8. Successions

EXERCICIS PROPOSATS

1 a 3. Exercicis resolts

4. Calcula els cinc primers termes de la successió de terme general $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$.

Els cinc primers termes de la successió $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$ són:

$a_1 = \frac{2\cdot 1-1}{1^2} = 1;\quad a_2 = \frac{2\cdot 2-1}{2^2} = \frac{3}{4};\quad a_3 = \frac{2\cdot 3-1}{3^2} = \frac{5}{9};\quad a_4 = \frac{2\cdot 4-1}{4^2} = \frac{7}{16};\quad a_5 = \frac{2\cdot 5-1}{5^2} = \frac{9}{25}$

5. Escriu els tres termes següents d'aquestes successions:

a) $a_1 = 1, a_2 = 8, a_3 = 27, a_4 = 64...$

b) $a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}...$

c) $a_1 = 2; a_2 = \frac{3}{2}; a_3 = \frac{4}{3}; a_4 = \frac{5}{4}...$

d) $a_1 = \frac{-1}{2}, a_2 = \frac{1}{5}, a_3 = \frac{3}{8}, a_4 = \frac{5}{11}...$

a) $a_5 = 125;\quad a_6 = 216;\quad a_7 = 343\quad \left(a_n = n^3\right)$

b) $a_5 = \frac{1}{5};\quad a_6 = \frac{1}{6};\quad a_7 = \frac{1}{7}\quad \left(a_n = \frac{1}{n}\right)$

c) $a_5 = \frac{6}{5};\quad a_6 = \frac{7}{6};\quad a_7 = \frac{8}{7}\quad \left(a_n = \frac{n+1}{n}\right)$

d) $a_5 = \frac{7}{14};\quad a_6 = \frac{9}{17};\quad a_7 = \frac{11}{20}\quad \left(a_n = \frac{2n-3}{3n-1}\right)$

6. Calcula el cinquè terme d'aquestes successions:

a) $a_1 = -1$ i $a_n = 2\left(a_{n-1}+1\right)$ per a $n \geq 2$

b) $a_1 = 5$ i $a_n = (-1)^n a_{n-1}$ per a $n \geq 2$

c) $a_1 = 0, a_2 = 1,$ i $a_n = a_{n-1} - a_{n-2}$ per a $n \geq 3$

Per calcular el terme cinquè s'han de trobar prèviament els anteriors.

a) $a_1 = -1;\quad a_2 = 2(-1+1) = 0;\quad a_3 = 2(0+1) = 2;\quad a_4 = 2(2+1) = 6;\quad a_5 = 2(6+1) = 14$

Així doncs, $a_5 = 14$

b) $a_1 = 5;\quad a_2 = (-1)^2\cdot 5 = 5;\quad a_3 = (-1)^3\cdot 5 = -5;\quad a_4 = (-1)^4\cdot(-5) = -5;\quad a_5 = (-1)^5\cdot(-5) = 5$

Així doncs, $a_5 = 5$

c) $a_1 = 0;\quad a_2 = 1;\quad a_3 = 0+1 = 1;\quad a_4 = 1+1 = 2;\quad a_5 = 2+1 = 3$

Així doncs, $a_5 = 3$

7. Donades les progressions següents, classifica-les en aritmètiques i geomètriques. Determina en cada cas el terme general.

a) 5, 7, 9, 11, 13,... **c)** 2, –1, –4, –7, –10,...

b) 2, 4, 8, 16, 32,... **d)** 2, 6, 18, 54, 162,...

a) És una progressió aritmètica de diferència d = 2 i $a_n = a_1 + (n-1)d = 5 + (n-1)2 = 2n + 3$

b) És una progressió geomètrica de r = 2 i $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

c) És una progressió aritmètica de diferència d = –3 i $a_n = 2 + (n-1)(-3) = -3n + 5$

d) És una progressió geomètrica de r = 3 i $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$

8 a 10. Exercicis resolts

11. Demostra que la successió $a_n = \dfrac{n}{n+2}$ és creixent. Indica una fita inferior i una de superior.

Una successió és creixent si $a_{n+1} - a_n > 0$. En aquest cas, si $a_n = \dfrac{n}{n+2}$, tindrem:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{n+1+2} - \frac{n}{n+2} = \frac{n+1}{n+3} - \frac{n}{n+2} = \frac{n^2+3n+2-n^2-3n}{(n+3)(n+2)} = \frac{2}{(n+3)(n+2)} > 0 \text{ perquè n ≥ 1.}$$

Una fita inferior és el primer terme de la successió m = $a_1 = \dfrac{1}{3}$, i una superior M = 1 perquè el numerador és més petit que el denominador.

12. Demostra que la successió $a_n = \dfrac{4}{n+2}$ és decreixent. Indica una fita inferior i una de superior.

Una successió és decreixent si $a_{n+1} - a_n < 0$. En aquest cas, si $a_n = \dfrac{4}{n+2}$, tindrem:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{4}{n+1+2} - \frac{4}{n+2} = \frac{4}{n+3} - \frac{4}{n+2} = \frac{4n+8-4n-12}{(n+3)(n+2)} = \frac{-4}{(n+3)(n+2)} < 0 \text{ perquè n ≥ 1.}$$

Una fita superior és el primer terme de la successió M = $a_1 = \dfrac{4}{3}$, i una inferior m = 0 perquè decreix i no té valors negatius.

13 a 15. Exercicis resolts

16. De les següents successions, digues si són creixents o decreixents. Si estan fitades, indica a quin nombre real s'acosten.

a) $a_1 = 2; a_2 = 2{,}9; a_3 = 2{,}99; a_4 = 2{,}999...$

b) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 6, a_4 = 8...$

c) $a_1 = \dfrac{5}{2},\ a_2 = \dfrac{6}{3},\ a_3 = \dfrac{7}{4},\ a_4 = \dfrac{8}{5},\ a_5 = \dfrac{9}{6},\ a_6 = \dfrac{10}{7}...$

a) La successió creix. Les fites són m = 2 i M = 3. S'acosta al valor 3

b) La successió creix. La fita inferior és m = 2 i no té fita superior. No s'acosta a cap valor. Diem que tendeix a +∞ perquè no para de créixer.

c) La successió decreix. Les fites són m = 1 i M = $\dfrac{5}{2}$. S'acosta al valor 1.

17. La successió $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$ és creixent i fitada superiorment. Troba $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+3}$.

La successió $a_n = \dfrac{2n}{n+3}$ té el primer terme com a fita inferior: $m = a_1 = \dfrac{2}{3}$. Després creix però no passa del valor 2. N'hi ha prou de calcular algun dels seus termes quan n pren valors grans:

$$a_{10} = \frac{20}{13} = 1{,}53\,;\ a_{100} = \frac{200}{103} = 1{,}94\,;\ a_{1000} = \frac{2000}{1003} = 1{,}994...\,;\ a_{10000} = \frac{20000}{10003} = 1{,}999...$$

Així doncs, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n}{n+3} = 2$.

18. La successió $a_n = \dfrac{5n+1}{n}$ és decreixent i fitada inferiorment. Troba $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{n}$.

La successió $a_n = \dfrac{5n+1}{n}$ té el primer terme com a fita superior: $M = a_1 = 6$. Després decreix i s'acosta a 5. N'hi ha prou de calcular algun dels seus termes quan n pren valors grans:

$$a_{10} = \frac{51}{10} = 5{,}1;\ a_{100} = \frac{501}{100} = 5{,}01;\ a_{1000} = \frac{5001}{1000} = 5{,}001;\ a_{10000} = \frac{50001}{10000} = 5{,}0001$$

Així doncs, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{5n+1}{n} = 5$.

19. La successió $a_n = \dfrac{4n}{n+3}$ té límit L = 4. A partir de quin valor de n els termes de la successió estan a una distància inferior a 0,001 del seu límit?

Calculem la diferència entre el terme general i el límit:

$$\left|\frac{4n}{n+3} - 4\right| = \left|\frac{4n - 4n - 12}{n+3}\right| = \left|\frac{-12}{n+3}\right| = \frac{12}{n+3}$$

Si la diferència ha de ser inferior a 0,001, vol dir que:

$$\frac{12}{n+3} < 0{,}001 \Rightarrow 12 < 0{,}001n + 0{,}003 \Rightarrow 11{,}997 < 0{,}001n \Rightarrow n > 11997$$

Així doncs, n_0 = 11 998. El terme $a_{11998} = \dfrac{47992}{12001} = 3{,}9990...$ i tots els següents estan a una distància del límit inferior de 0,001.

20. La successió $a_n = 3n^2 - 4n - 560$ no està fitada. A partir de quin valor de n els termes són més grans que 10 000.

Busquem un lloc n tal que $a_n > 10\,000$.

$$3n^2 - 4n - 560 > 10000 \Rightarrow 3n^2 - 4n - 10560 > 0$$

Les solucions són $\left(-\infty, \dfrac{-176}{3}\right)$ i $(60, +\infty)$. Només val la solució positiva. A partir del terme 60 la distància és superior a 10 000. Per exemple, podem comprovar que $a_{60} = 10\,000$ mentre que $a_{61} = 10\,359$. Així doncs, tots els termes següents són superiors a 10 000.

21 i 22. Exercicis resolts

23. Calcula aquests límits:

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{3n^3+3n}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^3+2n^2-1}{n^2+3n}$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(-3n^5+2n^4+7n-12\right)$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+6n^2+8n-1}{n^4+1}$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+n-1}{n+1}$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n^3+4n+5}{-4n^3+2n^2+5n+1}$

Límit d'un quocient: Si els polinomis del numerador i del denominador tenen el mateix grau, el límit és el quocient dels coeficients de n amb l'exponent més alt. Si el grau del numerador és inferior, el límit és 0, i si és superior, el límit és infinit. Per tant, el signe depèn dels signes dels coeficients de n amb l'exponent més alt.

