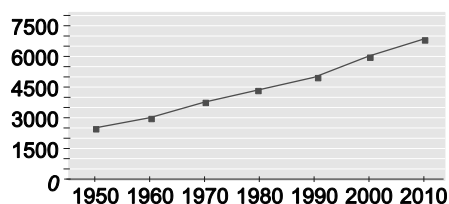


9. Funcions

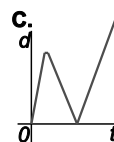
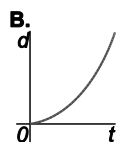
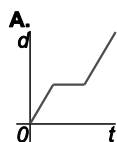
EXERCICIS PROPOSATS

1 i 2. Exercicis resolts.

3. Dibuixa la gràfica de la funció que reflecteix la població mundial de la taula de la pàgina anterior.



4. Les gràfiques següents representen la distància a casa en funció del temps. Quina d'aquestes reflecteix més bé la situació següent: "Vaig sortir de casa i vaig haver de tornar-hi perquè em vaig adonar que m'havia deixat l'atles"?



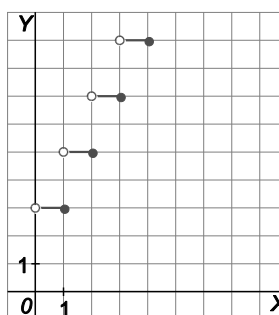
La gràfica que reflecteix millor la situació és la c.

5. La tarifa d'un aparcament és de 3 € la primera hora més 2 € per cada hora o fracció addicional. Representa de totes les maneres possibles la funció que dona el preu de l'estacionament durant les sis hores que pot estar aparcant un cotxe.

Fórmula

$$f(t) = \begin{cases} 3 & \text{si } 0 < t \leq 1 \\ 5 & \text{si } 1 < t \leq 2 \\ 7 & \text{si } 2 < t \leq 3 \\ 9 & \text{si } 3 < t \leq 4 \\ 11 & \text{si } 4 < t \leq 5 \\ 13 & \text{si } 5 < t \leq 6 \end{cases}$$

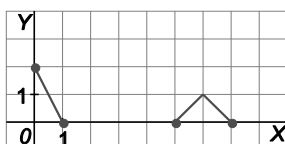
Gràfica



Taula

Temps (en hores)	(0,1]	(1,2]	(2,3]	(3,4]	(4,5]	(5,6]
Preu (en euros)	3	5	7	9	11	13

6. Dibuixa una possible gràfica per a la funció f sent $D(f) = [0, 1] \cup [5, 7]$ i $R(f) = [0, 2]$.

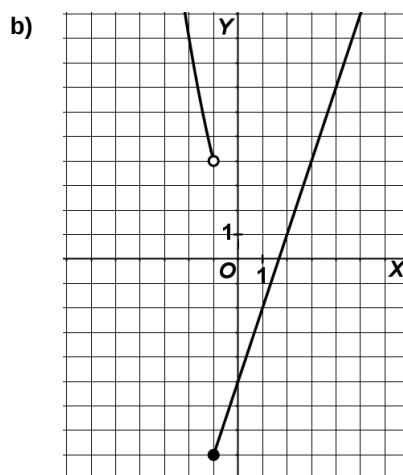
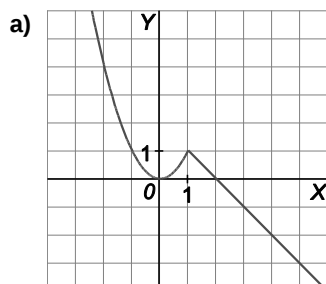


Resposta oberta, per exemple, la representada a la gràfica.

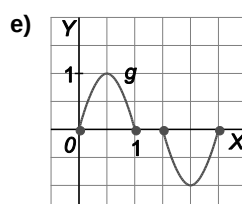
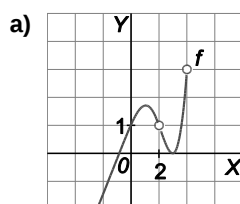
7. Dibuixa la gràfica d'aquestes funcions.

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x+2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{si } x < -1 \\ 3x-5 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$



8. Troba el domini i el recorregut de les funcions:



b) $f(x) = x^2 + 1$

f) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x-6}$

g) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

h) $f(x) = \sqrt{1-x^2} - \sqrt{x^2-1}$

a) $D(f) = (-\infty, 2) \cup (2, 4)$ i $R(f) = (-\infty, 3)$.

b) $D(f) = \mathbb{R}$. Com que $x^2 \geq 0$, $R(f) = [1, +\infty)$.

c) $D(f) = \mathbb{R} - \{6\}$. Com que l'equació $a = \frac{1}{x-6}$ té solució si $a \neq 0$, $R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$.

d) Perquè existeixi l'arrel hauria de ser $x^2 - 2x \geq 0$, per tant, $D(f) = (-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$. Com que $x^2 - 2x$ pot prendre qualsevol valor real, $R(f) = [0, +\infty)$.

e) $D(f) = [0, 1] \cup [1.5, 2.5]$ i $R(f) = [-1, 1]$.

f) Com que $x^2 + x + 2$ és sempre positiu, $D(f) = \mathbb{R}$. Com que $x^2 + x + 2 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4}$, $R(f) = \left[\frac{\sqrt{7}}{2}, +\infty\right)$.

g) $D(f) = (0, +\infty)$ i $R(f) = (0, +\infty)$.

h) Perquè existeixi l'arrel ha de ser $1 - x^2 \geq 0$ i $x^2 - 1 \geq 0$, per tant, $D(f) = \{-1, 1\}$ i $R(f) = \{0\}$.

9. Exercici resolt.

10. Indica en quins intervals són creixents i decreixents aquestes funcions:

a) $f(x) = 5x + 2$ b) $f(x) = -2x + 6$ c) $f(x) = x^2$ d) $f(x) = -x^2$

a) $f(x)$ és una recta amb el pendent positiu $\Rightarrow$ és creixent a tot $\mathbb{R}$.

b) $f(x)$ és una recta amb el pendent negatiu $\Rightarrow$ és decreixent a tot $\mathbb{R}$.

c) $f(x)$ és una paràbola amb el vèrtex a l'origen de coordenades i les branques cap amunt, ja que el coeficient de x^2 és positiu $\Rightarrow$ és decreixent a $(-\infty, 0)$ i creixent a $(0, +\infty)$.

d) $f(x)$ és una paràbola amb el vèrtex a l'origen de coordenades i les branques cap avall perquè el coeficient de x^2 és negatiu $\Rightarrow$ és creixent a $(-\infty, 0)$ i decreixent a $(0, +\infty)$.

11. Troba els punts de tall amb els eixos de les funcions següents i estudia'n el signe.

a) $f(x) = x^5 - 2x^3 + x$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$ c) $f(x) = |x|$ d) $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$

a) $f(-x) = (-x)^5 - 2(-x)^3 + (-x) = -x^5 + 2x^3 - x = -f(x)$. Per tant, $f(x)$ és imparell.

b) $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 - 4} = \frac{x^2}{x^2 - 4} = f(x)$. Per tant, $f(x)$ és parell.

c) $f(-x) = |-x| = |x| = f(x)$. Per tant, $f(x)$ és parell.

d) $f(-x) = \frac{1}{(-x)^3 + 1} = \frac{1}{-x^3 + 1}$. $f(-x) \neq f(x)$. $f(-x) \neq -f(x)$. Per tant, $f(x)$ no és ni parell ni imparell.

12. Siguin les funcions $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$, $g(x) = \sqrt{x + 3}$ i $h(x) = x^2 - 4$. Troba l'expressió i el domini de:

a) $\frac{g}{h}$ b) $f \circ g$ c) $g \circ f$ d) $f \circ g \circ h$

Observem que: $D(f) = \mathbb{R}$, $D(g) = [-3, +\infty)$ i $D(h) = \mathbb{R}$

a) $\left(\frac{g}{h}\right)(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2-4}$, $D\left(\frac{g}{h}\right) = [-3, +\infty) - \{-2, 2\}$

b) $(f \circ g)(x) = f(\sqrt{x+3}) = \frac{\sqrt{x+3}}{x+2}$, $D(f \circ g) = [-3, +\infty) - \{-2\}$

c) $(g \circ f)(x) = g\left(\frac{x}{x^2-1}\right) = \sqrt{\frac{3x^2+x-3}{x^2-1}}$, $D(g \circ f) = \left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{37}}{6}\right] \cup (-1, 1) \cup \left[\frac{-1+\sqrt{37}}{6}, +\infty\right)$

d) $(f \circ g \circ h)(x) = (f \circ g)(x^2 - 4) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-2}$, $D(f \circ g \circ h) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty) - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

13. Obtén el domini de la funció inversa de $f(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$.

$$D(f^{-1}) = R(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

14. Calcula la inversa de $f(x) = \frac{2x+1}{3}$, dibuixa les gràfiques de f i f^{-1} i comprova que

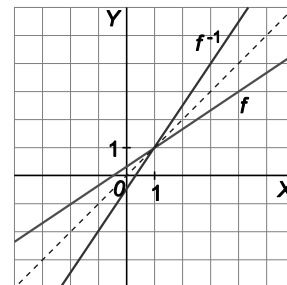
$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x.$$

$$y = \frac{2x+1}{3} \Rightarrow x = \frac{3y-1}{2} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{3x-1}{2}$$

Totes dues funcions són rectes i les seves gràfiques són les que es veuen a la figura.

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{3x-1}{2}\right) = \frac{2 \cdot \frac{3x-1}{2} + 1}{3} = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}\left(\frac{2x+1}{3}\right) = \frac{3 \cdot \frac{2x+1}{3} - 1}{2} = x$$



15. Sigui $f(x) = x^5 - x + 1$. Utilitza la calculadora i aproxima $f^{-1}(10)$.

$f(1) = 1$ i $f(2) = 31$, per tant, $f^{-1}(10)$ es troba entre 1 i 2. Si fem aproximacions millors, tenim $f(1,5) \approx 7,09$; $f(1,6) \approx 9,89$; $f(1,61) \approx 10,21$ i $f(1,605) \approx 10,05$, per tant, $f^{-1}(10)$ es troba entre 1,6 i 1,605.

16. Exercici interactiu.

- 17 a 19. Exercicis resolts.

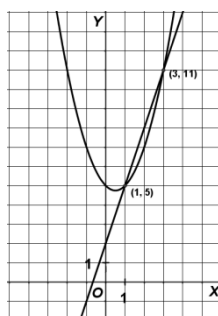
20. Considera la funció lineal $f(x) = 3x + 2$ i la funció quadràtica $g(x) = x^2 - x + 5$.

- Calcula els valors de x que tenen la mateixa imatge per a $f(x)$ que per a $g(x)$.
- Representa gràficament les dues funcions en un mateix sistema de coordenades.
- Comprova que els valors trobats en el primer apartat coincideixen amb els punts d'intersecció de les dues gràfiques.

- a) S'igualen les dues funcions:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow 3x + 2 = x^2 - x + 5 \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases}$$

- b)



- c) Efectivament, les dues funcions es tallen en els punts d'abscisses $x = 1$ i $x = 3$.

21. Determina a , b i c en la funció quadràtica $f(x) = ax^2 + bx + c$ per tal que $f(-1) = 8$, $f(3) = 20$ i $f(1) = 8$. Algun d'aquests punts de la gràfica és el seu vèrtex?

$$\begin{cases} a - b + c = 8 \\ 9a + 3b + c = 20 \\ a + b + c = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + 8 - a - b = 8 \\ 9a + 3b + 8 - a - b = 20 \\ c = 8 - a - b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ a = \frac{3}{2} \\ c = \frac{13}{2} \end{cases}$$

La funció és $f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{13}{2}$. És una funció parella, ja que $f(x) = f(-x)$. Així doncs, el vèrtex es troba a l'eix d'ordenades: $\left(0, \frac{13}{2}\right)$.

22. Calcula k per tal que l'abscissa del vèrtex de la funció quadràtica $f(x) = kx^2 - 2x + 6$ sigui igual a $\frac{1}{4}$.

L'abscissa del vèrtex d'una paràbola és $x_v = \frac{-b}{2a}$. Així doncs, $\frac{1}{4} = \frac{-(-2)}{2k} \Rightarrow 2k = 8 \Rightarrow k = 4$.

23. Calcula k per tal que l'ordenada del vèrtex de la funció quadràtica $f(x) = x^2 - kx + k^2$ sigui igual a 12.

Si l'abscissa del vèrtex és $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-k)}{2} = \frac{k}{2}$, l'ordenada serà

$$y_v = \left(\frac{k}{2}\right)^2 - k \frac{k}{2} + k^2 = 12 \Rightarrow \frac{3k^2}{4} = 12 \Rightarrow k^2 = 16 \Rightarrow k = \pm 4$$

24 i 25. Exercicis resolts.

26. Considera les funcions racionals següents:

$$f(x) = \frac{3}{x-2}, \quad g(x) = \frac{x+1}{x^2-4} \quad i \quad h(x) = \frac{x^2-1}{x^2-2x+4}$$

- a) Per a quins valors s'anul·len els denominadors.
b) Indica el domini de cadascuna de les funcions.

- a) El denominador de $f(x)$ s'anul·la per a $x = 2$, el de $g(x)$ s'anul·la per a $x = \pm 2$, i el de $h(x)$ no s'anul·la mai perquè $x^2 - 2x + 4 = 0$ no té solució real.

- b) $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$; $D(g) = \mathbb{R} - \{2, -2\}$ i $D(h) = \mathbb{R}$

27. De les funcions següents, indica quines són simètriques respecte a l'origen de coordenades i quines respecte a l'eix d'ordenades.

a) $f(x) = \frac{3}{x}$

b) $f(x) = \frac{-1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{x-3}{x}$

d) $f(x) = \frac{2}{x^3}$

Són simètriques respecte a l'origen de coordenades la a) i la d). La a) perquè $f(-x) = \frac{3}{-x} = -\frac{3}{x} = -f(x)$, i la d)

perquè $f(-x) = \frac{2}{(-x)^3} = -\frac{2}{x^3} = -f(x)$.

