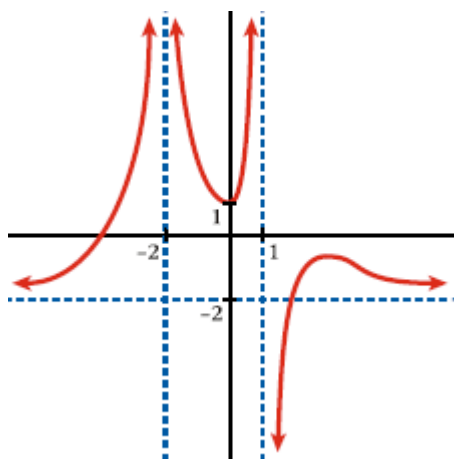
d) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

53. Troba, observant la gràfica de $f(x)$ els límits següents:



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$

g) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

54. Representa en **una única gràfica una única funció** que compleixi:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ($f(x) > 1$ si $x \rightarrow -\infty$)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$

55. Representa en **una única gràfica una única funció** que compleixi:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ($f(x) < 0$ si $x \rightarrow -\infty$)

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty$

56. Representa en **una única gràfica una única funció** que compleixi:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ($f(x) < 1$ si $x \rightarrow +\infty$)

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

57. Representa en **una única gràfica una única funció** que compleixi:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ ($f(x) > 2$ si $x \rightarrow +\infty$)

c) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

58. Calcula el domini de les funcions:

a) $f(x) = \frac{x+3}{x^2+x}$

b) $f(x) = \frac{x-2}{18-2x^2}$

c) $f(x) = \sqrt{2-(3x+5)}$

d) $f(x) = \frac{5x-2}{x^2+9}$

e) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-x-2}$

f) $f(x) = \begin{cases} 3x-1 & \text{si } x < 1 \\ 2x^2-1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

59. Donades les funcions $f(x)$ i $g(x)$, calcula l'expressió analítica de les funcions $(g \circ f)(x)$ i $(f \circ g)(x)$.

a) $f(x) = 2x-1$ i $g(x) = x^2+3$

b) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ i $g(x) = \frac{x-2}{x}$

60. Donades les funcions $f(x) = \sqrt{x}$ i $g(x) = x+1$, calcula les composicions fog, gof, fof i gog.

61. Obté les inverses de les següents funcions:

(A) $f(x) = 2x+3$

(B) $f(x) = \frac{3x-1}{4}$

(C) $f(x) = \frac{3\sqrt{x}-1}{4}$

(D) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{4}}$

62. Donades les funcions $f(x) = (x+1)/2$ i $g(x) = 2/(x+1)$, obté les funcions compostes fog i gof

63. Donades les funcions $f(x) = (3x+1)/2$ i $g(x) = (2x-1)/3$

a) Calcula les funcions compostes gof i fog

b) Calcula les funcions compostes fof i gog

c) Calcula la inversa de la funció f i la de la funció g

64. Donades les funcions $f(x) = 1/(x+1)$ i $g(x) = (3x+1)/(2x+1)$, calcula

a) fog

- b) gof
- c) fof
- d) gog
- e) $f^{-1}(x)$
- f) $g^{-1}(x)$

65. Troba el domini de les següents funcions

a) $f(x) = \sqrt{\frac{x+3}{x-5}}$ b) $g(x) = \frac{x-3}{x^2-4}$

c) $h(x) = x^2 - 3x + 2$

66. Donades les funcions $f(x) = 3x - 2$ i $g(x) = \frac{x+1}{2x-3}$, troba $(g \circ f)(x)$ i $g^{-1}(x)$

67. El benefici obtingut per la producció i venda de x quilograms d'un article ve donat per la funció $B(x) = -0.01x^2 + 3.6x - 180$

- a) Representa gràficament aquesta funció
- b) Determina el nombre de quilograms que s'han de produir i vendre perquè el benefici sigui màxim

68. Un empresari comprova que, als 5 anys de funcionament de la seva empresa, els beneficis van pujar a 30.000 € i, als 10 anys, a 35000, tenint la funció forma de recta.