Límit d'un polinomi: Sempre és infinit. El signe depèn del coeficient de n amb l'exponent més alt.

a) $\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-1}{3n^3+3n} = \frac{2}{3}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{-5n^3+2n^2-1}{n^2+3n} = -\infty$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(-3n^5+2n^4+7n-12\right) = -\infty$

d) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^3+6n^2+8n-1}{n^4+1} = 0$

e) $\lim_{n\to\infty} \frac{6n^2+n-1}{n+1} = +\infty$

f) $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+n^3+4n+5}{-4n^3+2n^2+5n+1} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}$

24. Les successions a_n i b_n tenen el mateix límit:

$$a_n = \frac{10n^3+2n^2+8n}{5n^3-4n+2} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{10n^3}{5n^3}$$

Raona per què.

Tenen el mateix límit perquè a efectes del càlcul del límit només importa el comportament dels termes amb l'exponent més alt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10n^3+2n^2+8n}{5n^3-4n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{10n^3}{n^3}+\frac{2n^2}{n^3}+\frac{8n}{n^3}}{\frac{5n^3}{n^3}-\frac{4n}{n^3}+\frac{2}{n^3}} = \lim_{n\to\infty} \frac{10+\frac{2}{n}+\frac{8}{n^2}}{5-\frac{4}{n^2}+\frac{2}{n^3}} = \frac{10+0+0}{5-0+0} = 2$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{10n^3}{5n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{10}{5} = 2$$

25. Activitat interactiva.

26. Exercici resolt

27. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{n\to\infty} 5^n$

b) $\lim_{n\to\infty} 12^{n+1}$

c) $\lim_{n\to\infty} (n+5)^n$

d) $\lim_{n\to\infty} (n^2-3n+2)^{n+4}$

e) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2-n+6}{n^2}\right)^n$

f) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+1}{2n}\right)^{\frac{3n}{n}}$

a) $\lim_{n\to\infty} 5^n = 5^{+\infty} = +\infty$

b) $\lim_{n\to\infty} 12^{n+1} = 12^{+\infty} = +\infty$

c) $\lim_{n\to\infty} (n+5)^n = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(n^2-3n+2\right)^{n+4} = (+\infty)^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n^2-n+6}{n^2}\right)^n = 2^{+\infty} = +\infty$

f) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{4n+1}{2n}\right)^{\frac{3n}{n}} = \left(\dfrac{4}{2}\right)^3 = 2^3 = 8$

28. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)^n$

b) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+2}{n}\right)^{n+1}$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n+5}{3n}\right)^n$

d) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^{n+2}$

e) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{5n+2}{5n+1}\right)^{n-3}$

f) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+8}{2n+4}\right)^{3n+1}$

a) $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)^n = 1^\infty$

$$\left(\frac{n+5}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{4}{n+1}\right)^n = \left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{4}}\right)^{n\frac{n+1}{4}\cdot\frac{4}{n+1}} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{4}}\right)^{\frac{n+1}{4}}\right)^{\frac{4n}{n+1}}$$

Llavors $\lim_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+5}{n+1}\right)^n = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n+1}{4}}\right)^{\frac{n+1}{4}}\right)^{\frac{4n}{n+1}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{\frac{n+1}{4}}\right)^{\frac{n+1}{4}}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}} = e^{\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}} = e^4$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}=1^{\infty}$

$$\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{n+1}=\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{(n+1)\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n}}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2(n+1)}{n}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n}\right)^{n+1}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{2(n+1)}{n}}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{2}}\right)^{\frac{n}{2}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+2}{n}}=e^{2}$$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n}\right)^{n}=1^{\infty}$

$$\left(\frac{3n+5}{3n}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{5}}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{5}}\right)^{n\frac{3n}{5}\cdot\frac{5}{3n}}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{5}}\right)^{\frac{3n}{5}}\right)^{\frac{5n}{3n}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+5}{3n}\right)^{n}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{5}}\right)^{\frac{3n}{5}}\right)^{\frac{5n}{3n}}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3n}{5}}\right)^{\frac{3n}{5}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{3n}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n}{3n}}=e^{\frac{5}{3}}$$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n+2}=1^{\infty}$

$$\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n+2}=\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{n+2}=\left(1+\frac{1}{n+3}\right)^{(n+2)\cdot\frac{n+3}{n+3}}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{4}}\right)^{(n+3)}\right)^{\frac{n+2}{n+3}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+4}{n+3}\right)^{n+2}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{4}}\right)^{(n+3)}\right)^{\frac{n+2}{n+3}}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+1}{4}}\right)^{(n+3)}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n+3}}=e$$

e) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{n-3}=1^{\infty}$

$$\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{n-3}=\left(\left(1+\frac{1}{5n+1}\right)^{(n-3)}\right)^{\frac{5n+1}{5n+1}}=\left(\left(1+\frac{1}{5n+1}\right)^{5n+1}\right)^{\frac{n-3}{5n+1}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{n-3}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n+1}\right)^{5n+1}\right)^{\frac{n-3}{5n+1}}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n+1}\right)^{5n+1}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{5n+1}}=e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-3}{5n+1}}=e^{\frac{1}{5}}$$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+8}{2n+4}\right)^{3n+1}=1^{\infty}$

$$\left(\frac{2n+8}{2n+4}\right)^{3n+1}=\left(\frac{n+4}{n+2}\right)^{3n+1}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{2}}\right)^{3n+1}\right)^{\frac{n+2}{2}\cdot\frac{2}{n+2}}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{n+2}{2}}\right)^{2\cdot\frac{3n+1}{n+2}}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{6n+2}{n+2}}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+8}{2n+4}\right)^{3n+1}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{6n+2}{n+2}}=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n+2}{2}}\right)^{\frac{n+2}{2}}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{6n+2}{n+2}}=e^{\lim_{n\to\infty}\frac{6n+2}{n+2}}=e^{6}$$

29 a 42. Exercicis resolts

EXERCICIS

Termes de les successions

43. Escriu els tres termes següents de cada successió.

a) $a_1=2; a_2=8; a_3=18; a_4=32,...$

b) $a_1=1; a_2=\frac{2}{5}; a_3=\frac{3}{25}; a_4=\frac{4}{125},...$

c) $a_1=1; a_2=\frac{10}{4}; a_3=\frac{15}{3}; a_4=\frac{20}{2},...$

a) $a_1=2, a_2=8, a_3=18, a_4=32, a_5=50, a_6=72, a_7=98$

El terme general és $a_n=2n^2$.

b) $a_1=1, a_2=\frac{2}{5}, a_3=\frac{3}{25}, a_4=\frac{4}{125}, a_5=\frac{5}{625}, a_6=\frac{6}{3125}, a_7=\frac{7}{15\,625}$

El terme general és $a_n=\frac{n}{5^{n-1}}$.

c) $a_1=1, a_2=\frac{10}{4}, a_3=\frac{15}{3}, a_4=\frac{20}{2}, a_5=\frac{25}{1}, a_6=\frac{30}{0}, a_7=\frac{35}{-1}$

El terme general és $a_n=\frac{5n}{6-n}$.

44. Calcula el cinquè terme d'aquestes successions.

a) $a_1=3$ i $a_n=5(a_{n-1}+4)$ si $n\geq 2$

b) $a_1=2$ i $a_n=(-2)^n a_{n-1}$ si $n\geq 2$

c) $a_1=2$, $a_2=4$ i $a_n=(a_{n-1})^2-(a_{n-2})^2$ si $n\geq 3$

a) $a_1 = 3, a_2 = 5(3+4) = 35, a_3 = 5(35+4) = 195, a_4 = 5(195+4) = 995, a_5 = 5(995+4) = 4995,$

El terme cinquè és igual a 4995. El terme general és $a_n = 5(a_{n-1} + 4)$.

b) $a_1 = 2, a_2 = (-2)^2 \cdot 2 = 8, a_3 = (-2)^3 \cdot 8 = -64, a_4 = (-2)^4(-64) = -1024, a_5 = (-2)^5(-1024) = 32\,768$

El terme cinquè és igual a 32 768. El terme general és $a_n = (-2)^n a_{n-1}$.

c) $a_1 = 2, a_2 = 4, a_3 = 4^2 - 2^2 = 12, a_4 = 12^2 - 4^2 = 128, a_5 = 128^2 - 12^2 = 16\,240$

El terme cinquè és igual a 16 240. El terme general és $a_n = (a_{n-1})^2 - (a_{n-2})^2$.

45. Comprova si el terme $\frac{12}{13}$ pertany a la successió $a_n = \frac{n+2}{n+3}$. En cas afirmatiu, digues quin lloc ocupa.

$\frac{12}{13}$ pertany a la successió $a_n = \frac{n+2}{n+3}$ si existeix un terme a_n tal que $\frac{12}{13} = \frac{n+2}{n+3}$.

$$\frac{12}{13} = \frac{n+2}{n+3} \Rightarrow 12n + 36 = 13n + 26 \Rightarrow n = 10$$

Per tant, $a_{10} = \frac{12}{13}$.

46. Calcula el valor del paràmetre *k* per tal que el quart terme de la successió $a_n = \frac{6-n^2}{3-kn}$ sigui igual a –2.