Per altra banda, la b) és simètrica respecte de l'eix d'ordenades perquè $f(-x) = \frac{-1}{(-x)^2} = \frac{-1}{x^2} = f(x)$.

A la funció c) cap de les dues és simetria perquè $f(-x) = \frac{-x-3}{-x} = \frac{x+3}{x} \neq f(x)$ i $f(-x) \neq -f(x)$.

28 i 29. Exercicis resolts.

30. Determina el valor del paràmetre a per tal que la funció irracional $f(x) = \sqrt{x-a}$ tingui com a domini l'interval $[3, +\infty)$.

S'ha de complir que $a = 3$, ja que el domini de $f(x) = \sqrt{x-3}$ són tots els nombres reals tals que $x-3 \geq 0$.

31. El domini de la funció $f(x) = \frac{x}{x-1}$ és el conjunt $\mathbb{R} - \{1\}$. Coincideix amb el domini de la funció $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$?

No coincideix perquè la primera funció $f(x) = \frac{x}{x-1}$ és una funció racional, mentre que la segona funció

$f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-1}}$ és una funció irracional que té per radicand una fracció. El seu domini són tots els nombres reals tals

que $\frac{x}{x-1} \geq 0$ i $x-1 \neq 0$: $D(f) = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty)$.

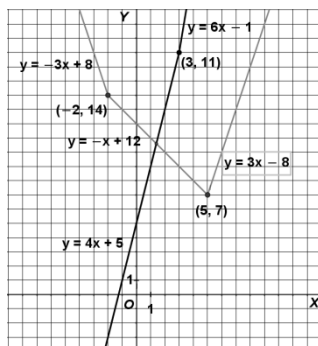
32 i 33. Exercicis resolts

34. Escriu com a funcions a trossos aquestes funcions i dibuixa'n la gràfica:

a) $f(x) = |-x+3| + 5x+2$ b) $f(x) = |x+2| + |2x-10|$

a) $f(x) = |-x+3| + 5x+2 = \begin{cases} -x+3+5x+2 = 4x+5 & \text{si } x \leq 3 \\ x-3+5x+2 = 6x-1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

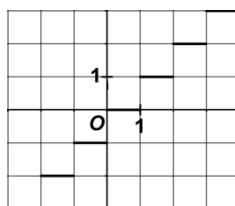
$$b) f(x) = |x+2| + |2x-10| = \begin{cases} x+2+2x-10 = 3x-8 & \text{si } x \geq 5 \\ x+2-2x+10 = -x+12 & \text{si } -2 \leq x \leq 5 \\ -x-2-2x+10 = -3x+8 & \text{si } x \leq -2 \end{cases}$$



35. Amb l'ajuda d'una taula de valors, representa aquesta funció:

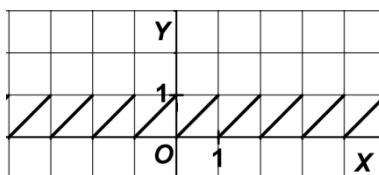
$$f(x) = x - \text{ent}(x)$$

La funció part entera té aquesta forma:



Una taula de valors és:

x	-2	-1,5	-1	-0,2	0	0,4	1	1,7	2
f(x)	0	0,5	0	0,8	0	0,4	0	0,7	0



36 a 38. Exercicis resolts.

39. Expressa aquestes funcions en la forma $f(x) = a^x$.

a) $f(x) = 4^{-x}$

b) $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x}$

c) $f(x) = \frac{2^x}{3^x}$

d) $f(x) = \frac{10^x}{5^{-x}}$

$$\text{a) } f(x) = 4^{-x} = \frac{1}{4^x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x$$

$$\text{b) } f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^{-x} = 3^x$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{2^x}{3^x} = \left(\frac{2}{3}\right)^x$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{10^x}{5^{-x}} = 10^x \cdot 5^x = (10 \cdot 5)^x = 50^x$$

- 40** La gràfica de la funció $f(x) = 5^x$ passa pel punt (a, b) . Comprova que la de la funció $f(x) = \left(\frac{1}{5}\right)^x$ passa per $(-a, b)$.

Si $f(x) = 5^x$ passa per (a, b) , vol dir que $f(a) = 5^a = b$.

Aleshores: $f(-a) = \left(\frac{1}{5}\right)^{-a} = 5^a = b$. Per tant, passa per $(-a, b)$

- 41** Determina el domini d'aquestes funcions:

$$\text{a) } f(x) = \log(x^2 - x - 6)$$

$$\text{b) } f(x) = \log \sqrt[3]{1 - x^2}$$

$$\text{c) } f(x) = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

$$\text{d) } f(x) = \log\left(\frac{\sqrt{x}}{x-1}\right)$$

La funció logarítmica està definida per a $x > 0$. Per tant, s'han de trobar els valors de x per als quals es pot prendre el logaritme.

$$\text{a) } x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2) \cup (3, +\infty) \Rightarrow D(f) = (-\infty, -2) \cup (3, +\infty)$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{1-x^2} > 0 \Leftrightarrow 1-x^2 > 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0 \Rightarrow x \in (-1, 1) \Rightarrow D(f) = (-1, 1)$$

$$\text{c) } \frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

$$\text{d) } \frac{\sqrt{x}}{x+1} > 0 \Rightarrow x \in (0, +\infty) \Rightarrow D(f) = (0, +\infty)$$

- 42.** Calcula la base d'una funció exponencial que passa pel punt $(5, 32)$.

La base és 2 perquè $2^5 = 32$. S'escriu $f(x) = 2^x$.

- 43.** Exercici resolt.

44. Dona en cada cas dos valors possibles de y :

a) $f(x) = \sin(x+y) = \sin x$

b) $f(x) = \cos(x+y) = \cos x$

c) $f(x) = \cos(x+y) = \sin x$

d) $f(x) = \operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg} x$

a) És evident que per a $y = 0$ i $y = 2\pi$ es compleix la igualtat.b) $y = 0$ i $y = 2x$ perquè $\cos(x+y) = \cos(x-2x) = \cos(-x) = \cos x$

c) Si $y = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \cos(x+y) = \cos\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{3\pi}{2} - \sin x \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = -\sin x \cdot (-1) = \sin x$

$$y = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \cos(x+y) = \cos\left(x + \frac{-\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{-\pi}{2} - \sin x \cdot \sin \frac{-\pi}{2} = -\sin x \cdot (-1) = \sin x$$

d) $y = 0$ i $y = \pi \Rightarrow \operatorname{tg}(x+y) = \operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$ **45. Dona en cada cas dos valors possibles de y :**

a) $f(x) = \sin(x+y) = -\sin x$

b) $f(x) = \cos(x+y) = -\cos x$

c) $f(x) = \cos(x+y) = -\sin x$

d) $f(x) = \sin(x+y) = -\cos x$

a) $y = \pi \Rightarrow \sin(x+\pi) = -\sin x$

$$y = -\pi \Rightarrow \sin(x-\pi) = \sin x \cdot \cos(-\pi) - \cos x \cdot \sin(-\pi) = -\sin x$$

b) $y = \pi \Rightarrow \cos(x+\pi) = \cos x \cdot \cos \pi - \sin x \cdot \sin \pi = -\cos x$

$$y = -\pi \Rightarrow \cos(x-\pi) = \cos x \cdot \cos(-\pi) - \sin x \cdot \sin(-\pi) = -\cos x$$

c) $y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{2} - \sin x \cdot \sin \frac{\pi}{2} = -\sin x$

$$y = \frac{-3\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(x + \frac{-3\pi}{2}\right) = \cos x \cdot \cos \frac{-3\pi}{2} - \sin x \cdot \sin \frac{-3\pi}{2} = -\sin x$$

d) $y = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \cos \frac{3\pi}{2} + \cos x \cdot \sin \frac{3\pi}{2} = -\cos x$

$$y = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \sin\left(x + \frac{-\pi}{2}\right) = \sin x \cdot \cos \frac{-\pi}{2} + \cos x \cdot \sin \frac{-\pi}{2} = -\cos x$$

46. Exercici resolt.**47. A partir de la gràfica de f , esbossa les gràfiques de les funcions següents.**

a) $g(x) = f(x) + 4y$

d) $h(x) = f(x) - 1$

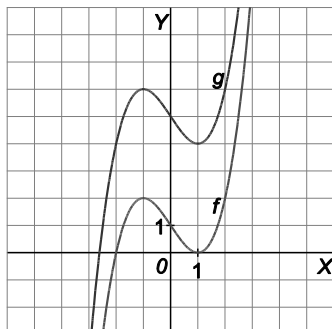
b) $g(x) = f(x+4)$

e) $h(x) = f(x-1)$

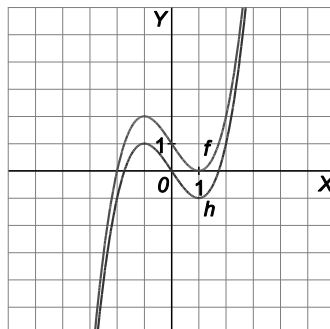
c) $g(x) = 3f(x)$

f) $h(x) = f(3x)$

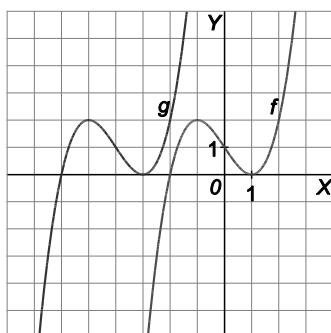
- a) g s'obté mitjançant una translació vertical, desplaçant la gràfica de f 4 unitats cap amunt.



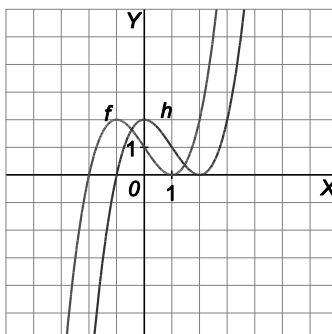
- d) h s'obté mitjançant una translació vertical, desplaçant la gràfica de f 1 unitat cap avall.



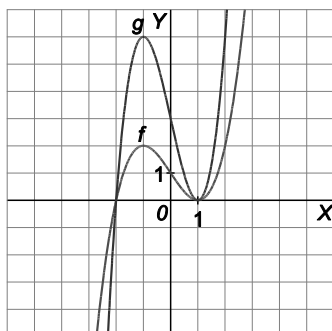
- b) g s'obté mitjançant una translació horitzontal, desplaçant f 4 unitats cap a l'esquerra.



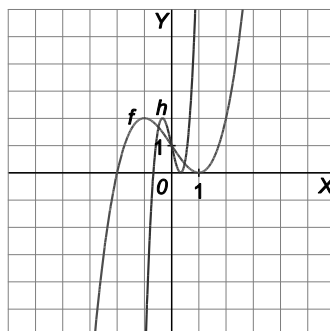
- e) h s'obté mitjançant una translació horitzontal, desplaçant f 1 unitat cap a la dreta.



- c) g s'obté a partir de f mitjançant una dilatació vertical.



- f) h s'obté a partir de f mitjançant una dilatació horitzontal.



48 a 58. Exercicis resoltos.

EXERCICIS

Concepte de funció. Domini i recorregut

59. Obtén el domini de les funcions següents.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$

c) $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$

e) $f(x) = \sqrt{(x-1)(2x+3)}$

g) $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{3-x}{5-x}}$

b) $f(x) = \frac{x^2+1}{x-1}$

d) $f(x) = \frac{x+2}{x^2-4}$

f) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-1)(2x+3)}}$

h) $f(x) = 1 + \sqrt{\frac{5-x}{3-x}}$

 a) $D(f) = \mathbb{R}$, perquè el denominador no s'anul·la en cap nombre real.

 b) $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$, perquè el denominador s'anul·la a $x=1$.

 c) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$, perquè el denominador s'anul·la a $x=-2$.

 d) $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$, perquè el denominador s'anul·la a $x=-2$ i $x=2$.

 e) Ha de ser $(x-1)(2x+3) \geq 0$, per tant, $D(f) = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right] \cup [1, +\infty)$.

 f) Ha de ser $(x-1)(2x+3) > 0$, per tant, $D(f) = \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup (1, +\infty)$.

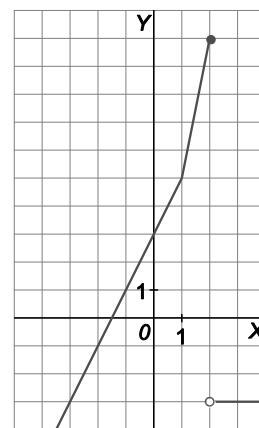
 g) Ha de ser $\frac{3-x}{5-x} \geq 0$, per tant, $D(f) = (-\infty, 3] \cup (5, +\infty)$.

 h) Ha de ser $\frac{5-x}{3-x} \geq 0$, per tant, $D(f) = (-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$.

60. Representa la gràfica de la funció:

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{si } x < 1 \\ x^2+2x+2 & \text{si } 1 \leq x \leq 2 \\ -3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

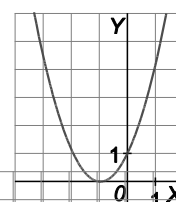
La gràfica de $f_1(x) = 2x+3$ és una recta que passa pels punts $(0, 3)$ i $(1, 5)$. La gràfica de $f_2(x) = x^2+2x+2$ és una paràbola amb vèrtex a $(-1, 1)$ i que passa per $(1, 5)$ i $(2, 10)$. La gràfica de $f_3(x) = -3$ és la recta horitzontal $y = -3$.