Quins beneficis va obtenir als 7 anys?

Quants anys haurien de passar per què els beneficis fossin de 42.000 €?

69. Donada la funció $f(x) = \frac{x}{2x-6}$

- a) Calcula el punt d'intersecció amb l'eix d'ordenades.

- b) Calcula el punt d'intersecció amb l'eix d'abscisses.
- c) Troba les asímptotes de la funció.
- d) Fes la representació gràfica.
- e) A partir del gràfic de l'apartat anterior, escriu els intervals de creixement i decreixement de la funció.

70. Donada la funció $f(x) = \frac{-2}{x+4}$

- a) Calcula el punt d'intersecció amb l'eix d'ordenades.
- b) Calcula el punt d'intersecció amb l'eix d'abscisses.
- c) Troba les asímptotes de la funció.
- d) Fes la representació gràfica.
- e) A partir del gràfic de l'apartat anterior, escriu els intervals de creixement i decreixement de la funció.

71. El preu d'un bitllet d'una línia d'autobusos és la suma d'una quantitat fixa i una altra proporcional al nombre de quilòmetres del recorregut. S'han pagat 18 € per un bitllet a una població que és a 500 km i 33 € per un altre a una ciutat que és a 1000 km. Quant haurem de pagar per un bitllet a una població que és a 250 km?

72. Fa quatre anys es va repoblar un llac amb una nova espècie de peixos. Llavors es van introduir 100 exemplars d'aquesta nova espècie. Actualment s'estima que hi ha 25.000 exemplars. S'estima que el nombre N de peixos ve donat en funció del temps t per la funció $N = Ae^{Bt}$, on A i B són dues constants. El temps t es considera expressat en anys des del moment de la repoblació. Quant temps haurem d'esperar perquè hi hagi 200.000 exemplars?

73. Sigui $f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x < 1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

Per a quins valors del paràmetre a la funció és contínua?

74. Considereu la funció definida a trossos següent:

a) Calculeu els valors de a i de b per tal que $f(x)$ sigui contínua per a tot x .

$$f(x) = \begin{cases} -4x + a & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 5 & \text{si } -2 < x < 1 \\ bx + 3 & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

b) Feu un gràfic de la funció obtinguda en l'apartat anterior.

75. Una entitat financera llança al mercat un pla d'inversió, la rendibilitat $R(x)$ del qual, en milers de pessetes, ve donada en funció de la quantitat x que s'inverteixi, per mitjà de l'expressió següent:

$$R(x) = -0.001x^2 + 0.5x + 2.5$$

a) Deduïu raonadament quina quantitat de diners li convé invertir a un client en aquest pla per obtenir rendibilitat màxima.

b) Quina rendibilitat obtindria en aquest cas?

76. En una indústria es produeixen recanvis de peces d'automòbil. S'ha fet un estudi de costos d'un dels recanvis fabricats i ha resultat que el cost diari de producció de x peces (en ptes.) ve donat per la funció

$$C(x) = 3200 + 20x + 2x^2.$$

a) Quantes peces d'aquest recanvi s'han de produir diàriament perquè el cost unitari (el cost de cada peça) sigui el mínim possible?