El quart terme és $a_4 = \frac{6-4^2}{3-4k}$. Igualant, tenim:

$$\frac{6-4^2}{3-4k} = -2 \Rightarrow \frac{-10}{3-4k} = -2 \Rightarrow -10 = -6 + 8k \Rightarrow -4 = 8k \Rightarrow k = \frac{-4}{8} = \frac{-1}{2}$$

47. Donats a_1 i la diferència *d* de diverses progressions aritmètiques, determina el terme general.

a) $a_1 = 7$, $d = 6$
b) $a_1 = -3$, $d = 8$
c) $a_1 = 0$, $d = 4$
d) $a_1 = 8$, $d = -5$

El terme general d'una progressió aritmètica és $a_n = a_1 + (n-1)d$

a) $a_n = a_1 + (n-1)d = 7 + (n-1)6 = 7 + 6n - 6 = 6n + 1$

b) $a_n = a_1 + (n-1)d = -3 + (n-1)8 = -3 + 8n - 8 = 8n - 11$

c) $a_n = a_1 + (n-1)d = 0 + (n-1)4 = 4n - 4$

d) $a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + (n-1)(-5) = 8 - 5n + 5 = -5n + 13$

48. Donats a_1 i la raó *r* de diverses progressions geomètriques, determina el terme general.

a) $a_1 = 2$, $r = 2$
b) $a_1 = 1$, $r = 5$
c) $a_1 = 4$, $r = 4$
d) $a_1 = 8$, $r = 3$

El terme general d'una progressió geomètrica és $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$

a) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

b) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 1 \cdot 5^{n-1} = 5^{n-1}$

c) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$

d) $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 8 \cdot 3^{n-1}$

49. D'una progressió geomètrica coneixem $a_1 = 2$ i $a_2 = 6$. Quin lloc ocupen dos termes consecutius que sumen 648?

La raó de la progressió geomètrica és $r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{6}{2} = 3$. a_n i a_{n+1} són termes consecutius i $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ i $a_{n+1} = 2 \cdot 3^{n-1+1} = 2 \cdot 3^n$.

Si la seva suma és 648, vol dir que $2 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^{n-1} = 648$.

$$2 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^{n-1} = 648 \Rightarrow 2\left(3^n + 3^{n-1}\right) = 648 \Rightarrow 3^n + 3^{n-1} = 324 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 3^{n-1}(3+1) = 324 \Rightarrow 3^{n-1} \cdot 4 = 324 \Rightarrow 3^{n-1} = 81 \Rightarrow 3^{n-1} = 3^4 \Rightarrow n-1 = 4 \Rightarrow n = 5$$

50. D'una progressió aritmètica coneixem $a_1 = -5$ i $a_2 = 2$. Determina el seu terme general.

La diferència és igual a $d = a_2 - a_1 = 2 - (-5) = 7$. El terme general és:

$$a_n = a_1 + (n-1)d = -5 + (n-1)7 = -5 + 7n - 7 = 7n - 12$$

51. D'una progressió geomètrica coneixem a_3 = 162 i a_{11} = 13 122. Calcula el terme general.

Es calcula la raó. Per passar del terme tercer a l'onzè s'ha de multiplicar 8 vegades perla raó. Per tant: $a_{11} = a_3 \cdot r^8$. Operem:

$$a_{11} = a_3 \cdot r^8 \Rightarrow 13\,122 = 162 \cdot r^8 \Rightarrow r^8 = 81 \Rightarrow r^8 = 3^4 \Rightarrow r^2 = 3 \Rightarrow r = \sqrt{3}$$

Per tant:

$$a_3 = a_1 \cdot r^2 \Rightarrow 162 = a_1 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 \Rightarrow a_1 = \frac{162}{3} = 54$$

El terme general és $a_n = 54 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^{n-1}$.

52. Coneixem dos termes d'una progressió geomètrica: a_4 = 48 i a_7 = 384. Calcula a_{10}.

Per passar del quart terme al setè s'ha de multiplicar el quart terme per tres vegades:

$$a_7 = a_4 \cdot r^3 \Rightarrow 384 = 48 \cdot r^3 \Rightarrow 8 = r^3 \Rightarrow r = 2$$

Per tant:

$$a_{10} = a_7 \cdot r^3 = 384 \cdot 2^3 = 3072$$

53. Calcula el terme general d'una progressió geomètrica de la qual saps que $a_1 + a_2 + a_3 = 35$ i que $\frac{a_5}{a_2} = 8$.

En una progressió geomètrica es compleix que $\frac{a_5}{a_2} = \frac{a_2 \cdot r^3}{a_2} = r^3$. Per tant: $r^3 = 8 \Rightarrow r = 2$.

Obtenim a_1:

$$a_1 + a_2 + a_3 = 35 \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot 2 + a_1 \cdot 2^2 = 35 \Rightarrow a_1(1+2+4) = 35 \Rightarrow a_1 \cdot 7 = 35 \Rightarrow a_1 = 5$$

El terme general és $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 5 \cdot 2^{n-1}$.

54. De les progressions següents , quines són aritmètiques i quines geomètriques? Calcula en cada cas el terme general.

a) $a_1 = 24,\ a_2 = 20,\ a_3 = 16,\ a_4 = 12,...$

b) $a_1 = 64,\ a_2 = -16,\ a_3 = 4,\ a_4 = -1,...$

c) $a_1 = 17,\ a_2 = 12,\ a_3 = 7,\ a_4 = 2,...$

d) $a_1 = 4,\ a_2 = 12,\ a_3 = 36,\ a_4 = 108,...$

En una progressió aritmètica sempre es compleix que $d = a_3 - a_2 = a_2 - a_1$, i en una progressió geomètrica sempre es compleix que $r = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$.

a) Es comprova que la progressió és aritmètica:

$a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Leftrightarrow 12 - 16 = 16 - 20 = 20 - 24 \Leftrightarrow -4 = -4 = -4$.

És una progressió aritmètica de diferència $d = -4$. El terme general és:

$a_n = a_1 + (n-1)d = 24 + (n-1)(-4) = 24 - 4n + 4 = -4n + 28$

b) Es comprova que la progressió és geomètrica:

$\frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow \frac{-1}{4} = \frac{4}{-16} = \frac{-16}{64} \Leftrightarrow \frac{-1}{4} = \frac{-1}{4} = \frac{-1}{4}$.

És una progressió geomètrica de raó r = $\frac{-1}{4}$. El terme general és:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 64 \cdot \left(\frac{-1}{4}\right)^{n-1} = 4^3 \frac{(-1)^{n-1}}{4^{n-1}} = (-1)^{n-1} \cdot 4^{3-(n-1)} = (-1)^{n-1} \cdot 4^{4-n}$

c) Es comprova que la progressió és aritmètica:

$a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 \Leftrightarrow 2 - 7 = 7 - 12 = 12 - 17 \Leftrightarrow -5 = -5 = -5$

És una progressió aritmètica de diferència $d = -5$. El terme general és:

$a_n = a_1 + (n-1)d = 17 + (n-1)(-5) = 17 - 5n + 5 = -5n + 22$

d) Es comprova que la progressió és aritmètica:

$\frac{a_4}{a_3} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1} \Leftrightarrow \frac{108}{36} = \frac{36}{12} = \frac{12}{4} \Leftrightarrow 3 = 3 = 3$

És una progressió geomètrica de raó r = 3. El terme general és:

$a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 4 \cdot 3^{n-1}$

55. Calcula el terme general d'una progressió geomètrica de la qual sabem que $a_1 + a_2 + a_3 = 65$ i que $\frac{a_7}{a_3} = 81$.

En una progressió geomètrica es compleix que $\frac{a_7}{a_3} = \frac{a_3 \cdot r^4}{a_3} = r^4$. Per tant, $r^4 = 81 = 3^4 \Rightarrow r = 3$.

Calculem el primer terme:

$a_1 + a_2 + a_3 = 65 \Rightarrow a_1 + a_1 \cdot 3 + a_1 \cdot 3^2 = 65 \Rightarrow a_1(1 + 3 + 9) = 65 \Rightarrow a_1 \cdot 13 = 65 \Rightarrow a_1 = 5$

El terme general és $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} = 5 \cdot 3^{n-1}$.

56. Escriu el terme general d'aquesta successió.

$a_1 = k,\ a_2 = 2k,\ a_3 = 3k,\ a_4 = 4k, ...$

És una progressió aritmètica de diferència $d = a_4 - a_3 = a_3 - a_2 = a_2 - a_1 = 4k - 3k = 3k - 2k = 2k - k = k$

El terme general és $a_n = a_1 + (n-1)d = k + (n-1)k = k + nk - k = nk$

57. La suma dels tres primers termes d'una progressió aritmètica és igual a 60; calcula el terme central.

Sigui a_2 el terme central. Si la diferència és *d*, el primer terme s'escriurà $a_1 = a_2 - d$, i el tercer, $a_3 = a_2 + d$.

El terme central és:

$a_1 + a_2 + a_3 = a_2 - d + a_2 + a_2 + d = 3a_2 = 60 \Rightarrow a_2 = 20$

58. El producte dels tres primers termes d'una progressió geomètrica és 64, calcula el terme central.

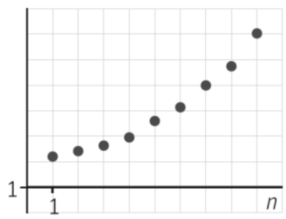
Sigui a_2 el terme central. Si la raó és *r*, el primer terme s'escriurà $a_1 = \frac{a_2}{r}$, i el tercer, $a_3 = a_2 \cdot r$.

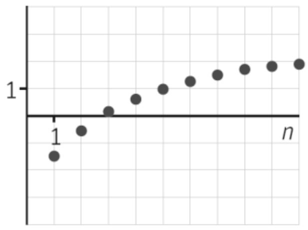
El terme central és:

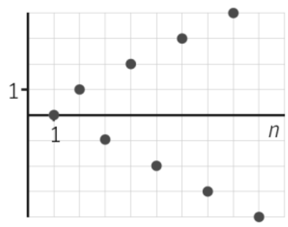
$a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 = \left(\frac{a_2}{r}\right) \cdot a_2 \cdot a_2 \cdot r = (a_2)^3 = 64 \Rightarrow a_2 = 4$

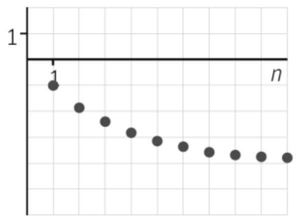
Successions i creixement

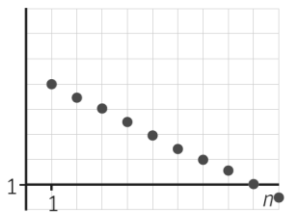
59. Hem representat gràficament diverses successions. Indica en cada cas, si n'hi ha, una fita superior i una fita inferior.