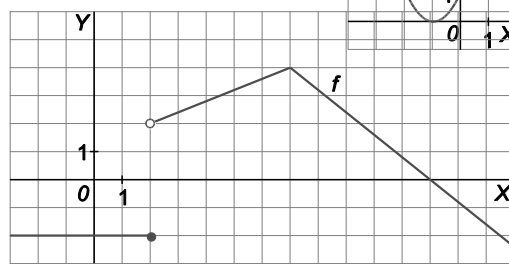
61. Representa gràficament la funció que es correspon amb les dades de la taula següent i busca una expressió analítica per a aquesta funció.

x	-2	0	1	3
y	1	1	4	16

Com que $f(-2) = f(0)$ podem pensar que es tracta d'una paràbola amb eix de simetria a $x = -1$, és a dir, una expressió de la forma $f(x) = a(x+1)^2 + b$. Si la forcéssim a passar per $(0, 1)$ i $(1, 4)$ obtindríem $f(x) = (x+1)^2$, que també compleix que $f(3) = 16$, per tant, l'expressió és vàlida.



62. Troba una expressió analítica de la funció que té per gràfica



la següent.

$$f(x) = \begin{cases} -2 & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{2x+6}{5} & \text{si } 2 < x < 7 \\ \frac{-4x+48}{5} & \text{si } x \geq 7 \end{cases}$$

Operacions amb funcions

63. Definim dues funcions $f(x) = \frac{1}{x}$ i $g(x) = \frac{1}{x-2}$. Demuestra que $(f \circ g)(x) = x - 2$ i justifica que el domini d'aquesta funció no sigui $\mathbb{R}$.

$(f \circ g)(x) = f\left(\frac{1}{x-2}\right) = x - 2$. Com que $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ i $D(g) = \mathbb{R} - \{2\}$, la composició no està definida a $x = 2$ ni en els punts on s'anul·li g . Com que la funció g no s'anul·la a cap valor, $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{2\}$.

64. A partir de $f(x) = x^2 - x - 2$, $g(x) = \sqrt{2x-4}$, $h(x) = \frac{1}{x^2-4}$ i $t(x) = 1 - x^2$, calcula les funcions següents i troba'n els dominis.

- | | | | |
|----------------------------------|----------------------------------|----------------|-----------------------------|
| a) $(f-t)(x)$ | d) $(g \circ t)(x)$ | g) $f^{-1}(x)$ | j) $t^{-1}(x)$ |
| b) $\left(\frac{f}{h}\right)(x)$ | e) $(fh)(x)$ | h) $g^{-1}(x)$ | k) $(h \circ g \circ t)(x)$ |
| c) $(h \circ g)(x)$ | f) $\left(\frac{f}{t}\right)(x)$ | i) $h^{-1}(x)$ | l) $(t \circ t \circ g)(x)$ |

a) $(f-t)(x) = f(x) - t(x) = 2x^2 - x - 3$. Com que $D(f) = D(t) = \mathbb{R}$, $D(f-t) = \mathbb{R}$.

b) $\left(\frac{f}{h}\right)(x) = \frac{f(x)}{h(x)} = \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{2x-4}}$. El domini de $\frac{f}{h}$ està format pels valors per als quals existeixen f i h i, a més, no anul·len h . Per tant, tot i que l'expressió de $\frac{f}{h}$ sigui polinòmica, $D\left(\frac{f}{h}\right) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

c) $(h \circ g)(x) = h(g(x)) = h(\sqrt{2x-4}) = \frac{1}{2x-8}$. Tenim $D(g) = [2, +\infty)$, però si $2x-4 = 4$, és a dir, si $x = 4$, no existeix $(h \circ g)(x)$, per tant, $D(h \circ g) = [2, 4) \cup (4, +\infty)$.

d) $(g \circ t)(x) = g(t(x)) = g(1-x^2) = \sqrt{-2x^2-2}$. Com que sempre és negatiu $-2x^2-2$; $D(g \circ t) = \emptyset$.

e) $(fh)(x) = f(x)h(x) = \frac{x^2-x-2}{x^2-4}$ i $D(fh) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

f) $\left(\frac{f}{t}\right)(x) = \frac{f(x)}{t(x)} = \frac{x^2-x-2}{1-x^2}$ i $D\left(\frac{f}{t}\right) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

g) Com que $f(x)$ no és injectiva, no té inversa.

h) $y = \sqrt{2x-4} \Rightarrow x = \frac{y^2+4}{2} \Rightarrow g^{-1}(x) = \frac{x^2+4}{2}$ i $D(g^{-1}) = R(g) = [0, +\infty)$.

i) Com que $j(x)$ no és injectiva, no té inversa.

- j) Com que $t(x)$ no és injectiva, no té inversa.
- k) El domini d'aquesta funció és buit, ja que $g(x)$ només està definida si $x \geq 2$, però el recorregut de t és $(-\infty, 1]$.
- l) $(t \circ t \circ g)(x) = t(t(g(x))) = t(t(\sqrt{2x-4})) = t(-2x+5) = 1 - (-2x+5)^2$ i $D(t \circ t \circ g) = D(g) = [2, +\infty)$ malgrat que l'expressió de $t \circ t \circ g$ és polinòmica.

Propietats de les funcions

65. Per a les funcions següents, determina'n el domini, calcula'n els punts de tall amb els eixos i estudia'n el signe, segons els valors que prengui la variable independent al llarg del domini. Esbossa la gràfica de la funció.

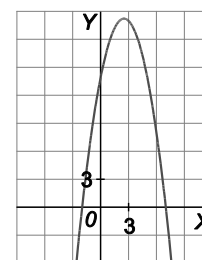
- a) $f(x) = -x^2 + 5x + 14$ d) $f(x) = x(x^2 + 2)(x^2 - 1)$ g) $f(x) = \frac{x(x-5)^2}{(x+1)^2(x-1)}$
- b) $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3)$ e) $f(x) = \frac{x(x^2 - 9)}{(x+1)(x-1)}$ h) $f(x) = \frac{(x^2 - 9)x}{x+3}$
- c) $f(x) = (x^2 + 2x)(x-1)^2(x-3)$ f) $f(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 9)}{3(x^2 + 1)}$

a) Domini: $D(f) = \mathbb{R}$

Talls: Eix Y: $f(0) = 14 \Rightarrow A(0, 14)$

Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow -x^2 + 5x + 14 = 0 \Rightarrow x = -2, x = 7 \Rightarrow B(-2, 0)$ i $C(7, 0)$

Signe: $f(x) = -(x+2)(x-7) \Rightarrow f$ és positiva a $(-2, 7)$ i negativa a $(-\infty, -2) \cup (7, +\infty)$.

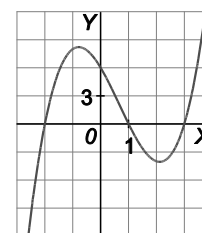


b) Domini: $D(f) = \mathbb{R}$

Cortes: Eix Y: $f(0) = 6 \Rightarrow A(0, 6)$

Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x+2)(x-1)(x-3) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1, x = 3 \Rightarrow B(-2, 0), C(1, 0)$ i $D(3, 0)$

Signe: $f(x) = (x+2)(x-1)(x-3) \Rightarrow$ és positiva a $(-2, 1) \cup (3, +\infty)$ i negativa a $(-\infty, -2) \cup (1, 3)$

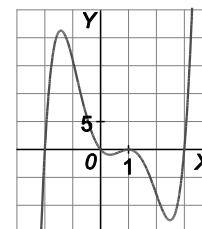


c) Domini: $D(f) = \mathbb{R}$

Talls: Eix Y: $f(0) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 + 2x)(x-1)^2(x-3) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 0, x = 1, x = 3 \Rightarrow B(-2, 0), A(0, 0), C(1, 0)$ i $D(3, 0)$

Signe: $f(x) = x(x+2)(x-1)^2(x-3) \Rightarrow f$ és positiva a $(-2, 0) \cup (3, +\infty)$ i negativa a $(-\infty, -2) \cup (0, 1) \cup (1, 3)$.

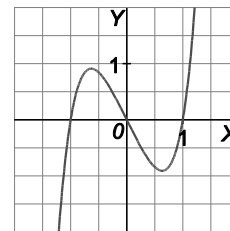


d) Domini: $D(f) = \mathbb{R}$

Talls: Eix Y: $f(0) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 + 2)(x^2 - 1) = 0 \Rightarrow x = -1, x = 0, x = 1 \Rightarrow B(-1, 0), A(0, 0)$ i $C(1, 0)$

Signe: $f(x) = x(x^2 + 2)(x + 1)(x - 1) \Rightarrow f$ és positiva a $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$ i negativa a $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

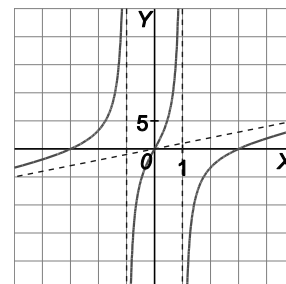


e) Domini: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Talls: Eix Y: $f(0) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow x(x^2 - 9) = 0 \Rightarrow x = -3, x = 0, x = 3 \Rightarrow B(-3, 0), A(0, 0)$ i $C(3, 0)$

Signe: $f(x) = \frac{x(x+3)(x-3)}{(x+1)(x-1)} \Rightarrow f$ és positiva a $(-3, -1) \cup (0, 1) \cup (3, +\infty)$ i negativa a $(-\infty, -3) \cup (-1, 0) \cup (1, 3)$.



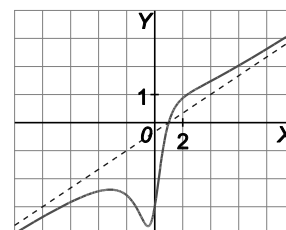
Per dibuixar la gràfica només cal observar que la funció és imparella, les rectes $x = -1$, $x = 1$ són asímptotes verticals i la recta $y = x$ és asímptota obliqua.

f) Domini: $D(f) = \mathbb{R}$

Talls: Eix Y: $f(0) = -3 \Rightarrow A(0, -3)$

Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x^2 + 9) = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow B(1, 0)$

Signe: $f(x) = \frac{(x-1)(x^2 + 9)}{3(x^2 + 1)} \Rightarrow f$ és positiva a $(1, +\infty)$ i negativa a $(-\infty, 1)$.



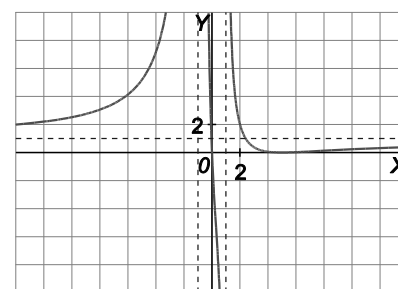
Per dibuixar la gràfica només cal observar que la recta $y = \frac{x}{3} - \frac{1}{3}$ és asímptota obliqua.

g) Domini: $D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Talls: Eix Y: $f(0) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow x(x-5)^2 = 0 \Rightarrow x = 0, x = 5 \Rightarrow A(0, 0)$ i $B(5, 0)$

Signe: $f(x) = \frac{x(x-5)^2}{(x+1)^2(x-1)} \Rightarrow f$ és negativa a $(0, 1)$ i positiva a $(-\infty, -1) \cup (-1, 0) \cup (1, 5) \cup (5, +\infty)$.



Per dibuixar la gràfica només cal observar que les rectes $x = -1$, $x = 1$ són asímptotes verticals i la recta $y = 1$ és asímptota horitzontal.

- h) Observem que si $x \neq -3$ tenim $f(x) = (x-3)x$, per tant, la gràfica de f és una paràbola a la qual es treu el punt $(-3, 18)$.

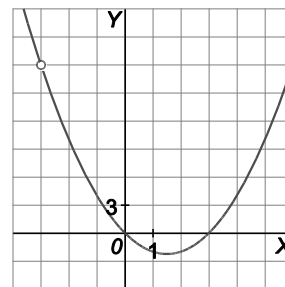
Domini: $D(f) = \mathbb{R} - \{-3\}$

Talls: Eix Y: $f(0) = 0 \Rightarrow A(0, 0)$

Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x^2 - 9)x = 0 \Rightarrow x = -3$ (no vàlid), $x = 0$, $x = 3 \Rightarrow$

$A(0, 0)$ y $B(3, 0)$

Signe: $f(x) = \frac{(x+3)(x-3)x}{x+3} = x(x-3)$ si $x \neq -3$, f és positiva a $(-\infty, -3) \cup (-3, 0) \cup (3, +\infty)$ i negativa a $(0, 3)$.



66. Calcula els punts de tall amb els eixos de la funció $f(x) = x^2 + 2x + 2 + \frac{10}{x-3}$. Troba'n el domini i estudia'n el signe, segons els valors que prengui la variable independent al llarg del domini. [Nota: escriu la funció donada com a quocient de dos polinomis]

$$f(x) = x^2 + 2x + 2 + \frac{10}{x-3} = \frac{(x-3)(x^2 + 2x + 2) + 10}{x-3} = \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{x-3} = \frac{(x-1)(x+2)(x-2)}{x-3}$$

Domini: $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$

Talls: Eix Y: $f(0) = -\frac{4}{3} \Rightarrow A\left(0, -\frac{4}{3}\right)$

Eix X: $f(x) = 0 \Rightarrow (x-1)(x+2)(x-2) = 0 \Rightarrow x = -2, x = 1, x = 2 \Rightarrow B(-2, 0), C(1, 0)$ i $D(2, 0)$

Signe: f és positiva a $(-\infty, -2) \cup (1, 2) \cup (3, +\infty)$ i negativa a $(-2, 1) \cup (2, 3)$.