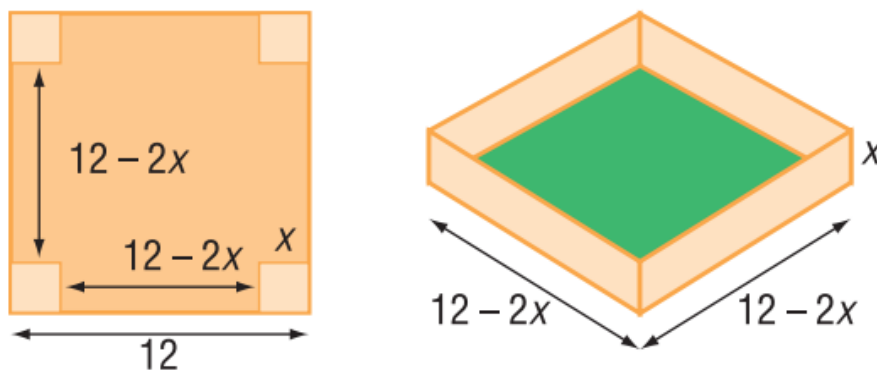
b) Quin és el cost diari de fabricar aquest nombre de peces?

c) Quin és, en aquest cas, el preu de cost de cada peça?

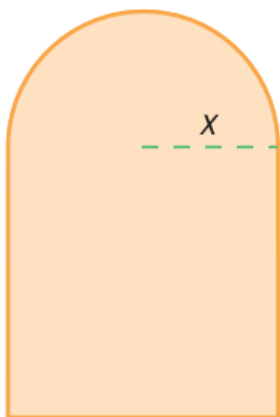
77. En una certa zona, la quantitat de sofre que hi ha a l'atmosfera, en parts per milió, evoluciona d'acord amb la funció $s(t) = 2,1 - 0,2t + 0,03t^2$, on t és el temps expressat en anys. Determina la presència de sofre en l'actualitat i quants anys han de transcórrer perquè s'assoleixi novament el valor actual.

78. Defineix la funció que expressa la suma de dos nombres enters tals que el seu producte és 18. Troba'n el domini.

79. En un triangle, la suma de les longituds de la base i l'altura és 15 cm. Expressa l'àrea del triangle en funció de la longitud de la base. Troba el domini d'aquesta funció.
80. Volem construir una capsa sense tapa amb una cartolina quadrada de 12 cm de costat. Per fer-ho, retallem quadrats iguals de costat x cm en cadascuna de les quatre cantonades de la cartolina. Determina l'expressió algebàrica que ens dona el volum de la capsa, en funció del valor de x . Indica el domini d'aquesta funció.

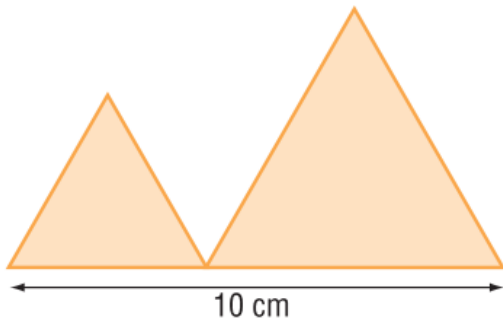


81. Troba el domini de la funció que expressa l'àrea d'un rectangle de 30 cm de perímetre en funció de la longitud d'un dels costats.
82. L'altura d'un cilindre és el triple del radi de la base. Escriu l'expressió del volum del cilindre en funció del radi de la base. Quin serà el volum del cilindre per a un radi de 5 cm? Quin és el valor del radi de la base si el volum del cilindre és de $24 \pi \text{ cm}^3$? Troba el domini de la funció suposant que el volum màxim és de $3,75 \cdot 10^5 \pi \text{ cm}^3$.
83. Dos nombres naturals sumen 20. Expressa'n el producte en funció d'un d'ells. Troba el domini d'aquesta funció. Comprova que 15 és del domini, i que 28 no ho és.
84. Es vol construir una finestra formada per un quadrat i un semicercle de radi x (fi g. 9.10). Troba les expressions del perímetre i de l'àrea de la finestra en funció de x . Indica el domini de cadascuna d'aquestes funcions.