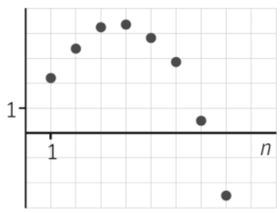
a)


c)


e)


b)


d)


f)


a) Té una fita inferior *m* = 1 i cap fita superior perquè creix.

b) Té una fita superior en *M* = –1 i una fita inferior en *m* = –4 perquè la diferència entre dos termes cada vegada és més petita i no excedeix de –4.

c) Té una fita inferior en *m* = –1,5 i una fita superior en *M* = 2 perquè els termes cada vegada estan més propers i no passen d'aquest valor.

d) Té una fita superior *M* = 4 i cap fita inferior perquè decreix.

e) No està fitada ni superiorment ni inferiorment perquè els valors dels termes van creixent alternant els signes.

f) Té una fita superior en *M* = 4,5 i cap fita inferior.

60. És creixent la successió $a_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$? Justifica-ho.

Una successió és creixent si $a_{n+1} - a_n > 0$. En aquest cas, si $a_n = \dfrac{3n-1}{n+1}$ tindrem:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)-1}{(n+1)+1} - \frac{3n-1}{n+1} = \frac{3n+2}{n+2} - \frac{3n-1}{n+1} = \frac{3n^2+5n+2-3n^2-5n+2}{(n+2)(n+1)} = \frac{4}{(n+2)(n+1)} > 0 \text{ perquè } n \geq 1.$$

61. És decreixent la successió $a_n = \dfrac{3n+1}{4n}$? Justifica-ho.

Una successió és decreixent si $a_{n+1} - a_n < 0$. En aquest cas, si $a_n = \dfrac{3n+1}{4n}$ tindrem:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+1}{4(n+1)} - \frac{3n+1}{4n} = \frac{3n+4}{4(n+1)} - \frac{3n+1}{4n} = \frac{3n^2+4n-(3n^2+4n+1)}{4(n+1)n} = \frac{-1}{4(n+1)n} < 0 \text{ perquè } n \geq 1.$$

62. Raona si la successió $a_n = \dfrac{2}{3n+1}$ està fitada. En cas afirmatiu, calcula una fita superior i una d'inferior.

Calculem els primers termes de la successió:

$$a_1 = \frac{2}{3\cdot 1+1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,;\; a_2 = \frac{2}{3\cdot 2+1} = \frac{2}{7} = 0{,}28\,;\; a_3 = \frac{2}{3\cdot 3+1} = \frac{2}{10} = 0{,}2\,;\; \ldots;\; a_{100} = \frac{2}{3\cdot 100+1} = \frac{2}{301} = 0{,}0066\ldots$$

El primer terme és $a_1 = 0{,}5$ i decreix sense arribar a tenir valors negatius. Així doncs, una fita superior és $M = 0{,}5$ i una fita inferior és $m = 0$.

63. De les successions següents, quines estan fitades superiorment i inferiorment?

a) $a_n = \dfrac{n-1}{n}$

b) $a_n = n^2 + 1$

c) $a_n = (-1)^{n+1} - 1$

d) $a_n = \dfrac{1}{n^4}$

En cada una d'elles calculem alguns termes:

a) $a_1 = \dfrac{1-1}{1} = 0;\; a_2 = \dfrac{2-1}{2} = \dfrac{1}{2};\; a_3 = \dfrac{3-1}{3} = \dfrac{1}{3};\ldots;\; a_{100} = \dfrac{100-1}{100} = 0{,}99$. Així doncs, el primer terme és $a_1 = 0$ i la successió creix però mai no arriba al valor 1 perquè el numerador és inferior al denominador. Està fitada inferiorment i superiorment. Una fita inferior és $m = 0$ i una fita superior és $M = 1$.

b) $a_1 = 1^2 + 1 = 2;\; a_2 = 2^2 + 1 = 5;\; a_3 = 3^2 + 1 = 10;\ldots;\; a_{100} = 100^2 + 1 = 10001$. Així doncs, el primer terme és $a_1 = 2$, que és una fita inferior, i no té fita superior perquè creix indefinidament.

c) $a_1 = (-1)^2 - 1 = 0;\; a_2 = (-1)^3 - 1 = -2;\; a_3 = (-1)^4 - 1 = 0;\ldots;\; a_{100} = (-1)^{101} - 1 = -2$. La successió només pren dos valors: 0 i –2. Així doncs, una fita superior serà 0 i una fita inferior, –2.

d) $a_1 = \dfrac{1}{1^4} = 1;\; a_2 = \dfrac{1}{2^4} = \dfrac{1}{16};\; a_3 = \dfrac{1}{3^4} = \dfrac{1}{81};\ldots;\; a_{100} = \dfrac{1}{100^4} = 10^{-8}$. És una successió decreixent i positiva. El primer terme $a_1 = 1$ és una fita superior i $m = 0$ és una fita inferior.

Límit de successions

64. El límit de la successió $a_n = \dfrac{n}{4n-1}$ és $L = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{4n-1} = 0,25$. A partir de quin terme n_0 es compleix que tots els termes posteriors estan a una distància inferior a 0,001 del límit L = 0,25?

Calculem la diferència entre el terme general i el límit:

$$|a_n - L| = \left|\frac{n}{4n-1} - 0,25\right| = \left|\frac{n-n+0,25}{4n-1}\right| = \left|\frac{0,25}{4n-1}\right| = \frac{0,25}{4n-1}$$

Si la diferència ha de ser inferior a 0,001, vol dir que:

$$\frac{0,25}{4n-1} < 0,001 \xrightarrow{4n-1 \text{ és positiu}} 0,25 < 0,001\cdot 4n - 0,001 \Rightarrow 0,251 < 0,004n \Rightarrow n > 62,75$$

Per tant, n_0 = 63. El terme $a_{63} = \dfrac{63}{4\cdot 63-1} = 0,250996...$ i tots els següents estan a una distància del límit inferior a 0,001. Efectivament, ho podem comprovar amb aquest valor:

$$|a_{63} - 0,25| = |0,250996... - 0,25| = 0,00099 < 0,001$$

65. Els límits següents són +∞ o –∞. Determina en cada cas el signe d'infinit?

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2n-3n^2\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{2}+3n^2+n-\dfrac{1}{2}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-4n^4+6n^2+3\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-2n)^2+3n+5\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+2n-3n^2\right) = -\infty$ perquè el coeficient del terme n^2 és negatiu.

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^3}{2}+3n^2+n-\dfrac{1}{2}\right) = +\infty$ perquè el coeficient del terme n^3 és positiu.

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(-4n^4+6n^2+3\right) = -\infty$ perquè el coeficient del terme n^4 és negatiu.

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left((-2n)^2+3n+5\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(4n^2+3n+5\right) = +\infty$ perquè el coeficient del terme n^2 és positiu.

66. Calcula, sense fer operacions, aquests límits:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-n^2+n+5}{2n^3+3n^2-4n-1}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+n+5}{n^3-2n^2-4n-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n^4}{-3n^2-n+4}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-2n^2+5n}{-3n^2-4n+3}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2+4}{n(2-n)}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2-(n+2)^2}{3n^2+n+1}\right)$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-n^2+n+5}{2n^3+3n^2-4n-1} = \dfrac{4}{2} = 2$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-n^2+n+5}{n^3-2n^2-4n-1} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n^4}{-3n^2-n+4} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^4+n^2}{-3n^2-n+4} = -\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3-2n^2+5n}{-3n^2-4n+3}=-\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4}{n(2-n)}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+4}{-n^2+2n}=-1$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-(n+2)^2}{3n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-n^2-4n-4}{3n^2+n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2-4n-4}{3n^2+n+1}=\dfrac{1}{3}$

67. Calcula aquests límits:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^{\frac{6n+1}{3n}}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{2n}\right)^{\frac{2n+1}{n-1}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^{n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+3n}{6n^2-3n}\right)^{\frac{n+2}{2n+3}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-1}{5n+2}\right)^{\frac{-3n^2+2}{n+3}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+3}{6n^2-3}\right)^{\frac{n+2}{n^2+3}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^{\frac{6n+1}{3n}}=\lim\limits_{n\to\infty}(-2)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{6n+1}{3n}}=(-2)^{\frac{6}{3}}=4$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{2n}\right)^{\frac{2n+1}{n-1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{5}{2n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n-1}}=3^2=9$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(3-\dfrac{1}{n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}n}=3^{+\infty}=+\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+3n}{6n^2-3n}\right)^{\frac{n+2}{2n+3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+3n}{6n^2-3n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{2n+3}}=\left(\dfrac{4}{6}\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-1}{5n+2}\right)^{\frac{-3n^2+2}{n+3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{10n-1}{5n+2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n^2+2}{n+3}}=\left(\dfrac{10}{5}\right)^{-\infty}=2^{-\infty}=\dfrac{1}{2^{+\infty}}=\dfrac{1}{+\infty}=0$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+3}{6n^2-3}\right)^{\frac{n+2}{n^2+3}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n^2+3}{6n^2-3}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{n^2+3}}=\left(\dfrac{4}{6}\right)^{0}=1$