67. Estudia si les funcions següents tenen simetria respecte de l'eix Y o respecte de l'origen de coordenades.

a) $f(x) = \frac{1}{|x^2 + 1|}$

e) $f(x) = \frac{x^4 + x}{2x + 1}$

i) $f(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$

b) $f(x) = x(x-1)(x+1)$

f) $f(x) = \frac{x^4(x^2 - 9)}{(x+1)(x-1)}$

j) $f(x) = \cos\left(\frac{x^4 + 1}{x}\right)$

c) $f(x) = x^2 - 3x$

g) $f(x) = x^2|x|$

d) $f(x) = x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1)$

h) $f(x) = \frac{x^3}{|x| - x^2}$

a) $f(-x) = \frac{1}{|(-x)^2 + 1|} = \frac{1}{|x^2 + 1|} = f(x) \Rightarrow$ la funció és parella, és a dir, simètrica respecte de l'eix Y.

b) $f(-x) = -x(-x-1)(-x+1) = -x(x+1)(x-1) = -f(x) \Rightarrow$ la funció és imparella, és a dir, simètrica respecte de l'origen de coordenades.

c) $f(-x) = x^2 + 3x$ no coincideix amb $f(x)$ ni amb $-f(x)$, la funció no és parella ni imparella.

d) $f(-x) = x^2(x^2 - 1)(x^2 + 1) = f(x) \Rightarrow$ la funció és parella, és a dir, simètrica respecte de l'eix Y.

e) $f(-x) = \frac{x^4 - x}{-2x + 1}$ no coincideix amb $f(x)$ ni amb $-f(x)$, la funció no és parella ni imparella.

f) $f(-x) = \frac{x^4(x^2-9)}{(-x+1)(-x-1)} = \frac{x^4(x^2-9)}{(x-1)(x+1)} = f(x) \Rightarrow$ la funció és parella, és a dir, simètrica respecte de l'eix Y.

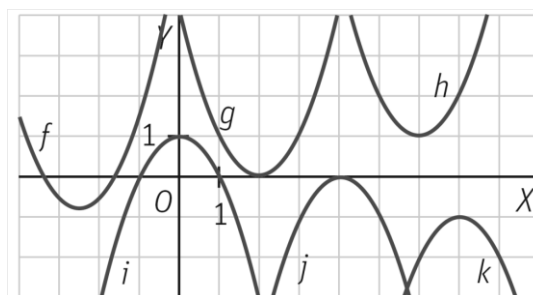
g) $f(-x) = x^2|x| = f(x) \Rightarrow$ la funció és parella, és a dir, simètrica respecte de l'eix Y.

h) $f(-x) = \frac{-x^3}{|x|-x^2} = -f(x) \Rightarrow$ la funció és imparella, és a dir, simètrica respecte de l'origen de coordenades.

i) $f(-x) = \sin\left(\frac{-x}{x^2+1}\right) = \sin\left(-\frac{x}{x^2+1}\right) = -\sin\left(\frac{x}{x^2+1}\right) = -f(x) \Rightarrow$ la funció és imparella, és a dir, simètrica respecte de l'origen de coordenades.

j) $f(-x) = \cos\left(\frac{x^4+1}{-x}\right) = \cos\left(-\frac{x^4+1}{x}\right) = \cos\left(\frac{x^4+1}{x}\right) = f(x) \Rightarrow$ la funció és parella, és a dir, simètrica respecte de l'eix Y.

68. Hem representat sis funcions quadràtiques de fórmula $f(x) = ax^2 + bx + c$. N'hi ha tres en què $a > 0$ i en les altres tres, $a < 0$. En dues, el discriminant $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, en dues més, $\Delta = 0$, i en les altres dues $\Delta < 0$.



Classifica-les segons el signe del paràmetre a i segons el signe del discriminant.

Funció						
	f	g	h	i	j	k
a	$a > 0$	$a > 0$	$a > 0$	$a < 0$	$a < 0$	$a < 0$
Δ	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$	$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$

69. Una paràbola talla els eixos en els punts $(-1, 0)$, $(5, 0)$ i $(0, -10)$. Quin és el seu vèrtex?

Com que una paràbola és simètrica respecte a la recta vertical que passa pel vèrtex (l'eix), l'abscissa del vèrtex serà el punt mitjà entre les abscisses dels punts de tall amb l'eix X, així, $x_v = \frac{5-1}{2} = 2$.

D'altra banda, la paràbola és de la forma $f(x) = a(x+1)(x-5)$, amb la qual cosa $f(0) = -10 \Rightarrow -5a = -10 \Rightarrow a = 2$, és a dir, la paràbola és $f(x) = 2(x+1)(x-5) = 2x^2 - 8x - 10$ i l'ordenada del vèrtex és $y_v = f(2) = -18$.

Per tant, les coordenades del vèrtex són $V = (2, -18)$.

70. Fes un estudi complet de les paràboles donades per:

a) $f(x) = -x^2 + 2x + 3$

b) $f(x) = x^2 + 7x + 10$

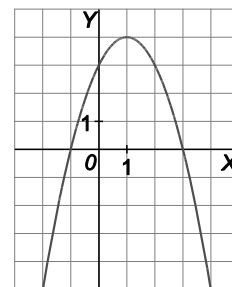
a) Es una paràbola còncaua cap avall ($\cap$) amb un màxim absolut en el vèrtex

$x_v = \frac{-2}{-2} = 1$ ($y_v = 4$) i eix de simetria la recta $x = 1$.

El punt de tall amb eix Y és (0, 3) i els punts de tall amb l'eix X són (-1, 0) i (3, 0).

Fem una taula de valors:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	-5	0	3	4	3	0	-5



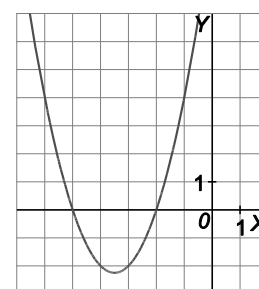
b) La gràfica és una paràbola còncaua cap amunt ($\cup$) amb un mínim absolut en el

vèrtex $x_v = -\frac{7}{2}$ ($y_v = -\frac{9}{4}$) i eix de simetria la recta $x = -\frac{7}{2}$.

El punt de tall amb l'eix Y és (0, 10) i amb l'eix X són (-5, 0) i (-2, 0).

Fem una taula de valors:

x	-6	-5	-4	$-\frac{7}{2}$	-3	-2	-1
y	4	0	-2	$-\frac{9}{4}$	-2	0	4



71. Representa gràficament les paràboles següents. Primer calcula'n el vèrtex, l'eix de simetria i les interseccions amb els eixos de coordenades.

a) $f(x) = x^2 + 4x + 3$

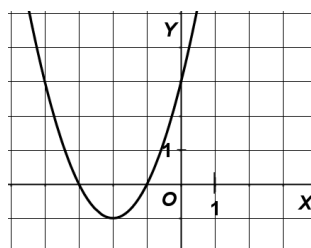
b) $f(x) = x^2 + 4x + 4$

c) $f(x) = x^2 + 4x + 5$

a) L'abscissa del vèrtex és $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow y_v = (-2)^2 + 4(-2) + 3 = -1$. L'eix de simetria és la recta $x = -2$ i

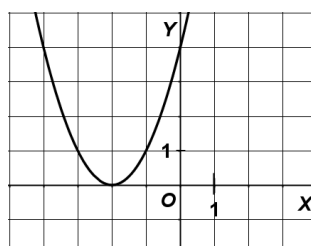
les interseccions amb l'eix d'abscisses es troben resolent l'equació $x^2 + 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} x = -3 \\ x = -1 \end{cases}$.

Talla l'eix d'ordenades a $y = 3$.

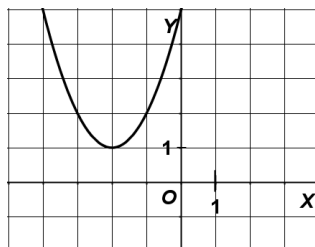


b) L'abscissa del vèrtex és $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow y_v = (-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0$. L'eix de simetria és la recta $x = -2$ i les

interseccions amb l'eix d'abscisses es troben resolent l'equació $x^2 + 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = -2$. Talla l'eix d'ordenades a $y = 4$.



- c) L'abscissa del vèrtex és $x_v = \frac{-b}{2a} = \frac{-4}{2} = -2 \Rightarrow y_v = (-2)^2 + 4(-2) + 5 = 1$. L'eix de simetria és la recta $x = -2$ i les interseccions amb l'eix d'abscisses es troben resolent l'equació $x^2 + 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2}$. Com que no té solució real, no talla l'eix d'abscisses. Talla l'eix d'ordenades a $y = 5$.



72. Troba els punts de la paràbola $f(x) = x^2 - 8x + 6$ que tenen ordenada $y = -9$ i $y = 0$.

Si $y = -9$, aleshores $x^2 - 8x + 6 = -9 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 3 \end{cases}$. Els punts són $(5, -9)$ i $(3, -9)$.

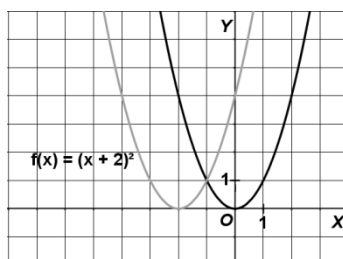
Si $y = 0$, aleshores $x^2 - 8x + 6 = 0 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{40}}{2} = \frac{8 \pm 2\sqrt{10}}{2} \Rightarrow x = 4 \pm \sqrt{10}$.

Els punts són $(4 + \sqrt{10}, 0)$ i $(4 - \sqrt{10}, 0)$.

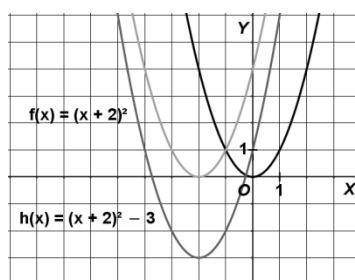
73. A partir de la gràfica de $f(x) = x^2$ representa gràficament:

a) $g(x) = (x+2)^2$ b) $h(x) = (x+2)^2 - 3$ c) $i(x) = 3(x+2)^2$ d) $j(x) = -2(x+2)^2$

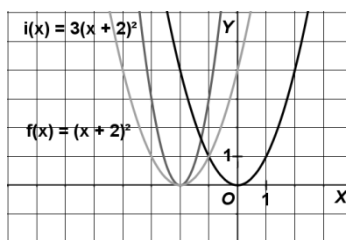
- a) La funció $g(x) = (x+2)^2$ es troba desplaçada dues unitats a l'esquerra respecte de la funció $f(x) = x^2$. Només cal observar que $g(-2) = f(0)$, $g(-1) = f(1)$, $g(0) = f(2)$, etc.



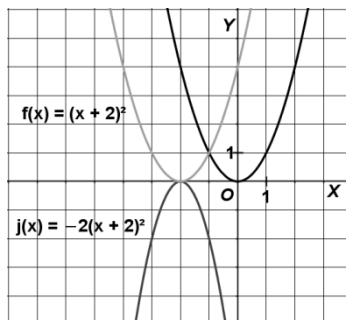
- b) $h(x)$ resta tres unitats a la funció $g(x)$, que es desplaça cap avall.



- c) La funció $i(x)$ multiplica per tres les altures de la funció $g(x)$. Això vol dir que és més estreta perquè decreix i creix més ràpidament.



- d) És igual que el cas anterior, però canviant de signe els valors de l'ordenada.



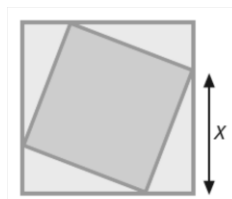
74. Troba els punts de tall de les gràfiques de les funcions $f(x) = -x^2 + x + 3$ i $g(x) = 7 - 4x$.

Obtenim els punts que tenen en comú fent $f(x) = g(x)$

$$-x^2 + x + 3 = 7 - 4x \Rightarrow -x^2 + 5x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-5 \pm \sqrt{9}}{-2} = \begin{cases} x = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Els punts són (1, 3) i (4, -9).

75. Dins d'un quadrat d'1 dm de costat se n'inscriu un altre. Calcula el costat c i l'àrea A del quadrat inscrit en funció de x .



Es compleix que $c^2 = x^2 + (1-x)^2 = x^2 + 1 - 2x + x^2 = 2x^2 - 2x + 1 \Rightarrow c = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$ dm perquè si el costat fa 1 dm queda dividit en dues parts: x i $1 - x$.

$$A = c^2 = 2x^2 - 2x + 1 \text{ dm}^2$$

76. Sigui la funció polinòmica de tercer grau següent: $f(x) = x^3 + 2x^2 - 8x$:

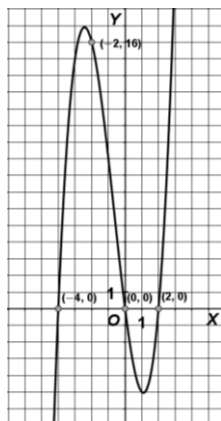
- Indica'n el domini.
- Calcula la intersecció de la funció amb els eixos de coordenades.
- Fes un esbós de la gràfica de la funció sabent que passa pel punt $(-2, 16)$.

- a) El domini de qualsevol funció polinòmica sempre és $\mathbb{R}$.
- b) La intersecció amb l'eix vertical es calcula fent $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. Així doncs, passa per $(0, 0)$.

La intersecció amb l'eix vertical es calcula fent $y = 0 \Rightarrow$

$$x^3 + 2x^2 - 8x = 0 \Rightarrow x(x^2 + 2x - 8) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{36}}{2} = \begin{cases} x = -4 \\ x = 2 \end{cases} \end{cases}$$

- c) Les interseccions són $(0, 0)$, $(-4, 0)$ i $(2, 0)$.



Funcions racionals

77. Troba el domini de les funcions racionals següents:

a) $f(x) = \frac{2}{(x+1)(x-4)}$ b) $f(x) = \frac{x+3}{x^2-7x+10}$ c) $f(x) = \frac{x^2-x+3}{x^2-x+4}$ d) $f(x) = \frac{x^2}{x^2+5}$

El domini d'una funció racional està determinat per tots els nombres reals x que fan el denominador diferent de zero.

a) $(x+1)(x-4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 4 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{-1, 4\}$

b) $x^2 - 7x + 10 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{9}}{2} = \begin{cases} x = 5 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R} - \{2, 5\}$

c) $x^2 - x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{-15}}{2} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$ perquè el denominador no és mai igual a zero.

d) $x^2 + 5 = 0 \Rightarrow x = \pm \sqrt{-5} \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$

78. Donada la funció $f(x) = \frac{x-3}{x+4}$, troba l'expressió de:

a) $f(-x)$ b) $f(x+2)$ c) $f(x) + 2$ d) $-f(x)$

a) $f(-x) = \frac{-x-3}{-x+4} = \frac{x+3}{x-4}$

b) $f(x+2) = \frac{(x+2)-3}{(x+2)+4} = \frac{x-1}{x+6}$

$$\text{c) } f(x) + 2 = \frac{x-3}{x+4} + 2 = \frac{x-3+2x+8}{x+4} = \frac{3x+5}{x+4}$$

$$\text{d) } -f(x) = -\frac{x-3}{x+4} = \frac{-x+3}{x+4}$$

79. Determina les asímptotes vertical i horitzontal de les funcions següents.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x-1}{x-2}$$

$$\text{b) } g(x) = \frac{-3x+2}{x-1}$$

$$\text{c) } h(x) = \frac{2x}{x+1}$$

$$\text{d) } i(x) = \frac{x}{-2x+5}$$

Una asímptota vertical és la recta $x = a$ si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ i una asímptota horitzontal és la recta $y = b$ si $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$.