85. El radi d'una taca d'oli circular creix a un ritme de 3 cm per minut i el centre es troba a 9 cm del marge de la taula.
- a) Expressa la funció que assigna a cada instant t el valor del radi de la taca.
 - b) Quant trigarà la taca d'oli a arribar al marge de la taula?
 - c) Escriu l'expressió algèbrica de la funció que assigna a cada instant t el valor de l'àrea de la taca d'oli.
 - d) Calcula l'àrea en l'instant en què la taca arriba al marge de la taula.
86. Suposem que establir una trucada telefònica costa 0,50 € i, a partir d'aquest moment, el preu és de 0,30 € per minut. Troba l'expressió algèbrica de la funció que ens determina l'import d'una trucada telefònica en funció de la seva durada. Quant costarà una trucada de 8 minuts? Quants minuts ha durat una trucada l'import de la qual és de 5,30 €?
87. La funció $f(t) = 2t^2 + 5t$ expressa la distància recorreguda per un mòbil en funció del temps, on t s'expressa en segons i $f(t)$, en metres. Troba la distància recorreguda pel mòbil entre els instants $t = 1$ s i $t = 2$ s. Quant de temps trigarà el mòbil a recórrer una distància de 75 m?
88. En mesurar la temperatura a diferents alçades, s'ha observat que la temperatura disminueix 1°C cada 200 m d'alçada. Si en un dia determinat la temperatura arran de terra és de 12°C , escriu l'expressió algèbrica de la funció $t(h)$, essent h l'alçada en metres i $t(h)$ la temperatura en $^\circ\text{C}$. Quina temperatura hi haurà a 6 km d'alçada? A quina alçada hi haurà una temperatura de -50°C ?

89. Dividim un segment de 10 cm de longitud en dues parts. Expressa la suma de les àrees dels triangles equilàters construïts sobre cadascuna d'aquestes dues parts, en funció del costat d'un dels triangles. Troba'n el domini.



90. El nombre d'articles n produïts en una empresa un dia qualsevol, t hores després de l'inici de la feina, és $n(t) = -t^2 + 20t$, amb una jornada laboral de vuit hores diàries. Si el cost de producció de n articles és, en euros, $c(n) = 5 + 6n$, determina l'expressió de la funció $c(t)$ que en dona el cost en funció del temps. Indica'n el domini.
91. Un venedor té un salari mensual que està determinat per un sou fix més un cert percentatge sobre el volum de vendes que ha fet durant el mes. Si ven per valor de 2000 €, el seu salari és de 1200 € i, si ven per valor de 2500 €, el salari és de 1300 €. Troba el percentatge que guanya sobre el total de vendes i el sou fix.
92. Dos projectils A i B són llançats fins caure en la superfície del mar. Les següents funcions expressen l'altitud en metres, sobre el nivell del mar, a què es troben en cada instant de temps x , en segons.

Projectil A: $f(x) = -25x^2 + 750x$

Projectil B: $g(x) = -5x^2 + 250x + 2000$

- Quin projectil aplega a major altitud? Quina és aquesta major altitud?
- Quan es troben els dos projectils a la mateixa altitud? Quines són aquestes altituds?
- En quins instants de temps es troba el projectil A 1000 m més alt que el B?

- d) Quan la diferència d'altitud de A respecte de B és màxima? Quina és aquesta màxima diferència?
- e) Representa gràficament les dues funcions en els mateixos eixos de coordenades.

93. L'altura en metres que assoleix un projectil en funció del temps en segons des que és llançat es pot expressar amb una funció quadràtica de la forma $f(x) = ax^2 + bx$.

- a) Obtén els valors de a i de b per als quals el projectil es troba als 10 i als 20 segons a 6000 metres d'altura.
- b) Calcula la major altura que assoleix el projectil i l'instant de temps en que l'assoleix.

94. Un projectil es troba, al segon de ser llançat, a 190 metres d'altura, als 2 segons, a 360 metres, i als 5 segons, a 750 metres d'altura. Suposem que l'altura y en funció del temps x es pot expressar amb una funció quadràtica de la forma $y = ax^2 + bx + c$.

- a) Obtén la funció quadràtica que s'ajusta a aquestes dades.
- b) Obtén la major altura que assoleix el projectil i l'instant en què assoleix aquesta màxima altura.