68. Calcula el límit de les successions següents:

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n}\right)^{n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3}{n^2}\right)^{n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+6}{n+5}\right)^{n^2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5}{2n^2+2}\right)^{1-n}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{7n+1}{7n+2}\right)^{\frac{n^2+1}{3n-1}}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n}\right)^{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+3}{n}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}n}=(2)^{+\infty}=+\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} n} = 1^{+\infty} \Rightarrow$ indeterminació

$$\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n} = \left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n\cdot\frac{n+2}{n+2}} = \left(\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right)^{\frac{n}{n+2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+3}{n+2}\right)^{n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right)^{\frac{n}{n+2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+2}\right)^{n+2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}} = e^{1} = e$$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3}{n^2}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n^2-3}{n^2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} n^2} = 1^{+\infty} \Rightarrow$ indeterminació

$$\left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1-\frac{3}{n^2}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{\frac{-n^2}{3}}\right)^{n^2\cdot\frac{-n^2}{3}\cdot\frac{3}{-n^2}} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{-n^2}{3}}\right)^{\frac{-n^2}{3}}\right)^{\frac{3n^2}{-n^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-3}{n^2}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{-n^2}{3}}\right)^{\frac{-n^2}{3}}\right)^{\frac{3n^2}{-n^2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{-n^2}{3}}\right)^{\frac{-n^2}{3}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2}{-n^2}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3}$$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+6}{n+5}\right)^{n^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+6}{n+5}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty} n^2} = 1^{+\infty} \Rightarrow$ indeterminació

$$\left(\frac{n+6}{n+5}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{n^2} = \left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{n^2\cdot\frac{n+5}{n+5}} = \left(\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{n+5}\right)^{\frac{n^2}{n+5}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+6}{n+5}\right)^{n^2} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{n+5}\right)^{\frac{n^2}{n+5}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+5}\right)^{n+5}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+5}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{n+5}} = e^{+\infty} = +\infty$$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5}{2n^2+2}\right)^{1-n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n^2+5}{2n^2+2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}(1-n)} = 1^{-\infty} \Rightarrow$ indeterminació

$$\left(\frac{2n^2+5}{2n^2+2}\right)^{1-n} = \left(1+\frac{3}{2n^2+2}\right)^{1-n} = \left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+2}{3}}\right)^{1-n} = \left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+2}{3}}\right)^{(1-n)\cdot\frac{2n^2+2}{3}\cdot\frac{3}{2n^2+2}} =$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+2}{3}}\right)^{\frac{2n^2+2}{3}}\right)^{(1-n)\cdot\frac{3}{2n^2+2}} = \left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+2}{3}}\right)^{\frac{2n^2+2}{3}}\right)^{\frac{3-3n}{2n^2+2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{2n^2+2}\right)^{1-n} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+2}{3}}\right)^{\frac{2n^2+2}{3}}\right)^{\frac{3-3n}{2n^2+2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+2}{3}}\right)^{\frac{2n^2+2}{3}}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{3-3n}{2n^2+2}} = e^0 = 1$$

f) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+1}{7n+2}\right)^{\frac{n^2+1}{3n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+1}{7n+2}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{3n-1}} = 1^{+\infty} \Rightarrow$ indeterminació

$$\left(\frac{7n+1}{7n+2}\right)^{\frac{n^2+1}{3n-1}} = \left(1+\frac{-1}{7n+2}\right)^{\frac{n^2+1}{3n-1}} = \left(1+\frac{1}{-(7n+2)}\right)^{\frac{n^2+1}{3n-1}\cdot\frac{7n+2}{7n+2}} =$$

$$= \left(\left(1+\frac{1}{-(7n+2)}\right)^{-(7n+2)}\right)^{\frac{n^2+1}{3n-1}\cdot\frac{-1}{7n+2}} = \left(\left(1+\frac{1}{-(7n+2)}\right)^{-(7n+2)}\right)^{\frac{-n^2-1}{21n^2-n-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{7n+1}{7n+2}\right)^{\frac{n^2+1}{3n-1}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{-(7n+2)}\right)^{-(7n+2)}\right)^{\frac{-n^2-1}{21n^2-n-2}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-(7n+2)}\right)^{-(7n+2)}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{-n^2-1}{21n^2-n-2}} = e^{\frac{-1}{21}}$$

69. Indica en cada cas per a quin valor de *k* es compleixen les igualtats.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{kn^2-4n+1}{3n^2+2n+7}\right)=5$ **b)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3+kn+n}{kn^3+5n+1}\right)=\frac{1}{2}$

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{kn^2-4n+1}{3n^2+2n+7}\right)=5 \Leftrightarrow \frac{k}{3}=5 \Rightarrow k=15$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^3+kn+n}{kn^3+5n+1}\right)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{3}{k}=\frac{1}{2} \Rightarrow k=6$

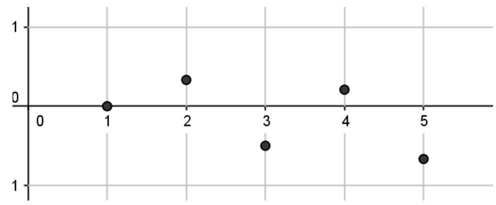
Síntesi

70. Raona per què la successió $a_n=(-1)^n\frac{n-1}{n+1}$ no és creixent ni decreixent.

Es calculen els primers termes de la successió i s'analitza el seu comportament.

$a_1=(-1)^1\frac{1-1}{1+1}=0$; $a_2=(-1)^2\frac{2-1}{2+1}=\frac{1}{3}$; $a_3=(-1)^3\frac{3-1}{3+1}=-\frac{1}{2}$; $a_4=(-1)^4\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}$; $a_5=(-1)^5\frac{5-1}{5+1}=-\frac{2}{3}$

La successió va alternant els signes. Per tant, ni creix ni decreix.



71. Considera aquesta successió:

$$a_1=\frac{3}{4},\ a_2=\frac{6}{9},\ a_3=\frac{11}{16},\ a_4=\frac{18}{25},...$$

Raona per què el límit és $L = 1$.

El seu terme general és $a_n=\frac{n^2+2}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2}{n^2+2n+1}$. El seu límit és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2}{n^2+2n+1}=1$.

72. Considera aquesta successió:

$$a_1=\frac{1}{2\cdot 3},\ a_2=\frac{2}{3\cdot 4},\ a_3=\frac{3}{4\cdot 5},\ a_4=\frac{4}{5\cdot 6},...$$

Raona per què el límit és $L = 0$.

El seu terme general és $a_n=\frac{n}{(n+1)(n+2)}=\frac{n}{n^2+3n+2}$. El seu límit és $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+3n+2}=0$.

73. Donades les successions $a_n=-n^2+n^3$, $a_n=\frac{1}{n^2}$, $a_n=(-1)^n$ i $a_n=\frac{3n}{2n+1}$, relaciona cadascuna d'elles amb les afirmacions següents:

a) La successió a_n és creixent i no convergent.

b) La successió a_n és creixent i convergent.

c) La successió a_n és decreixent i convergent.

d) La successió a_n és fitada i no convergent.

Calculem el límit de cada successió i les estudiem:

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(-n^2+n^3\right)=+\infty \Rightarrow$ La successió $a_n=-n^2+n^3$ és creixent; només cal calcular els primers termes.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0 \Rightarrow$ La successió $a_n=\frac{1}{n^2}$ és decreixent.

$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n=$ No té límit $\Rightarrow$ La successió $a_n=(-1)^n$ no és ni creixent ni decreixent però està fitada entre –1 i 1.

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n+1}=\frac{3}{2} \Rightarrow$ La successió $a_n=\frac{3n}{2n+1}$ és creixent.

a) És la successió $a_n=-n^2+n^3$.

b) És la successió $a_n=\frac{3n}{2n+1}$.

c) És la successió $a_n=\frac{1}{n^2}$.

d) És la successió $a_n=(-1)^n$.

74. El límit de la successió $a_n = \frac{4n+3}{n}$ és L = 4. Esbrina quants termes de la successió queden fora de l'interval (4 – 0,001, 4 + 0,001).

Si $\lim_{n\to\infty} \frac{4n+3}{n} = 4$, vol dir que per a qualsevol nombre real ε, existeix un lloc n_0 tal que per a tots els termes $n > n_0$ es compleix que $\left|\frac{4n+3}{n} - 4\right| < \varepsilon$.

Si ε = 0,001, es té que $\left|\frac{4n+3}{n} - 4\right| < 0{,}001 \Rightarrow \left|\frac{4n+3-4n}{n}\right| < 0{,}001 \Rightarrow \frac{3}{n} < 0{,}001 \Rightarrow 3 < 0{,}001n \Rightarrow n > 3000$

O sigui, a_{3001} i tots els següents estan dins de l'interval (4 – 0,001, 4 + 0,001). Per tant, estan fora de l'interval del primer terme a_1 al terme a_{3000}, que és un extrem de l'interval.

Efectivament: a_{3000} = 4,001. Llavors, $|a_{3000} - 4| = |4{,}001 - 4| = 0{,}001 = \varepsilon$

75. Calcula el límit de la successió $a_n = \frac{n^2+3}{n^2}$. A partir de quin terme tots els posteriors estan separats del límit per una distància inferior a 0,0001 unitats?

El límit és: $\lim_{n\to\infty} \frac{n^2+3}{n^2} = 1$

$$\left|\frac{n^2+3}{n^2} - 1\right| < 0{,}0001 \Rightarrow \left|\frac{n^2+3-n^2}{n^2}\right| < 0{,}0001 \Rightarrow \frac{3}{n^2} < 0{,}0001 \Rightarrow 3 < 0{,}0001n^2 \Rightarrow n^2 > 30000 \Rightarrow n > 173{,}20$$

(L'altra solució és n < –173,20, però no la tenim en compte perquè la n no pot ser negativa.)

El terme a_{173} està a una distància del límit 1 superior a 0,0001, i el terme a_{174} i tots els posteriors estan a una distància del límit 1 inferior a 0,0001.

76. La successió $a_n = -n^2$ té per límit –∞. Calcula a partir de quin terme la successió pren valors inferiors a –100 000.

Sigui n el terme a partir del qual la successió pren valors inferiors a –100 000. Es complirà:

$$-n^2 < -100000 \Rightarrow n^2 > 100000 \Rightarrow n < 316{,}22$$

(L'altra solució és n < –316,22, però no la tenim en compte perquè la n no pot ser negativa.)

El terme a_{317} i tots els posteriors prenen valors inferiors a –100 000.