En una funció racional l'asímtota vertical es calcula fent zero el denominador.

En una funció racional l'asímtota horitzontal s'obté calculant el límit quan x tendeix a infinit.

Funció	$f(x)$	$g(x)$	$h(x)$	$i(x)$
A. vertical	$x = 2$	$x = 1$	$x = -1$	$x = \frac{5}{2}$
A. horitzontal	$y = 1$	$y = -3$	$y = 2$	$y = -\frac{1}{2}$

80. Considera la funció racional $f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$.

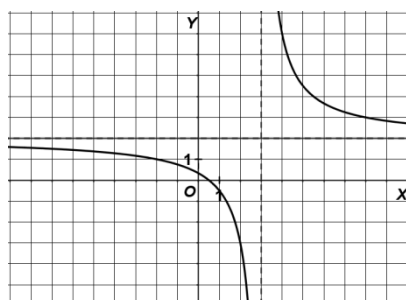
- Determina el domini i la continuïtat de la funció.
- Calcula'n les asímptotes horitzontal i vertical.
- La funció talla alguna vegada la recta $y = 2$?
- Fes un esbós de la funció.

a) $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$. Per tant, $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$. La funció no és contínua.

b) L'asímtota vertical és la recta $x = 3$ i l'horitzontal, la recta $y = 2$.

c) S'ha de resoldre la igualtat $\frac{2x-1}{x-3} = 2 \Rightarrow 2x-1 = 2x-6 \Rightarrow 1 = 6$. No talla mai la recta $y = 2$.

d)



Funcions irracionals

81. Troba el domini de les funcions irracionals següents:

a) $f(x) = \sqrt{x}$

c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

e) $f(x) = \sqrt{\frac{1}{x-2}}$

b) $f(x) = \sqrt{x-3}$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2}$

f) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-1}{x+4}}$

Una arrel quadrada té solució només si el seu discriminant és positiu o zero.

a) $D(f) = [0, +\infty)$

b) $x - 3 \geq 0 \Rightarrow x \geq 3$. Així doncs, $D(f) = [3, +\infty)$

c) $x^2 - 4 \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2) \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$. $D(f) = (-\infty, -2] \cup [2, +\infty)$.

d) $x^2 + 2 \geq 0 \Rightarrow D(f) = \mathbb{R}$

e) $\frac{1}{x-2} \geq 0$ i $x \neq 2$. Així doncs, $D(f) = (2, +\infty)$

f) $\frac{3x-1}{x+4} \geq 0$ i $x \neq -4 \Rightarrow x \in (-\infty, -4) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$. Per tant, $D(f) = (-\infty, -4) \cup \left[\frac{1}{3}, +\infty\right)$

82. Considera la funció irracional $f(x) = \sqrt{2x-1}$.

a) Calcula les imatges d'aquests valors: $\frac{1}{3}$, 1, 2, 5, 13 i 25.

b) Calcula els valors de x que tenen aquestes imatges: 1, 2, 3, 9, 11 i 15.

c) Fes una gràfica de la funció.

a)

x	$\frac{1}{3}$	1	2	5	13	25
$f(x)$	No existeix	1	$\sqrt{3}$	3	5	7

b)

$f(x)$	1	2	3	9	11	15
x	1	2,5	5	41	61	113

$$\sqrt{2x-1} = 2 \Rightarrow 2x-1 = 4 \Rightarrow 2x = 5 \Rightarrow x = 2,5$$

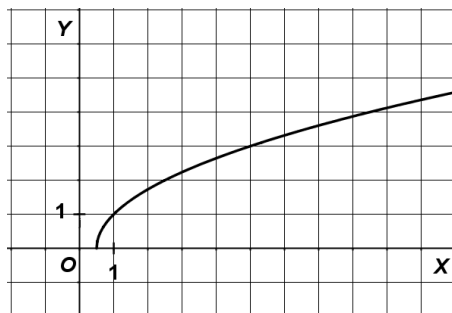
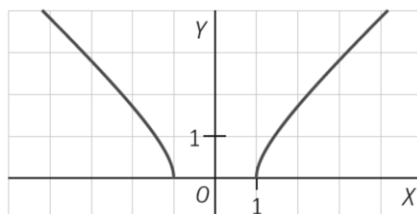
$$\sqrt{2x-1} = 3 \Rightarrow 2x-1 = 9 \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$$

$$\sqrt{2x-1} = 9 \Rightarrow 2x-1 = 81 \Rightarrow 2x = 82 \Rightarrow x = 41$$

$$\sqrt{2x-1} = 11 \Rightarrow 2x-1 = 121 \Rightarrow 2x = 122 \Rightarrow x = 61$$

$$\sqrt{2x-1} = 15 \Rightarrow 2x-1 = 225 \Rightarrow 2x = 226 \Rightarrow x = 113$$

c)


 83. La gràfica de la funció irracional $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ és


- a) Quin és el seu domini i el seu recorregut.
- c) Estudia'n el creixement.
- d) Quin tipus de simetria té?

- a) $D(f) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ i $R(f) = [0, +\infty)$
- b) $(-\infty, -1]$ és decreixent i $[1, +\infty)$ és creixent.
- c) Una simetria respecte a l'eix vertical.

 84. Considera les funcions $f(x) = x^3$ i $g(x) = \sqrt[3]{x}$.

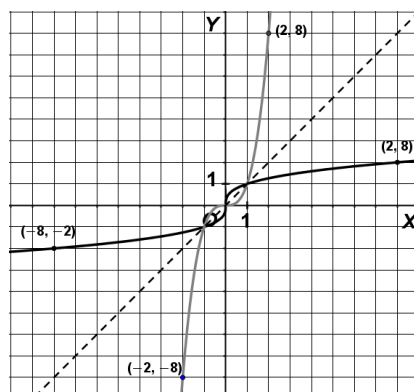
- a) Demostra que són inverses entre elles.
- b) A partir d'una taula de valors, representa-les gràficament i en el mateix sistema de coordenades. Com són entre elles?

$$a) (f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x}) = (\sqrt[3]{x})^3 = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3) = \sqrt[3]{x^3} = x$$

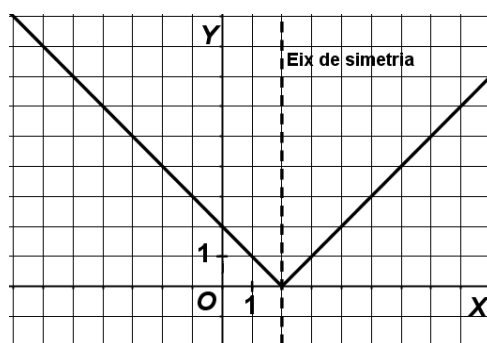
b)

x	-2	-1	0	1	2	$g(x)$
$f(x)$	-8	-1	0	1	8	x



Funcions valor absolut

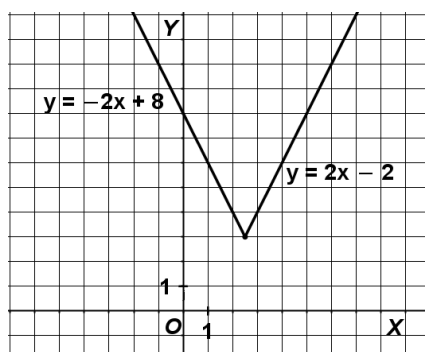
85. Representa gràficament la funció $f(x) = |x + 2|$. És sempre positiva? Té un eix de simetria? Dibuixa'l.



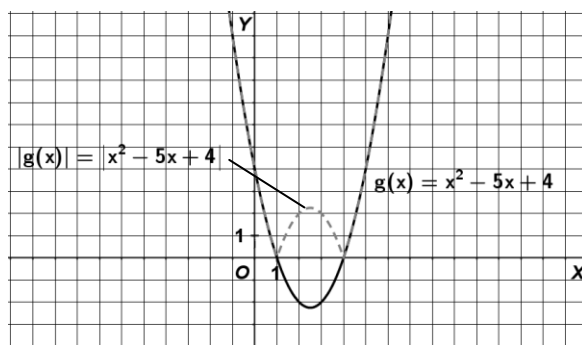
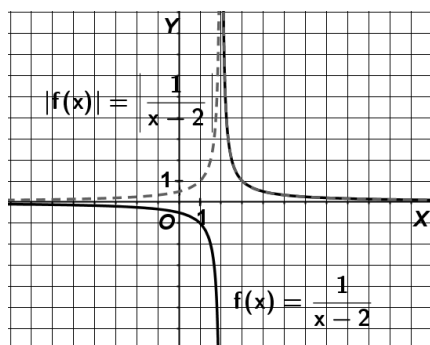
És sempre positiva i la recta $x = -2$ és un eix de simetria.

86. La funció valor absolut $f(x) = |2x - 5| + 3$ es pot escriure com una funció definida a trossos. Troba'n les equacions i dibuixa-la.

$$|2x - 5| + 3 = \begin{cases} 2x - 5 + 3 = 2x - 2 & \text{si } \frac{5}{2} \leq x \\ -2x + 5 + 3 = -2x + 8 & \text{si } x \leq \frac{5}{2} \end{cases}$$



87. Representa de manera gràfica les funcions $f(x) = \frac{1}{x-2}$ i $g(x) = x^2 - 5x + 4$ i, a partir d'aquestes, representa les noves funcions $f(x) = \left| \frac{1}{x-2} \right|$ i $g(x) = |x^2 - 5x + 4|$.

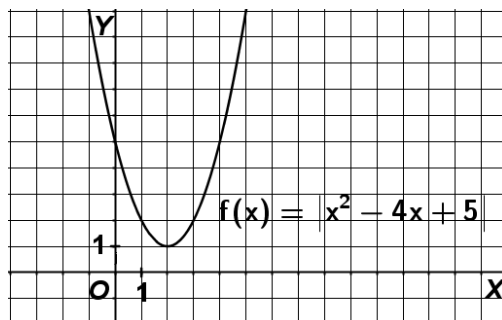


88. Escriu la funció $f(x) = |x^2 - 4x + 5|$ com una funció definida a trossos i representa-la.

$$f(x) = |x^2 - 4x + 5| = \begin{cases} x^2 - 4x + 5 & \text{si } x^2 - 4x + 5 \geq 0 \\ -x^2 + 4x - 5 & \text{si } x^2 - 4x + 5 < 0 \end{cases}$$

Però l'equació següent $x^2 - 4x + 5 = 0 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$ no té solució real i sempre és positiva. Per tant:

$$f(x) = |x^2 - 4x + 5| = x^2 - 4x + 5 \text{ per a qualsevol valor de } x$$



Funcions exponencials i logarítmiques

89. Dibuixa les gràfiques d'aquestes funcions a partir d'una taula de valors i compara'n el creixement.

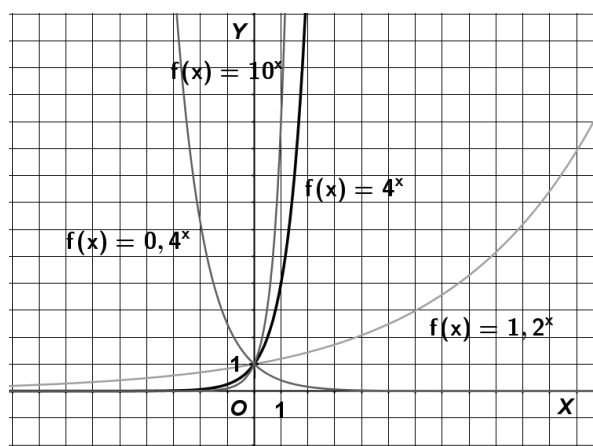
a) $f(x) = 4^x$

b) $f(x) = 0,4^x$

c) $f(x) = 10^x$

d) $f(x) = 1,2^x$

x	-2	-1	0	1	2
$f(x) = 4^x$	0,0625	0,25	1	4	16
$f(x) = 0,4^x$	6,25	2,5	1	0,4	0,16
$f(x) = 10^x$	0,01	0,1	1	10	100
$f(x) = 1,2^x$	0,69	0,83	1	1,2	1,44



La funció que té la base més gran és la que creix més de pressa. La funció que té la base entre 0 i 1 és decreixent. Les altres són creixents.

90. Determina les funcions inverses de les següents.

a) $f(x) = \log_3 x$

b) $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$

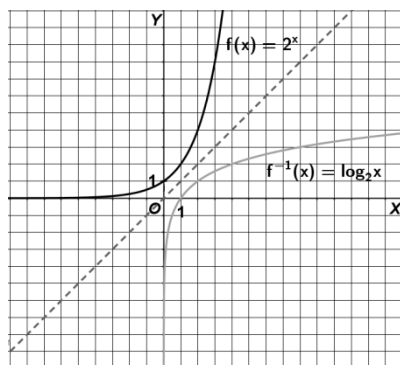
c) $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$

a) La funció inversa de $f(x) = \log_3 x$ és $f^{-1}(x) = 3^x$ perquè $(f \circ f^{-1})(x) = f(3^x) = \log_3 3^x = x$.

b) La funció inversa de $f(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ és $f^{-1}(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ perquè $(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\frac{1}{3}\right)^x = \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3}\right)^x = x$.

c) La funció inversa de $f(x) = \log_{\sqrt{3}} x$ és $f^{-1}(x) = \sqrt{3}^x$ perquè $(f \circ f^{-1})(x) = f\left(\sqrt{3}\right)^x = \log_{\sqrt{3}} \left(\sqrt{3}\right)^x = x$.