95. Sabem que la velocitat d'un mòbil als 10 minuts de començar un trajecte era de 250 km/h i als 30 minuts era de 450 km/h, la qual va ser la màxima velocitat assolida al llarg del trajecte.

- a) Obtén els valors de a , b i c per als quals la funció $f(x) = ax^2 + bx + c$ representa la velocitat en funció del temps transcorregut.
- b) Quina va ser la duració total del trajecte?

96. Una empresa ha estimat que anualment els seus ingressos en euros venen donats per la funció $I(x) = 7x^2 + 9000x$, mentre que els costos venen donats per la funció $C(x) = 11x^2 + 3000x + 560000$, on x representa el nombre d'unitats fabricades i venudes. Si els beneficis són els ingressos menys els costos:

a) Expressa la funció benefici, i obtén quantes unitats cal vendre per a maximitzar el benefici. Quin és el valor d'aquest màxim benefici?

b) A partir de quina quantitat d'unitats l'empresa obté beneficis?

97. Una agència proposa un viatge conjunt a 60 persones, al preu de 1 000 € per persona. Amb la finalitat d'obtenir el nombre més gran possible de clients, per cada viatger addicional als inicialment proposats, redueix en 10 € el preu del viatge per persona.

a) Expressa els ingressos totals de l'agència en funció del nombre addicional de viatgers x .

b) A partir de quin nombre addicional de viatgers l'agència perd diners?

c) Quin és el nombre addicional de viatgers que proporciona majors ingressos a l'agència? Quins són aquests ingressos màxims?

98. Un bancal té actualment 20 arbres que produeixen 250 kg de fruita cadascun. Per a augmentar la producció es vol trasplantar més arbres, però s'estima que per cada arbre addicional trasplantat, la producció de cada arbre del bancal disminuirà en 5 kg.

a) Obté una funció que expressi la producció total en funció del nombre addicional x d'arbres trasplantats.

b) Obté el nombre d'arbres que cal trasplantar perquè la producció total sigui màxima i el valor d'aquesta màxima producció.

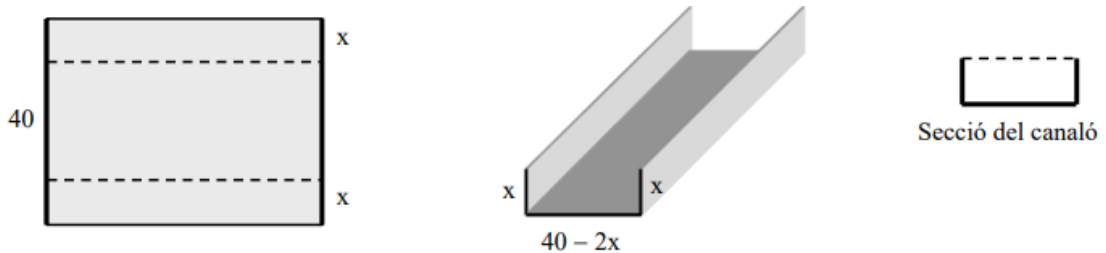
99. Volem construir una habitació rectangular que tingui un perímetre de 20 metres. Anomenem x i y a les dimensions de l'habitació i A la seva àrea.

a) Expressa y en funció de x . Quin tipus de funció és?

b) Expressa A en funció de x . Quin tipus de funció és?

c) Obté les dimensions de l'habitació amb major àrea possible, i el valor d'aquesta àrea.