QÜESTIONS

77. Indica raonadament quines de les afirmacions següents són certes. Si cal, aporta exemples.

a) Una successió creixent és convergent.

b) Una successió creixent i fitada superiorment és convergent.

c) Una successió creixent i no fitada superiorment és divergent.

d) Una successió decreixent és divergent.

e) Una successió decreixent està fitada superiorment.

f) Una successió decreixent fitada inferiorment és convergent.

g) Una successió convergent està fitada.

h) Una successió no fitada és divergent.

a) Fals. La successió $a_n = n^2$ és creixent i divergent perquè $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$

b) Cert i la fita superior més petita serà el seu límit.

c) Cert. Si els termes cada vegada són més grans, la successió tendeix a infinit.

d) Fals. La successió $a_n = \frac{1}{n}$ és decreixent i té límit $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

e) Cert i el primer terme és la fita superior.

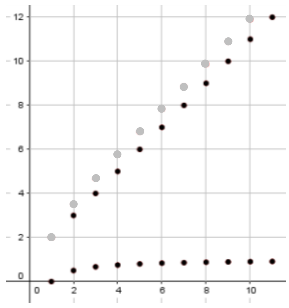
f) Cert i la fita inferior més gran serà el seu límit.

g) Cert. Està fitada entre el primer terme i el límit.

h) Fals. Per exemple algunes successions alternades no tenen fites com $a_n = (-1)^n n$ que és –1, 2, –3, 4, –5, 6, ... però tampoc tenen límit perquè els valors positius van cap a $+\infty$ i els negatius cap a $-\infty$.

78. Les successions $a_n = n+1$ i $b_n = \frac{n-1}{n}$ són creixents. Creus que la successió suma $a_n + b_n$ també serà creixent? Justifica-ho.

Sí, i possiblement creixerà més ràpidament. En gris hem representat la successió suma de les dues donades.



79. Si una successió a_n és creixent té una fita inferior. Així mateix, si una successió a_n és decreixent té una fita superior. Raona en cada cas per què.

Si és creixent, comença a augmentar el valor dels seus termes a partir del primer i aquest serà el més petit de tots. Per tant, el primer terme és una fita inferior.

Si és decreixent, comença a disminuir a partir del valor del primer terme. Així doncs, el primer terme serà el valor més gran i, per tant, una fita superior.

80. Donat un triangle equilàter d'àrea A_0, es construeix el triangle de Sierpinski seguint els passos següents:

– Unim els punts mitjans dels costats del triangle original i traiem treu el triangle del mig.

– Repetim la mateixa operació en els triangles que queden a la figura i traiem tres nous triangles.

– En el pas següent traiem 9 triangles, en el següent, 27 i així successivament.

Sense fer càlculs, quant creus que valdrà la suma de totes les àrees dels triangles eliminats del triangle original?

Si es van traient triangles, per petits que siguin, acabarem traient-los tots. Per tant, la suma de totes les àrees serà igual a l'àrea inicial A_0 .

Podem arribar a la mateixa conclusió algebraicament i utilitzant límits:

L'àrea del primer triangle blanc és $\frac{1}{4}A_0$, la de la segona divisió és $\frac{1}{4^2}A_0$ i hi ha tres triangles com aquest. La següent és $\frac{1}{4^3}A_0$ i hi ha 9 triangles, després hi ha 27 triangles d'àrea $\frac{1}{4^4}A_0$, etc.

La suma de totes les àrees serà: $\frac{1}{4}A_0+3\frac{1}{4^2}A_0+3^2\frac{1}{4^3}A_0+3^3\frac{1}{4^4}A_0+3^4\frac{1}{4^5}A_0+...$

Com que $\frac{1}{4},\frac{3}{4^2},\frac{3^2}{4^3},....,\frac{3^n}{4^{n+1}},...$ és una progressió geomètrica de primer terme $a_1=\frac{1}{4}$ i de raó $r=\frac{3}{4}<1$, la suma dels infinits termes és:

$$S_\infty=\frac{a_1}{1-r}=\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}}=1$$

Llavors $\frac{1}{4}A_0+3\frac{1}{4^2}A_0+3^2\frac{1}{4^3}A_0+3^3\frac{1}{4^4}A_0+3^4\frac{1}{4^5}A_0+...=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4^2}+\frac{3^2}{4^3}+\frac{3^3}{4^4}+\frac{3^4}{4^5}+...\right)A_0=A_0$

PROBLEMES

81 Els angles d'un quadrilàter es troben en progressió geomètrica, i sabem que el més gran és 27 vegades el més petit. Quant fan aquests angles?

Siguin a_1, a_2, a_3 i a_4 els quatre angles. Sabem que $a_1+a_2+a_3+a_4=360$ i que $a_4=27a_1$. Per tant:

$$a_4=27a_1 \Rightarrow a_1r^3=27a_1 \Rightarrow r^3=27 \Rightarrow r=3$$

$$a_1+a_1\cdot 3+a_1\cdot 3^2+a_1\cdot 3^3=360 \Rightarrow a_1(1+3+9+27)=360 \Rightarrow 40a_1=360 \Rightarrow a_1=9$$

Els angles són 9º, 27º, 81º i 243º.

82. Tres nombres es troben en progressió geomètrica. El segon és 32 unitats més gran que el primer, i el tercer, 96 unitats més gran que el segon. Calcula aquests nombres.

Siguin els nombres a_1, a_2 i a_3 . Tindrem:

$$a_2=32+a_1 \text{ i } a_3=96+a_2=96+32+a_1=128+a_1$$

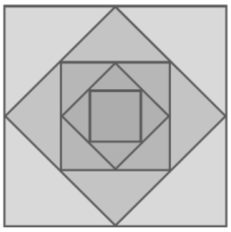
Si formen una progressió geomètrica, es complirà: $\frac{a_3}{a_2}=\frac{a_2}{a_1}$.

Calculem el primer terme:

$$\frac{128+a_1}{32+a_1}=\frac{32+a_1}{a_1} \Rightarrow 128a_1+a_1^2=1024+32a_1+32a_1+a_1^2 \Rightarrow 64a_1=1024 \Rightarrow a_1=16$$

Els nombres són: 16, 48, 144.

83. Dins d'un quadrat d'1 cm de costat en construïm un altre unint els punts mitjans dels costats. Repetim aquesta operació un nombre infinit de vegades.



a) Calcula l'àrea del quatre primers quadrats. Anomena'ls A_1, A_2, A_3 i A_4.

b) Les àrees formen una progressió geomètrica. Calcula la seva raó.

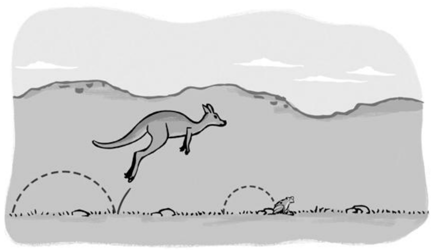
c) Troba el terme general A_n. Calcula $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$.

a) $A_1 = 1^2 = 1$; $A_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^2 = \frac{1}{2}$; $A_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2}$ i $A_4 = \left(\sqrt{\frac{1}{8}}\right)^2 = \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3}$

b) La raó és $r = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{1}{2}}{1} = \frac{1}{2}$.

c) El terme general s'escriu $A_n = \frac{1}{2^{n-1}}$ i el límit és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0$.

84 Un cangur i una granota es troben a una distància de 20 m. El cangur avança d'un salt la meitat de la distància que els separa i, a continuació, la granota s'allunya també d'un salt l'equivalent a la meitat de la distància que els separa en aquell moment. Els dos animals repeteixen aquests salts indefinidament.



a) S'acabaran trobant? Raona la resposta.

b) Les longituds dels salts de cada animal constitueixen una successió numèrica. Escriu els cinc primers termes de cada una d'aquestes successions. En sabries donar el terme general?

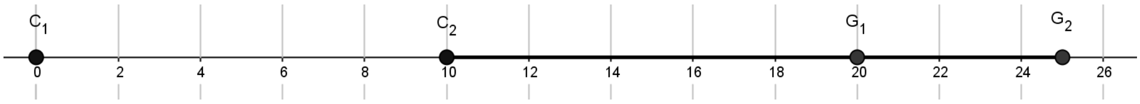
a) No es trobaran mai perquè la granota sempre avança la meitat de la distància anterior.

b) La distància inicial entre tots dos animals és:

$$d_1 = 20$$

La distància entre tots dos animals després del primer salt de cada un és:

$$d_2 = \frac{d_1}{2} + \frac{d_1}{4} = 10 + 5 = 15.$$

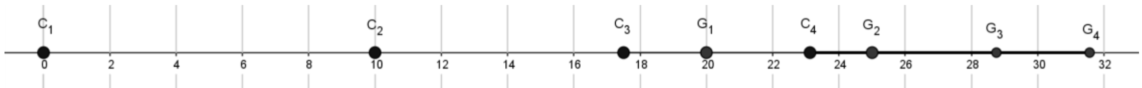


La distància entre tots dos animals després del segon salt de cada un és:

$$d_3 = \frac{d_2}{2} + \frac{d_2}{4} = \frac{15}{2} + \frac{15}{4} = 7,5 + 3,75 = 11,25$$

La distància entre tots dos animals després del tercer salt de cada un és:

$$d_4 = \frac{d_3}{2} + \frac{d_3}{4} = \frac{11,25}{2} + \frac{11,25}{4} = 5,625 + 2,8125 = 8,4375$$



Per tant, la distància posterior serà $d_5 = \frac{d_4}{2} + \frac{d_4}{4} = 6,32$

En general, $d_n = \frac{d_{n-1}}{2} + \frac{d_{n-1}}{4} = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right)d_{n-1} = \frac{3}{4}d_{n-1}$ per a $d_1 = 20$ i $n > 1$

85 La suma dels set primers termes d'una progressió geomètrica de raó 3 és 7651. Busca els termes primer i setè.

Si la raó és $r = 3$ els set primers termes de la progressió geomètrica seran: a_1, $3a_1$, $9a_1$, $27a_1$, $81a_1$, $243a_1$, $729a_1$.