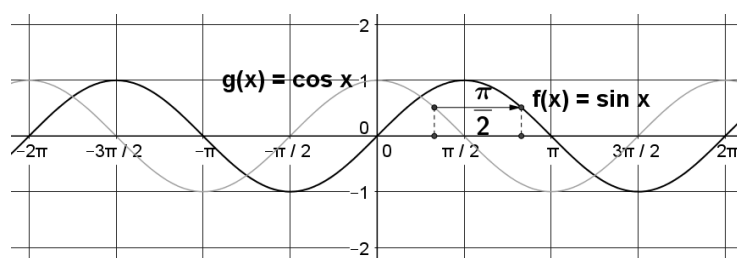
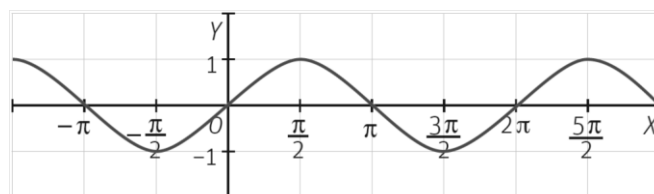
91. Dibuixa la gràfica de la funció $f(x) = 2^x$, i, a partir del dibuix, dibuixa la funció $f(x) = \log_2 x$.



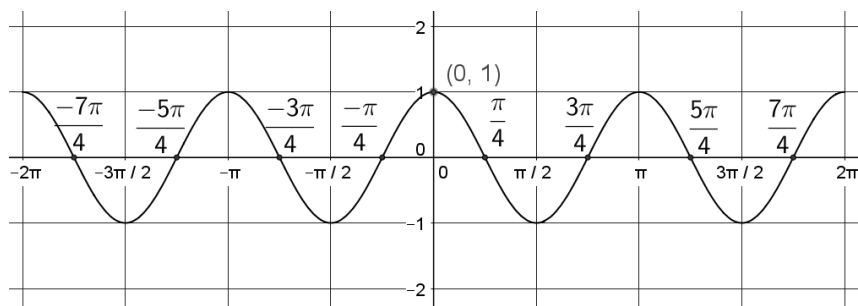
Una funció i la seva inversa són simètriques respecte a la recta $y = x$.

Funcions trigonomètriques

92. Si la gràfica de la funció $f(x) = \sin x$ és la següent, dibuixa la de la funció $f(x) = \cos x$ si saps que $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, és a dir, és el sinus desplaçat $\frac{\pi}{2}$ a l'esquerra.



93. Representa gràficament la funció $f(x) = \cos 2x$ entre $x = -2\pi$ i $x = 2\pi$. En quins punts talla els eixos de coordenades? Quin és el seu recorregut? I el seu període?

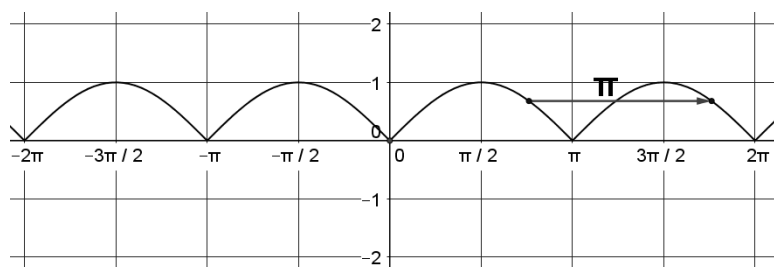


Els punts de tall estan representats a la figura. A part del punt $(0, 1)$, els de tall amb l'eix d'abscisses es calculen resolent l'equació:

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = \arccos 0 = \begin{cases} 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi \\ 2x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} + k\pi \end{cases}$$

El seu recorregut és $R(f) = [-1, 1]$ i el període val π rad.

94. Dibuixa la funció $f(x) = |\sin x|$. Quin període té?



El seu període és igual a π rad.

Dilatació i translació de funcions

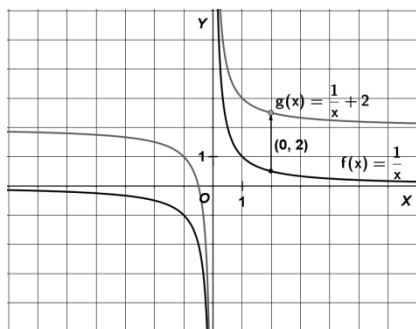
95. A partir de la gràfica de la funció $f(x) = \frac{1}{x}$, dibuixa les gràfiques següents:

a) $f(x) = \frac{1}{x} + 2$

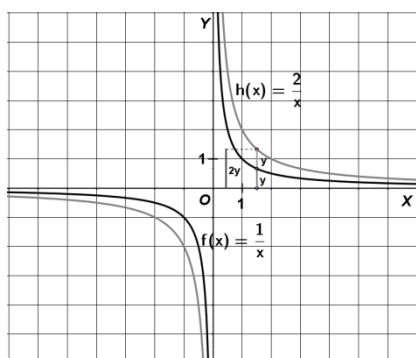
b) $f(x) = \frac{2}{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x+3} - 2$

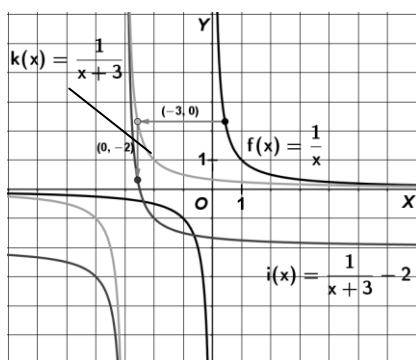
a)



b)



c)



QÜESTIONS

96. Donada una funció polinòmica, és possible que talli l'eix vertical en més d'un punt? Raona la resposta.

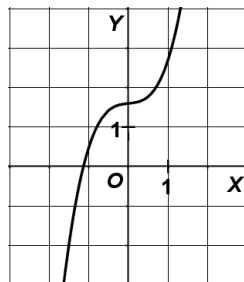
La intersecció amb l'eix vertical és el punt $(0, f(0))$. Si $f(x)$ és una funció, no pot tenir més d'una imatge. Per tant, la intersecció, si existeix, és única.

97. La gràfica d'un polinomi de grau imparell $f(x)$ sempre talla l'eix d'abscisses. Raona per què.

Si $f(x)$ té grau imparell, per exemple $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, sempre es compleix un dels dos casos:

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = +\infty$$

$$\cdot \lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^3 + bx^2 + cx + d) = -\infty$$



La funció passa de tenir valors negatius a positius, o de tenir valors positius a negatius. Per tant, si la funció és contínua, ha de passar per un zero. Així doncs, existeix x tal que $f(x) = 0$, és a dir, la gràfica talla l'eix OX.

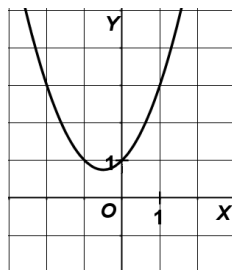
98. La gràfica d'un polinomi de grau parell $f(x)$ pot ser que no talli l'eix d'abscisses. Raona per què.

Si $f(x)$ té grau parell, per exemple $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, sempre es compleix el següent:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = \pm\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} (ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) = \pm\infty$$

Així doncs, no necessàriament la funció ha de passar de negatiu a positiu, o de positiu a negatiu.

La gràfica de la funció pot tenir aquesta forma i, per tant, no tallar l'eix OX.



99. La funció $f(x) = \frac{1}{|2x| - 6}$, quantes asímptotes verticals té? Calcula-les.

Resolem l'equació:

$$|2x| - 6 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2x - 6 = 0 & \text{si } x \geq 0 \Rightarrow x = 3 \\ -2x - 6 = 0 & \text{si } x < 0 \Rightarrow x = -3 \end{cases}$$

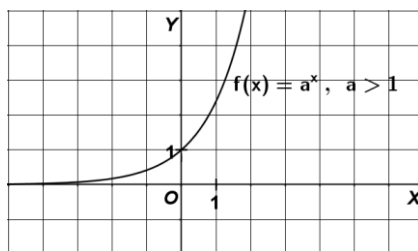
Té dues asímptotes verticals: $x = -3$ i $x = 3$.

100. Descriu totes les característiques que coneguis de la funció exponencial $f(x) = a^x$ en els casos següents:

a) Quan $a > 1$.

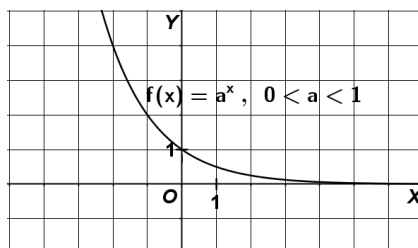
b) Quan $0 < a < 1$.

a)



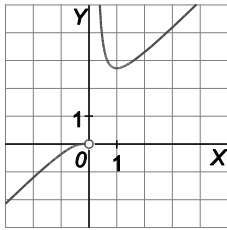
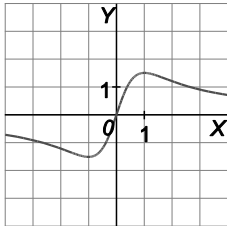
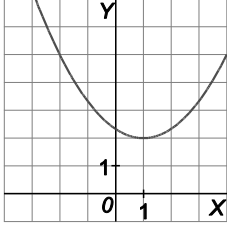
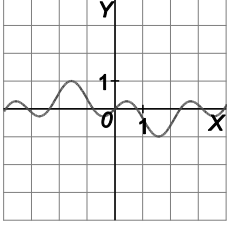
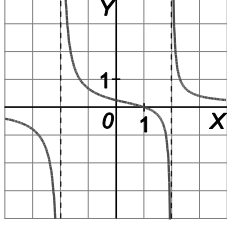
- El domini i la continuïtat són tots els nombres reals. El seu recorregut és $(0, +\infty)$ perquè mai pren valors negatius o zero.
- És creixent i no té extrems.
- El punt $(0, 1)$ és un punt que apareix en totes les representacions perquè $a^0 = 1$.
- És còncaua.

b)



- El domini i la continuïtat són tots els nombres reals. El seu recorregut és $(0, +\infty)$ perquè mai pren valors negatius o zero.
- És decreixent i no té extrems.
- El punt $(0, 1)$ és un punt que apareix en totes les representacions perquè $a^0 = 1$.
- És còncaua.

101. Associa les funcions de la columna esquerra a les gràfiques de la columna dreta i justifica la teva elecció:

$f(x) = \frac{3x}{1+x^2}$	
$g(x) = \frac{x-1}{x^2-4}$	
$h(x) = \sin x \cos 2x\pi$	
$j(x) = xe^{\frac{1}{x}}$	
$k(x) = \frac{(x-1)^2}{3} + 2$	

$f(x)$ s'associa amb la segona gràfica, perquè $y = 0$ és asímptota horitzontal i no té asímptotes verticals.

$g(x)$ s'associa amb l'última gràfica, perquè $y = 0$ és asímptota horitzontal i $x = -2$, $x = 2$ són asímptotes verticals.

$h(x)$ s'associa amb la quarta gràfica, perquè és periòdica.

$j(x)$ s'associa amb la primera gràfica, perquè no està definida a $x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} j(x) = 0$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} j(x) = +\infty$.

$k(x)$ s'associa amb la tercera gràfica, perquè és una paràbola.

Problemes

102. Un capital de 50.000 euros està dipositat en un banc a un tipus d'interès compost anual del 2 %. Quants diners hi haurà passats dos anys? I passats t anys?

$$C = C_0(1+r)^t = 50000(1+0,02)^2 = 50000 \cdot 1,02^2 = 52020 \text{ euros}$$

Passats t anys:

$$C = C_0(1+r)^t = 50000(1+0,02)^t = 50000 \cdot 1,02^t$$

103. Al nivell del mar, l'aigua bull a 100 °C, però cada increment de 100 m en l'altitud representa, aproximadament, trenta-tres centèsimes de grau menys per aconseguir fer bullir l'aigua.

- a) Troba la temperatura d'ebullició de l'aigua en funció de l'altitud completant la taula:

Altura (m)	0	100	200	500	100x
Temperatura (°C)	100	99,67	99,34	$100 - 5 \cdot 0,33 = 98,35$	$100 - 0,33x$

- b) Calcula la temperatura d'ebullició al cim de l'Aneto (3404 m) i al de l'Everest (8848 m).

Com que l'Aneto és a 3404 m, tenim: $3404 = 34,04 \cdot 100$. La temperatura serà:

$$T = 100 - 0,33 \cdot 34,04 = 88,77^\circ$$

Com que l'Everest és a 8848 m, tenim: $8848 = 88,48 \cdot 100$. La temperatura serà:

$$T = 100 - 0,33 \cdot 88,48 = 70,80^\circ$$

104. Als països anglosaxons es fa servir una escala de temperatures diferent de la Celsius: la Fahrenheit.

Les temperatures expressades en totes dues escales, Celsius (C) i Fahrenheit (F), es relacionen segons la funció:

$$C(F) = \frac{5}{9}(F - 32)$$

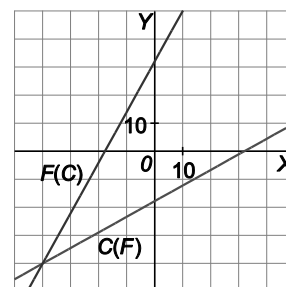
- a) Quants graus Celsius són 41 °F?
b) Quants graus Fahrenheit són -3 °C?
c) Troba la funció inversa de $C(F)$ que permet passar de Celsius a Fahrenheit.
d) Representa, sobre els mateixos eixos, la gràfica de la funció $C(F)$ i la seva inversa calculant prèviament els seus punts de tall amb els eixos.

a) $C(41) = \frac{5}{9}(41 - 32) = 5 \text{ °C}$

b) $C(F) = -3 \Rightarrow \frac{5}{9}(F - 32) = -3 \Rightarrow F = 26,6 \text{ °F}$

c) $C = \frac{5}{9}(F - 32) \Rightarrow F = \frac{9}{5}C + 32 \Rightarrow F(C) = \frac{9}{5}C + 32$

- d) La funció $C(F)$ talla els eixos en els punts $\left(0, -\frac{160}{9}\right)$ i $(32, 0)$. La funció $F(C)$ talla els eixos en els punts $(0, 32)$ i $\left(-\frac{160}{9}, 0\right)$. Les gràfiques són les rectes adjuntes.