100. Obtén el major valor que pot prendre el producte de dos nombres positius que sumen entre si una unitat. Repeteix la pregunta si els nombres sumen entre si m unitats.
101. Suposem que el preu en euros d'una pedra preciosa és igual al quadrat del seu pes en grams. Una pedra que pesa 10 grams (val 100 €) es trenca en dues parts.
- Si una part pesa 2 grams, calcula el preu total de les dues parts. Quants diners hem perdut?
 - Si una part pesa x grams, expressa el preu total de les dues parts en funció de x .
 - Obtén el valor de x para al qual el preu total de les dues parts és mínim i calcula aquest valor
102. Un metal·lúrgic vol construir canalons de secció rectangular doblegant, pels dos laterals, una porció de longitud x d'una làmina de metall de 40 cm d'amplària. L'àrea de la secció del canaló està directament relacionada amb la capacitat del canaló per a transportar aigua, a major secció major capacitat.



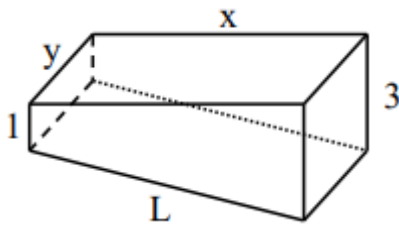
- Si vol que l'àrea de la secció sigui de 150 cm^2 , quina longitud x ha de doblegar?
- I si vol que l'àrea sigui de 180 cm^2 ?
- Expressa l'àrea de la secció del canaló en funció de x .
- Obté el valor de x per al qual l'àrea de la secció del canaló té la major àrea possible i, per tant, pot transportar més aigua.

103. Una aixeta aboca 5 m^3 d'aigua per hora. Estableix una funció que calculi el temps que tardaria a omplir un dipòsit en funció del volum del mateix.
104. Volem construir una habitació rectangular que tingui una àrea de 25 m^2 . Anomenem x i y a les longituds dels seus costats, i p al seu perímetre.
- a) Expressa y en funció de x . Quin tipus de funció obtenim?
 - b) Expressa p en funció de x . Quin tipus de funció obtenim?
 - c) Obté el valor de x per al qual el perímetre de l'habitació és de 40 metres.
 - d) Repeteix l'anterior pregunta per a perímetres de 35, 30, 25, 20 i 15 metres. A la vista dels resultats, quin és el menor perímetre que pot tenir l'habitació? Per què?
105. Una persona compra dos productes immobiliaris A i B per un preu de 120 € i 90 €, respectivament. El producte A incrementa el seu valor mensualment en un 2%, mentre que el B ho fa en un 4%. Anomenem x al nombre de mesos transcorreguts des de la compra dels dos productes.
- a) Obté dues funcions $f(x)$ i $g(x)$ que representen el valor de cada producte x mesos després de ser comprat.
 - b) Quants mesos passaran perquè el valor d'aquests dos productes sigui el mateix?
 - c) Anomenem $p(x)$ a la proporció que representa el valor del producte A respecte de la suma dels valors dels dos productes. Quin tipus de funció obtenim?
 - d) Quants mesos tenen que passar perquè la proporció $p(x)$ sigui de 0.5? I de 0.45? I de 0.3? Quin és el menor valor que pot prendre aquesta proporció?
106. El nombre d'individus (en milions) d'una determinada colònia d'insectes varia en funció del temps t (en dies) a través de la funció

$$P(t) = \frac{550t + 1000}{t + 20}, \quad \forall t \geq 0.$$

- a) Quants insectes hi haurà transcorreguts 30 dies?
- b) Quant de temps passarà perquè hi haja 450 milions d'insectes?
- c) Troba les asímtotes i la representació gràfica. Comprova que la funció creix sempre, voldrà dir que la colònia d'insectes creixerà indefinidament?

107. Volem construir una piscina rectangular amb un perímetre de 18 metres, que tingui al principi 1 m de profunditat, i al final 3 m (mira la figura). Anomenem x i y a les longituds dels costats de la piscina



- a) Expressa y en funció de x .
- b) Expressa L en funció de x .
- c) Expressa l'àrea de la superfície de la piscina en funció de x .
- d) Expressa l'àrea del fons de la piscina en funció de x .
- e) Expressa l'àrea de les parets de la piscina en funció de x .