La seva suma és:

$a_1 + 3a_1 + 9a_1 + 27a_1 + 81a_1 + 243a_1 + 729a_1 = 7651 \Rightarrow 1093a_1 = 7651 \rightarrow a_1 = 7$

Els termes demanats són:

$a_1 = 7$ i $a_7 = 729a_1 = 729 \cdot 7 = 5103$

86. En una sala de cinema, la primera fila de butaca està a 8,6 m de la pantalla, mentre que la sisena fila es troba a 13,4 m. A quina fila estarà situada una persona si la distància fins a la pantalla és de 23 m?

La distància a la pantalla des de cada fila forma una progressió aritmètica de diferència la distància entre dues files. Si el primer terme és la distància de la primera fila a la pantalla serà $a_1 = 8,6$, i si la sisena fila es troba a 13,4 metres, $a_6 = 13,4$.

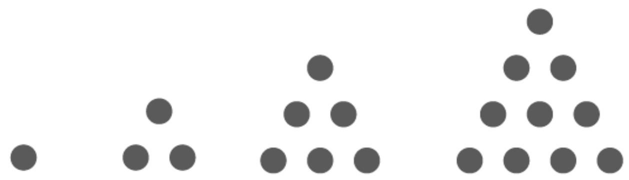
Atès que $a_6 = a_1 + 5d \Rightarrow 13,4 = 8,6 + 5d \Rightarrow d = 0,96$

Si la distància a la pantalla són 23 m, es té:

$a_n = a_1 + (n-1)d \Rightarrow 23 = 8,6 + (n-1)0,96 \Rightarrow 14,4 = 0,96n - 0,96 \Rightarrow n = 16$

La persona és a la setzena fila.

87. La quantitat de punts en aquestes figures forma la successió dels anomenats nombres triangulars.



a) Busca els 10 primers nombres triangulars.

b) Calcula el terme general de la successió.

c) Quin terme val 231?

a) Els deu primers nombres triangulars són:

1, 3, 6, 10, 10 + 5 = 15, 15 + 6 = 21, 21 + 7 = 28, 28 + 8 = 36, 36 + 9 = 45, 45 + 10 = 55.

b) $a_n = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1$ ja que:

$$a_2 = a_1 + 2 = 1 + 2$$
$$a_3 = a_2 + 3 = a_1 + 2 + 3 = 1 + 2 + 3$$
$$a_4 = a_3 + 4 = a_1 + 2 + 3 + 4 = 1 + 2 + 3 + 4$$

c) La successió 1, 2, 3, ..., n – 2, n – 1, n és una progressió aritmètica de diferència d = 1. La suma dels n primers termes s'escriu $S = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$.

S'ha de trobar el valor de n tal que $231 = n + (n-1) + (n-2) + ... + 3 + 2 + 1$

Així doncs, $231 = \frac{(1+n)n}{2} \Rightarrow 462 = n + n^2 \Rightarrow n = 21$

88. Deixem caure una pilota des d'una altura de 48 m. Despres de cada rebot, la pilota arriba a la meitat de l'altura anterior.

a) Escriu la successió de les altures a què arriba la pilota en els successius rebots.

b) A quina altura arribara en el vuitè rebot.

a) Se sap que:

$$h_1 = 48; \quad h_2 = \frac{48}{2}; \quad h_3 = \frac{48}{2^2}; \quad h_4 = \frac{48}{2^3}; \dots$$

El terme general serà:

$$h_n = \frac{48}{2^{n-1}} = \frac{2^4 \cdot 3}{2^{n-1}} = 3 \cdot 2^{4-(n-1)} = 3 \cdot 2^{5-n}$$

b) En el vuitè rebot arribarà a $h_8 = 3 \cdot 2^{5-8} = 3 \cdot 2^{-3} = 0{,}375$ m.

89. Un pastís de noces té diversos pisos. El pastisser vol posar al pis de dalt 8 maduixes per adornar-lo, al de sota 5 mes que al de sobre, i així successivament posant 5 maduixes més a cada pis.

a) Quants pisos té el pastés si al de sota de tot hi ha d'haver 53 maduixes?

b) Quantes maduixes fa servir en total?

a) Les maduixes de cada pis formen una progressió aritmètica de diferència d = 5. Els seus termes són: 8, 13, 18, 23, 28, 33,...

El terme general és: $a_n = a_1 + (n-1)d = 8 + (n-1)5 = 5n + 3$

El pastís té 10 pisos perquè $53 = 5n + 3 \Rightarrow 50 = 5n \Rightarrow n = 10$

b) La suma de les maduixes dels deu primers pisos és $S=\dfrac{(a_1+a_n)n}{2}$

$$S=\frac{(a_1+a_n)n}{2}=\frac{(8+53)10}{2}=305 \text{ maduixes.}$$

90. Troba el valor de *x* per tal que 2*x*, 4*x* − 5 i 3*x* + 8 siguin tres termes consecutius d'una progressio aritmetica.

Tres termes consecutius d'uns progressió aritmètica compleixen que $a_{n+1}-a_n=a_n-a_{n-1}$.

Per tant: $(3x+8)-(4x-5)=(4x-5)-2x \Rightarrow -x+13=2x-5 \Rightarrow 18=3x \Rightarrow x=6$

Els tres termes són: 12, 19 i 26.

91. A principi de curs un institut ha comprat una fotocopiadora que ha costat 12 000 €. Es calcula que al final de cada curs la fotocopiadora perd el 12 % del valor que tenia al principi del curs. Quin serà el seu valor d'aquí a 4 anys?

Sigui $a_1=12\ 000$ el seu valor inicial.

Passat un any, el nou valor serà un 88 % del valor inicial, ja que perd un 12 %. Per tant:

$a_2=88\%\text{ de }12\ 000=0{,}88\cdot 12\ 000$

Passats dos anys, el valor serà: $a_3=0{,}88a_2=(0{,}88)^2\cdot 12\ 000$

Els successius valors formen una progressió geomètrica de raó r = 0,88.

El terme general és:

$a_n=(0{,}88)^{n-1}\cdot 12\ 000$

D'aquí a 4 anys, el seu valor serà:

$a_5=(0{,}88)^4\cdot 12\ 000=7196{,}34\text{ euros}$

92. Tenim 1 kg d'un material radioactiu amb la característica següent: cada any la seva massa es redueix a la meitat.

a) Quin és el terme general de la successió que expressa la pèrdua de material amb el temps?

b) Calcula l'any a partir del qual la quantitat de material que queda és inferior a 1 g?

Si la massa es redueix a la meitat, tenim una progressió geomètrica de raó $r=\dfrac{1}{2}$ i de terme inicial $a_1=1000$ grams.

El terme general és:

$$a_n=a_1\cdot r^{n-1}=1000\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1000}{2^{n-1}} \text{ (la massa en grams).}$$

Es calcula en quin any el material que queda és igual a 1:

$$1=\frac{1000}{2^{n-1}}\Rightarrow 2^{n-1}=1000\Rightarrow \log 2^{n-1}=\log 1000\Rightarrow (n-1)\log 2=3\Rightarrow (n-1)0{,}30=3\Rightarrow n=\frac{3{,}30}{0{,}30}=11$$

A partir de l'onzè any la massa és inferior a 1 gram.

93 Tres parelles d'una espècie en perill d'extinció s'introdueixen en un parc natural per intentar la seva recuperació. Els estudis indiquen que la població augmentarà d'acord amb la successió següent:

$$P_n = 6 + \frac{319n^2}{n^2 + 100}$$

on *n* és el temps en anys.

a) La població crítica a partir de la qual es considera que la repoblació ha tingut èxit és quan se superen els 50 exemplars. Quan s'arriba al nivell crític?

b) Quin és el comportament de la població passats n = 25 anys? I passats n = 50 anys?

c) Arribarà algun moment en què la població s'estabilitzarà? O creixerà sense parar?

a) Si s'han de superar el 50 exemplars, s'ha de resoldre la inequació $6 + \frac{319n^2}{n^2+100} > 50$. Així doncs, tenim:

$$6 + \frac{319n^2}{n^2+100} = 50 \Rightarrow \frac{319n^2}{n^2+100} = 44 \Rightarrow 319n^2 = 44n^2 + 4400 \Rightarrow 275n^2 = 4400 \Rightarrow n = 4$$

Hauran de passar 4 anys perquè se superin 50 exemplars.

b) Si n = 25, tenim:

$$P_{25} = 6 + \frac{319 \cdot 25^2}{25^2 + 100} = 281 \text{ exemplars}$$

$P_{50} = 6 + \frac{319 \cdot 50^2}{50^2 + 100} = 312{,}73$. Hi haurà 312 exemplars.

c) Per saber si s'estabilitzarà, es fa el límit següent:

$$\lim_{n\to\infty} \left(6 + \frac{319n^2}{n^2+100} \right) = 6 + 319 = 325$$

Per molts anys que passin, la població no superarà els 325 exemplars. Quan arribi a aquesta xifra, el creixement s'aturarà.

94 El volum d'una massa de terra és aproximadament de 25 000 000 m³. Es calcula que l'erosió provoca una disminució del 3% anual de l'esmentat volum, que es pot expressar en forma de successió:

$$V_n = 25\ 900\ 000 \cdot 0{,}97^n$$

on V_n és el nou volum en metres cúbics passats *n* anys.

a) Demostra que la successió és decreixent.

b) Quin serà el volum d'aquesta massa de terra d'aquí a 50 anys? Quina part representa del volum actual?

a) La successió és decreixent perquè consta d'una part fixa (25 000 000) i una de variable, $0{,}97^n$, que decreix perquè la base és inferior a 1.