105. El rendiment d'unes plaques solars en funció de la temperatura ve donat per una paràbola. Sabem que el rendiment és màxim (al cent per cent) a la temperatura de 50 °C i que és nul a les temperatures de 10 °C i de 90 °C. Dibuixa la gràfica de la funció que relaciona el rendiment amb la temperatura i busca la fórmula de la funció.

Sigui x la temperatura: $R(x) = ax^2 + bx + c$

Si a $x = 50$ té un màxim i rendeix al 100%, tenim: $2500a + 50b + c = 100$

Si a $x = 10$ és zero, tenim: $100a + 10b + c = 0$

Si a $x = 90$ és zero, tenim: $8100a + 90b + c = 0$

Es resol el sistema:

$$\begin{cases} 100a + 10b + c = 0 \\ 8100a + 90b + c = 0 \\ 2500a + 50b + c = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100a + b = 0 \\ 120a + 2b = 5 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-1}{16}, \quad b = \frac{25}{4}, \quad c = \frac{-225}{4}$$

La funció és $R(x) = \frac{-1}{16}x^2 + \frac{25}{4}x - \frac{225}{4}$

106. Un establiment decideix aplicar un descompte del 5 % per cada compra igual o inferior a 100 euros, i un descompte addicional del 10 % per la quantitat que supera els 100 €.

a) Escriu la fórmula de la funció que relaciona el preu final en funció del valor inicial de la compra x . Fes la gràfica de la funció.

b) Quin serà el preu final d'un article que estava marcat amb un preu igual a 342 €?

a) Sigui x el preu de l'article. Un descompte del 5 % vol dir que el cost és del 95 % del preu.

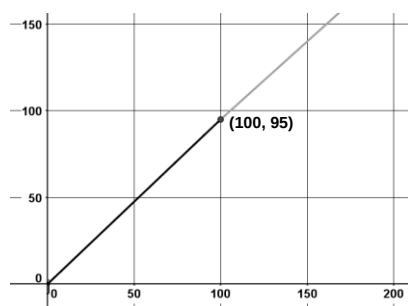
Per tant, si $0 < x \leq 100 \Rightarrow C = 0,95x$

Si $x > 100$, el client paga $0,95 \cdot 100 = 95$ € pels cent primers euros i un 90 % pels posteriors, que són $x - 100$.

Així doncs, $C = 95 + 0,90(x - 100) = 95 + 0,90x - 90 = 0,90x + 5$.

L'expressió és:

$$C(x) = \begin{cases} 0,95x & \text{si } 0 < x \leq 100 \\ 0,90x + 5 & \text{si } x > 100 \end{cases}$$



b) Si $x = 342$, $C(342) = 0,90 \cdot 342 + 5 = 312,8$ €

107. Una fàbrica té 20 treballadors que treballen 7,5 hores diàries i està oberta cinc dies a la setmana.

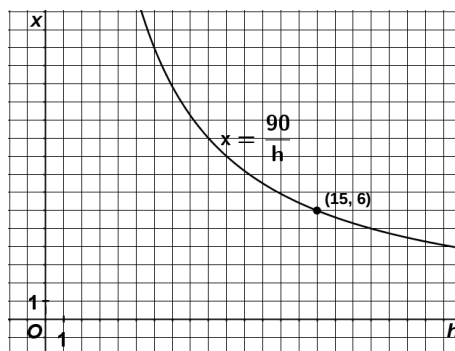
- Quants treballadors extra haurà de contractar la fàbrica si preveu un pla d'expansió per al qual necessita un total de 1200 hores treballades a la setmana.
- Si h és el nombre d'hores diàries que fa cada treballador, expressa el nombre de treballadors extra que s'ha de contractar en funció de h i fes la seva gràfica.
- La normativa estableix que cada treballador no pot fer menys de 5 hores al dia ni més de 10. Quin és el marge que té l'empresa per contractar nous treballadors?
- Si finalment l'empresa decideix contractar només 10 treballadors extra, quantes hores diàries haurà de fer cada treballador?

- a) Els 20 treballadors fan $20 \cdot 7,5 \cdot 5 = 750$ hores/setmana. Fins a 1200 h en falten 450. Llavors:

$$450 = x \cdot 7,5 \cdot 5 \Rightarrow x = 12$$

Fan falta 12 treballadors més.

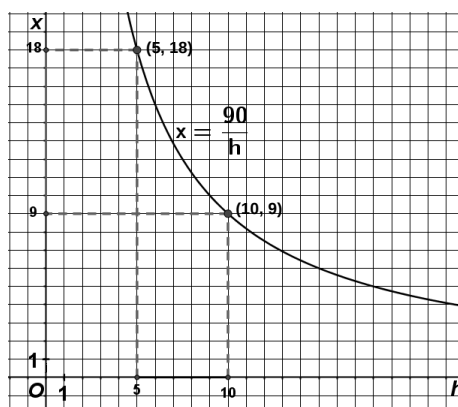
- b) El nombre de treballadors extras en funció de les hores és: $x = \frac{450}{5h} = \frac{90}{h}$



- c) Si el nombre d'hores oscil·la entre 5 i 10, tenim:

$$5 \leq h \leq 10 \Rightarrow \frac{1}{5} \geq \frac{1}{h} \geq \frac{1}{10} \Rightarrow \frac{90}{5} \geq \frac{90}{h} \geq \frac{90}{10} \Rightarrow 18 \geq x \geq 9$$

Es poden contractar entre 9 i 18 treballadors.



- d) Si $x = 10 \Rightarrow 10 = \frac{90}{h} \Rightarrow 10h = 90 \Rightarrow h = 9$. Cada treballador farà 10 hores diàries.

108. S'ha produït un terratrèmol amb nombroses destrosses i víctimes. El govern calcula que el nombre de persones ingressades en un hospital a causa del sisme ha estat $P(t) = \frac{t+50}{t^2+10}$, on $P(t)$ és el nombre de persones hospitalitzades, en milers, i t és el temps en dies transcorregut des del moment del terratrèmol.

- Quantes persones hi haurà hospitalitzades el primer dia?
- Quantes persones hi haurà passat un mes?
- Si un dia hi ha hospitalitzades 500 persones, quants dies han passat des del moment del terratrèmol?
- Passat un any, quedaran persones hospitalitzades?

a) Si $t = 1$ tenim que $P(t) = \frac{1+50}{1^2+10} = 4,636$ per tant, 4636 persones.

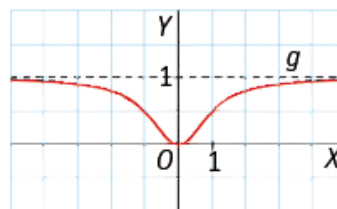
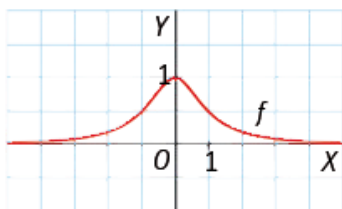
b) Si $t = 30$ dies, llavors $P(t) = \frac{t+50}{t^2+10} = \frac{30+50}{30^2+10} = \frac{80}{910} = 0,0879$, o sigui 87,9 (88) persones.

c) 500 persones són 0,5 milers, llavors $\frac{t+50}{t^2+10} = 0,5 \Rightarrow t+50 = 0,5t^2+5 \Rightarrow 0,5t^2-t-45=0 \Rightarrow t=10,48$ Han passat més de 10 dies.

d) Si $t = 365$ dies, $P(365) = \frac{365+50}{365^2+10} = \frac{415}{133235} = 0,003$. Quedaran 3 persones.

Per aprofundir

109. La gràfica de l'esquerra correspon a la funció $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Troba la fórmula per a la funció que té com a gràfica la de la dreta.



La segona gràfica s'obté a partir de la primera en dos passos. Primer fem el simètric de la gràfica de f respecte de l'eix X , és a dir, és la gràfica de $-f(x)$. Després, desplaceu la gràfica resultant una unitat cap amunt; és a dir, la

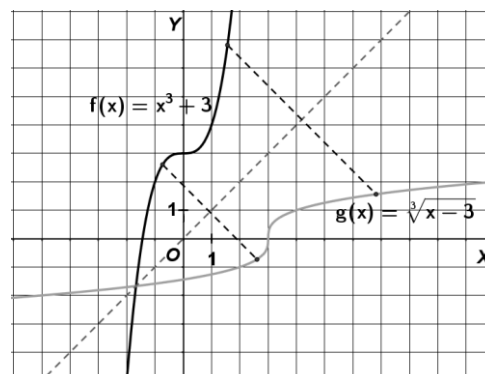
funció buscada és $1 - f(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$.

110. Demostra que les funcions $f(x) = x^3 + a$ i $g(x) = \sqrt[3]{x-a}$ són inverses. En el cas $a = 3$, obtén la representació gràfica de la funció $g(x)$ a partir de la de la funció $f(x)$ tenint en compte que són simètriques respecte de la recta $y = x$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt[3]{x-a}) = (\sqrt[3]{x-a})^3 + a = x - a + a = x$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^3 + a) = \sqrt[3]{x^3 + a - a} = \sqrt[3]{x^3} = x$$

Si $f(x) = x^3 + 3$, tenim:



111. La pressió atmosfèrica decreix exponencialment en funció de l'altura respecte del nivell del mar segons la funció $p(h) = 760 \cdot e^{-0,145h}$, on la pressió p es mesura en mil·límetres de mercuri i l'altura, en quilòmetres. Fes servir 2,718 com a aproximació del nombre e .

- a) Quina serà la pressió atmosfèrica a la ciutat de Mèxic, situada a 2250 m sobre el nivell del mar?
b) A quina altura ens trobem si la pressió és de 700 mil·límetres de mercuri?

a) Atès que la ciutat de Mèxic està situada a 2250 m sobre el nivell del mar, $h = 2,25$ km.

$$p(2,25) = 760 \cdot 2,718^{-0,145 \cdot 2,25} = 760 \cdot 2,718^{-0,32625} = 760 \cdot 0,72 = 547,2 \text{ mm de mercuri.}$$

b) $p(h) = 760 \cdot e^{-0,145h} = 700 \Rightarrow e^{-0,145h} = 0,921 \Rightarrow \ln e^{-0,145h} = \ln 0,921 \Rightarrow -0,145h = -0,08 \Rightarrow h = 0,567$ km

Ens trobem a 567 m sobre el nivell del mar.

112. La depreciació d'un cotxe que tenia un preu de compra nou de 15 350 € es pot calcular amb la fórmula $p(t) = p_0 \cdot 0,9^t$, on t és el temps en anys comptat a partir del moment de la compra.

- a) Calcula la constant p_0 .
b) Passats tres anys, quin serà el preu de venda del cotxe usat?
c) Si volem vendre el cotxe per 12 000 €, quants anys han de passar des del moment de la seva compra?

a) Quan $t = 0$, el preu era de 15 350 € $\Rightarrow 15350 = p_0 \cdot 0,9^0 = p_0$

b) Per a $t = 3 \Rightarrow p(3) = 15350 \cdot 0,9^3 = 15350 \cdot 0,729 = 11190,15$ €

c) $12000 = 15350 \cdot 0,9^t \Rightarrow 0,9^t = 0,7817 \Rightarrow \log 0,9^t = \log 0,7817 \Rightarrow t \cdot \log 0,9 = -0,1069 \Rightarrow t = 2,33$ anys

113. Indica el domini i el recorregut d'aquesta funció:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x^4}$$

$$x^2 - x^4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2(1 - x^2) \geq 0 \Leftrightarrow (1 - x^2) \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$$

El domini és l'interval $[-1, 1]$

$$\text{Si } \sqrt{x^2 - x^4} = y \Leftrightarrow x^2 - x^4 = y^2 \Leftrightarrow -x^4 + x^2 - y^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(-y^2)(-1)}}{-2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4y^2}}{-2}$$

Aquesta equació té solució si $1 - 4y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (1 - 2y)(1 + 2y) \geq 0 \Rightarrow y \in [-0,5; 0,5]$

Com que y no pot ser negativa perquè la funció $f(x)$ és una arrel quadrada, el recorregut és $R(f) = [0, 0,5]$.

ENTORN MATEMÀTIC

El llum penjant

A l'Eva no li agrada la foscor i sempre intenta tenir molta llum a la seva habitació. Després de protestar molt als seus pares perquè el llum de la seva taula d'estudi fa poca llum, aconsegueix que el seu pare compri un llum nou més potent per al sostre de l'habitació: "Em surt més barat canviar el llum que els analgèsics contra el mal de cap que em fan venir les teves queixes".

Dit i fet, l'Eva i el seu migranyós pare decideixen, en conseqüència, col·locar el llum nou sobre la perpendicular de la petita taula circular de l'Eva, que fa 8 dm de diàmetre.

El llum que han triat té un cable llarg per poder regular-ne l'alçària.

El pare de l'Eva, lector assidu de Bricomatemàtica, ha deduït que la il·luminació generada pel llum en cada punt del marge de la taula és directament proporcional al cosinus de l'angle θ i inversament proporcional al quadrat de la distància a la bombeta.

Aquesta relació, matemàticament, s'expressa així:

$$f(x) = \frac{\cos \theta}{d^2}$$

Així, si la bombeta s'allunya massa de la taula, la intensitat baixa, i també si s'hi acosta massa. Tingues en compte que pel teorema de Pitàgores, podem expressar tant $\cos \theta$ com d en termes de l'altura x , tal com mostra l'esquema.

L'Eva vol situar el llum a la distància més adequada de la taula per tal que la il·luminació a les vores sigui màxima. El seu pare li ha donat tres valors possibles: 2 dm, $2\sqrt{2}$ dm i 3 dm. Per a quin d'aquests valors la intensitat sobre les vores serà màxima?

Expressem $\cos \theta$ en termes de x :

$$d^2 = 16 + x^2 \text{ i } \cos \theta = \frac{x}{d} = \frac{x}{\sqrt{16 + x^2}}$$

La funció que permet obtenir la il·luminació serà:

$$f(x) = \frac{x}{(\sqrt{16 + x^2})^3}$$

Hem de determinar per a quins dels valors donats la intensitat a les vores és màxima. Substituïm:

$$f(2) = \frac{2}{(\sqrt{16 + 2^2})^3} = 0,02236 \quad f(2\sqrt{2}) = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt{16 + (2\sqrt{2})^2})^3} = 0,024056 \quad f(3) = \frac{3}{(\sqrt{16 + 3^2})^3} = 0,024$$

El màxim es produirà quan el llum es trobi a una distància de $2\sqrt{2}$ dm de la taula.

L'alcohol i la conducció de vehicles

El control d'alcoholèmia o test d'alcoholèmia mesura la concentració d'alcohol al nostre torrent sanguini. S'obté tenint en compte la quantitat d'alcohol ingerit, el pes de la persona, l'edat i el sexe. Així, quan diem que una persona té un nivell d'alcohol en sang igual a 0,3 g/L volem indicar que té 0,3 grams d'alcohol per cada litre de sang.

El control d'alcoholèmia tant es pot fer calculant la quantitat d'alcohol en la sang com la quantitat d'alcohol detectat en l'aire espirat. D'acord amb investigacions recents, se sap que el risc R , en tant per cent, creix exponencialment amb la quantitat d'alcohol ingerit segons aquesta fórmula, on x representa la quantitat de grams d'alcohol per litre en sang:

$$R = 6 \cdot (2,718)^{2,04x}$$

- Calcula quin és el risc en la conducció d'una persona que ha begut una cervesa just abans de conduir. Un cervesa equival a un nivell d'alcohol en sang de 0,3 g/L.
- Actualment el nivell d'alcohol en sang màxim permès per a un conductor no professional i no novell és de 0,5 g/L. Quin risc es té amb aquest nivell d'alcohol?
- Quin risc tindrà una persona que té un nivell d'alcohol en sang d'1,2 g/L?
- Quin nivell d'alcohol en sang tindrà una persona que té un risc del 50 % en la conducció?
- Té sentit limitar el consum d'alcohol als conductors? Raona la teva resposta.

$$\text{a)} \quad R = 6 \cdot (2,718)^{2,04x} = 6 \cdot (2,718)^{2,04 \cdot 0,3} = 6 \cdot 1,84 = 11,06\%$$

$$\text{b)} \quad R = 6 \cdot (2,718)^{2,04x} = 6 \cdot (2,718)^{2,04 \cdot 0,5} = 6 \cdot 2,77 = 16,63\%$$

$$\text{c)} \quad R = 6 \cdot (2,718)^{2,04x} = 6 \cdot (2,718)^{2,04 \cdot 1,2} = 6 \cdot 11,56 = 69,37\%$$

$$\text{d)} \quad 50 = 6 \cdot (2,718)^{2,04x} \Rightarrow (2,718)^{2,04x} = 8,33 \Rightarrow \log(2,718)^{2,04x} = \log 8,33 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2,04x \cdot \log 2,718 = \log 8,33 \Rightarrow x = \frac{\log 8,33}{2,04 \cdot \log 2,718} = 1,03 \text{ g / L}$$

- Sí, tenint en compte que el risc creix de manera exponencial.

AUTOAVALUACIÓ

1. Calcula el domini de les funcions següents.

a) $f(x) = -3x^2 + 3x + 1$

b) $g(x) = \frac{3x+1}{x}$

c) $h(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

d) $f_1(x) = \sqrt[3]{x-5}$

e) $g_1(x) = 2^{\frac{1}{x}}$

f) $h_1(x) = \log(x-4)$

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) $D(g) = \mathbb{R} - \{0\}$

c) $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$. Aleshores $D(h) = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

d) $D(f_1) = \mathbb{R}$

e) $D(g_1) = \mathbb{R} - \{0\}$ perquè $x = 0$ és una discontinuïtat de l'exponent.

f) $D(h_1) = (4, +\infty)$ perquè $x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$.

2. Estudia la simetria d'aquestes funcions.

a) $f(x) = \cos x$ b) $g(x) = \frac{-2}{x}$ c) $h(x) = x^2 - 9$

a) $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$ és simètrica respecte a l'eix vertical.

b) $g(-x) = \frac{-2}{-x} = \frac{2}{x} = -g(x)$ és simètrica respecte a l'origen de coordenades $(0, 0)$.

c) $h(-x) = (-x)^2 - 9 = x^2 - 9 = h(x)$ és simètrica respecte a l'eix vertical.

3. Troba les asímptotes verticals i horitzontals de les funcions racionals següents.

a) $f(x) = \frac{x-3}{x+3}$

b) $f(x) = \frac{-x}{2x-1}$

a) L'asímtota vertical és la recta $x = -3$ i l'horitzontal és la recta $y = 1$.

b) L'asímtota vertical és la recta $x = \frac{1}{2}$ i l'horitzontal és la recta $y = \frac{-1}{2}$.

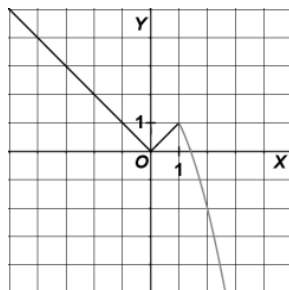
4. Estudia el domini, el creixement i els extrems de la funció $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x < 1 \\ -x^2 + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

El domini de la funció valor absolut i de la funció polinòmica són tots els nombres reals. Quan $x = 1$, s'obté:

$$f(1) = -1^2 + 2 = -1 + 2 = 1$$

Per tant, $D(f) = \mathbb{R}$.

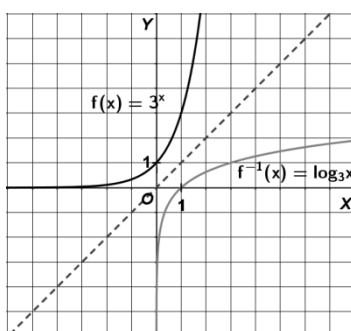
Un dibuix de la funció és:



$(-\infty, 0)$ i $(1, +\infty)$ la funció decreix. $(0, 1)$ la funció creix.

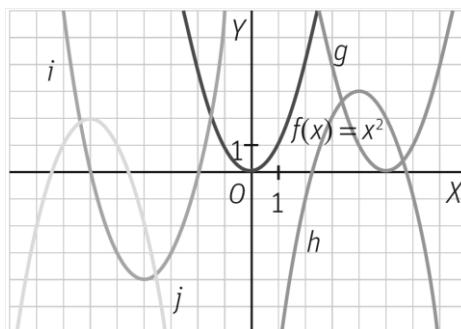
Els punts d'abscissa $x = 0$ (mínim) i $x = 1$ (màxim) són els extrems.

5. Representa gràficament la funció exponencial de base 3, $f(x) = 3^x$ i dibuixa la seva simètrica respecte de la recta $y = x$. De quina funció és tracta?



La funció simètrica de la funció exponencial és la funció logarítmica. En aquest cas, és la funció logaritme de base 3.

6. Donada la funció $f(x) = x^2$, determina la fórmula de les altres funcions representades.



$$g(x) = (x-5)^2 \quad h(x) = -(x-4)^2 + 3 \quad i(x) = (x+4)^2 - 4 \quad j(x) = -(x+6)^2 + 2$$

7. En un dipòsit hi ha al començament de mes 500 m^3 d'aigua. Cada dia es consumeix un terç del que queda.

- Calcula quanta aigua hi ha al dipòsit el dia x del mes.
- Quants metres cúbics d'aigua tindrà passats 15 dies?
- Quin dia tindrà la dècima part de la seva capacitat?

a) Si es consumeix un terç cada dia vol dir que en queden dos terços: $\frac{2}{3} \cdot 500$.

Si $t = 0$, hi ha: $Q = 500 \text{ m}^3$

Passat un dia $t = 1$, tenim: $Q = \frac{2}{3} \cdot 500 \text{ m}^3$

Si $t = 2$, en queden: $Q = \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3} \cdot 500 \right) \text{ m}^3$

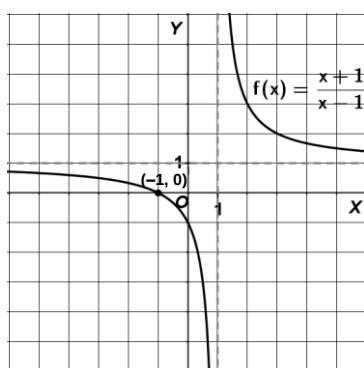
Passats $t = x$ dies, en queda: $Q = \left(\frac{2}{3} \right)^x \cdot 500 \text{ m}^3$

b) Passats 15 dies, tindrà: $\left(\frac{2}{3} \right)^{15} \cdot 500 = 0,00228 \cdot 500 = 1,14 \text{ m}^3$

c) $\left(\frac{2}{3} \right)^x \cdot 500 = \frac{500}{10} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} \right)^x = \frac{1}{10} \Rightarrow \log \left(\frac{2}{3} \right)^x = \log \frac{1}{10} \Rightarrow x \cdot \log \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow x = 5,67$. Entre el cinquè i el sisè dia.

8. Representa gràficament una funció amb les característiques següents:

- El seu domini és $D = \mathbb{R} - \{1\}$, i el seu recorregut és $R = \mathbb{R} - \{1\}$
- Talla l'eix horitzontal en un punt: $(-1, 0)$.
- És sempre decreixent.



RELACIONA I CONTESTA

Tria l'única resposta correcta en cada cas

1. Si $f(x)$ és una funció parella i $(2, 4)$ és un punt de la funció, també ho és:

A. $(2, -4)$ B. $(-2, 4)$ C. $(-2, -4)$ D. Cap de les anteriors

Si $f(x)$ és parella, vol dir que $f(-x) = f(x)$, en aquest cas $f(-2) = f(2) = 4$ aleshores $(-2, 4)$ és de la funció. Resposta B.

2. La funció $f(x) = \frac{x}{|x|}$ té:

A. Una asímptota vertical en $x = 0$
 B. És sempre constant i igual a 1
 C. És decreixent i creixent amb un mínim a $x = 0$
 D. No és contínua a $x = 0$

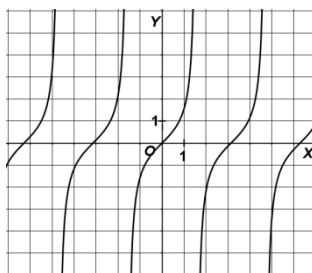
$$\text{Es desenvolupa } f(x) = \frac{x}{|x|} = \begin{cases} \frac{x}{x} = 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{x}{-x} = -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

No té cap asímptota, no és constant i no és ni creixent ni decreixent. En canvi, té una discontinuïtat de salt finit a $x = 0$ (a l'esquerra del 0 val -1 i a la dreta val 1). La resposta correcta és la D.

3. Una funció periòdica definida a $\mathbb{R}$ pot ser creixent?

A. Sí.
 B. No.
 C. Només si és polinòmica.
 D. Només si és trigonomètrica.

Si és periòdica ha d'anar repetint la mateixa forma. Una funció que és creixent en el període és possible com la funció $f(x) = \operatorname{tg} x$. La resposta és la D.



4. Si la funció exponencial $f(x) = a^x$ i la funció logarítmica $f(x) = \log_a x$ són inverses, això vol dir:
- Si el domini d'una són els nombres positius, el de l'altra són els nombres negatius.
 - Si una és creixent (decreixent), l'altra és decreixent (creixent).
 - Si una és creixent (decreixent), l'altra és creixent (decreixent).
 - Si una és contínua, l'altra no ho és.

La resposta correcta és la C. El motiu és que són simètriques respecte a la recta $y = x$. Si la gràfica d'una funció és creixent, la seva simètrica respecte a la recta $y = x$ també serà creixent. I al revés, si la gràfica d'una funció és decreixent, la seva simètrica respecte a la recta $y = x$ també serà decreixent. Es pot comprovar observant les gràfiques corresponents.

Tria la relació correcta entre les dues afirmacions donades

5. Sigui $f(x)$ funció polinòmica.
- La funció té exactament un màxim i un mínim i talla l'eix d'abscisses en tres punts.
 - $f(x)$ és una funció polinòmica de tercer grau.
- $1 \Rightarrow 2$ però $2 \nRightarrow 1$
 - $2 \Rightarrow 1$ però $1 \nRightarrow 2$
 - $1 \Leftrightarrow 2$
 - Cap de les anteriors.

La resposta és la A. Si la funció talla en tres punts $x = a$, $x = b$ i $x = c$ l'eix d'abscisses, tenim: $f(x) = (x - a) \cdot (x - b) \cdot (x - c)$, que és de grau tres. Com que és contínua i ha de passar pels tres punts sense interrupcions, entre els zeros ha de tenir extrems. $1 \Rightarrow 2$.

Però no és cert a l'inrevés; per exemple, $f(x) = x^3$ només té un zero.

Elimina la dada innecessària per contestar

6. Per calcular el vèrtex d'una paràbola d'equació $f(x) = ax^2 + bx + c$ que passa per l'origen de coordenades ens donen les dades següents:
- El valor de a .
 - El valor de b .
 - El valor de c .
- En aquestes circumstàncies la dada innecessària és:
- La 1
 - La 2.
 - La 3.
 - Cap

Si passa per l'origen de coordenades, aleshores $f(0) = c = 0$. D'altra banda, l'abscissa del vèrtex és $x_v = -\frac{b}{2a}$. Necessitem el valor de a i de b . La resposta correcta és la C.