Efectivament:

$$0{,}97^1 = 0{,}97; \quad 0{,}97^2 = 0{,}94; \quad 0{,}97^3 = 0{,}91; \ldots$$

b) $V_{50} = 25\,000\,000 \cdot 0{,}97^{50} = 5\,451\,634{,}38 \text{ m}^3$

Representa $\frac{5\,451\,634{,}38}{25\,000\,000} = 0{,}218$, o sigui, el 21,8 % de la massa actual.

PER APROFUNDIR

95. La successió de Fibonacci es forma d'acord amb aquesta regla: els dos primers termes són $a_1 = 1$ i $a_2 = 1$, i la resta de termes s'obtenen sumant els dos anteriors:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89...

Aquesta successió es pot obtenir mitjançant aquest terme general:

$$a_n = \frac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n - \left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2^n \cdot \sqrt{5}}$$

Amb un full de càlcul, determina els deu primers termes a partir d'aquesta fórmula.

Aplicant la fórmula en un full de càlcul, obtenim els termes de la successió de Fibonacci.

96. Tenim dues successions: $a_n = \frac{2^n \cdot n^n}{n!}$ i $b_n = \frac{2^{n+1} \cdot (n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$. Calcula $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{2^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n \cdot n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)^{n+1}\cdot n!}{2^n\cdot n^n\cdot(n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot(n+1)^{n+1}\cdot n!}{n^n\cdot(n+1)\cdot n!} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot(n+1)^{n+1}}{n^n\cdot(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\cdot(n+1)^n}{n^n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = 2\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 2e$$

97. Hem definit una successió de la manera següent:

$$a_1 = \frac{1}{2} \text{ i } a_n = \left(a_{n-1}\right)^2 \text{ si } n \geq 2$$

a) Determina una fita inferior i una fita superior.

b) Demostra que és decreixent.

c) Prova que és convergent i calcula el seu límit.

La successió és la següent:

$$a_1 = \frac{1}{2};\ a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2^2};\ a_3 = \left(\frac{1}{2^2}\right)^2 = \frac{1}{2^4};\ a_4 = \left(\frac{1}{2^4}\right)^2 = \frac{1}{2^8};\ \ldots;a_n = \frac{1}{2^{2^{n-1}}} \text{ per a } n > 1$$

a) Una fita superior és el primer terme $\frac{1}{2}$, i una inferior pot ser 0 ja que la successió decreix però mai no pren valors negatius.

b) És decreixent perquè el numerador és constant i igual a 1, i el denominador $2^{2^{n-1}}$ cada vegada és més gran. Aleshores, el quocient va disminuint a mesura que augmenta el denominador.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2^{2^{n-1}}} = \frac{1}{2^{2^{+\infty-1}}} = \frac{1}{2^{2^{+\infty}}} = \frac{1}{2^{+\infty}} = 0$

98. Escriu en cada cas dues successions a_n i b_n tals que compleixin les condicions següents:

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 5$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$ i $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = +\infty$

Hi ha múltiples respostes, per exemple:

a) $a_n = 5n^2 + n + 1$ i $b_n = n^2 + 3n + 2$

Es compleix:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \text{ i } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+n+1}{n^2+3n+2} = 5$$

b) $a_n = 5n^2 + n + 1$ i $b_n = -2n^3 + n^2 + 3n + 2$

Es compleix:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \text{ i } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{5n^2+n+1}{-2n^3+n^2+3n+2} = 0$$

c) $a_n = -5n^2 + n + 1$ i $b_n = -3n + 2$

Es compleix:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty,\quad \lim_{n\to\infty} b_n = -\infty \text{ i } \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{-5n^2+n+1}{-3n+2} = +\infty$$

99. Indica en cada cas per a quin valor de *k* es compleixen aquestes igualtats:

a) $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{kn-1}{2n}} = \frac{1}{9}$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(1-k)n^3+2n^2+5n-4}{n^2-n+3} = 2$

c) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+5}{4n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+1}{4n^2+3}\right)^{kn^2}$

d) $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2n^2+k}{2n^2+5}\right)^{n^2+3n+2} = e^3$

a) $\lim_{n\to\infty} 3^{\frac{kn-1}{2n}} = \frac{1}{9} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} 3^{\frac{kn-1}{2n}} = \frac{1}{3^2} \Leftrightarrow 3^{\lim_{n\to\infty}\frac{kn-1}{2n}} = 3^{-2} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{kn-1}{2n} = -2 \Leftrightarrow \frac{k}{2} = -2 \Leftrightarrow k = -4$

b) $\lim_{n\to\infty} \frac{(1-k)n^3+2n^2+5n-4}{n^2-n+3} = 2 \Leftrightarrow 1-k = 0 \Leftrightarrow k = 1$

c) Calculem els dos límits per separat:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+5}{4n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{4n+3}{2}}\right)^{n\cdot\frac{4n+3}{2}\cdot\frac{2}{4n+3}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4n+3}{2}}\right)^{\frac{4n+3}{2}}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{4n+3}} = e^{\frac{1}{2}}$$ i

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+1}{4n^2+3}\right)^{kn^2} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+3}{-2}}\right)^{kn^2\cdot\frac{4n^2+3}{-2}\cdot\frac{-2}{4n^2+3}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4n^2+3}{-2}}\right)^{\frac{4n^2+3}{-2}}\right)^{\lim_{n\to\infty}\frac{-2kn^2}{4n^2+3}} = e^{\frac{-2k}{4}} = e^{\frac{-k}{2}}$$

Llavors $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n+5}{4n+3}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4n^2+1}{4n^2+3}\right)^{kn^2} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{-k}{2}} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-k}{2} \Rightarrow k = -1$

d) Operem:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+k}{2n^2+5}\right)^{n^2+3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{k-5}{2n^2+5}\right)^{n^2+3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+5}{k-5}}\right)^{(n^2+3n+2)\cdot\frac{2n^2+5}{k-5}\cdot\frac{k-5}{2n^2+5}}=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2n^2+5}{k-5}}\right)^{\frac{2n^2+5}{k-5}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+3n+2)\frac{k-5}{2n^2+5}}=e^{\frac{k-5}{2}}$$

Llavors:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+k}{2n^2+5}\right)^{n^2+3n+2}=e^3\Leftrightarrow e^{\frac{k-5}{2}}=e^3\Leftrightarrow\frac{k-5}{2}=3\Leftrightarrow k=11$$

100. Indica per a quins valors de *a* i *b* es compleix la igualtat següent.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{an+1}{3n+2}\right)^{bn-5}=e^5$$

Atès que el límit ve donat en funció del nombre *e,* tenim que *a* = 3. Així doncs, queda $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{bn-5}=e^5$.

Ara es calcula el límit:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{bn-5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{-1}{3n+2}\right)^{bn-5}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-3n-2}\right)^{(bn-5)\frac{-3n-2}{-3n-2}}=$$

$$=\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-3n-2}\right)^{-3n-2}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{bn-5}{-3n-2}}=e^{\frac{b}{-3}}$$

Si igualem, tenim:

$$e^{\frac{b}{-3}}=e^5\Leftrightarrow\frac{b}{-3}=5\Leftrightarrow b=-15$$

ENTORN MATEMÀTIC

AMORTITZACIÓ D'UN CAPITAL

En Pere i la Roser han rebut d'un avantpassat una herència de 100 000 € cadascú. Passada la sorpresa inicial, decideixen ingressar els diners en dues entitats bancàries diferents a deu anys. Les dues entitats els ofereixen el mateix rèdit, r = 3,5 %.

- **L'entitat d'en Pere li proposa una amortització anual dels interessos, és a dir, al final de cada any els interessos s'afegiran al capital i l'any següent el rèdit s'aplicarà a la nova quantitat. Aquest procés durarà fins al final dels 10 anys.**
- **La Roser pressiona perquè l'entitat li ofereixi una amortització mensual: cada mes se li sumaran els interessos al capital fins a arribar als 10 anys.**

En Pere fa càlculs i sap que si C_0 és el capital inicial, passat un any tindrà $C_1 = C_0 + I$, on I és l'interès. Per tant:

$$I = 3{,}5\ \%\ \text{de}\ C_0 = 0{,}035C_0$$

- **Passat un any el capital serà: $C_1 = C_0 + 0{,}035C_0 = C_0(1 + 0{,}035)$.**
- **El segon any, tindrà: $C_2 = C_1 + 0{,}035C_1 = C_1\,(1 + 0{,}035) = C_0(1 + 0{,}035)^2$.**
- **En general, en $t = n$ anys obtindrà: $C_n = C_0\left(1+0{,}035\right)^n = 100\ 000\left(1+0{,}035\right)^n$.**

La Roser fa el mateix, però com que l'amortització és mensual i cada any té 12 mesos, el capital final serà:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{0{,}035}{12}\right)^{12n} = 100\ 000\left(1+\frac{0{,}035}{12}\right)^{12n}$$

En Pere s'adona que la Roser obtindrà més benefici que ell i pensa que si aconseguís que l'amortització fos a cada moment, el capital final seria molt més gran. En Pere calcula que dividint el temps en k parts, amb k tendint a infinit, llavors el capital final després de n anys seria:

$$C_n = \lim_{k\to\infty} C_0\left(1+\frac{0{,}035}{k}\right)^{kn} = C_0\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{0{,}035}{k}\right)^{kn} = 100\ 000\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{0{,}035}{k}\right)^{kn}$$

En el supòsit que el temps és pogués dividir en infinites parts, el capital final després de 10 anys es podria calcular amb aquesta fórmula: $C_F = 100\ 000\lim_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{0{,}035}{k}\right)^{10k}$. Quant seria?

Per determinar l'amortització del capital, calculem el límit:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}035}{k}\right)^{10k} = 1^{+\infty}$$

Resolem la indeterminació:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}035}{k}\right)^{10k} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{k}{0{,}035}}\right)^{10k\cdot\frac{k}{0{,}035}\cdot\frac{0{,}035}{k}} = \left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\dfrac{k}{0{,}035}}\right)^{\frac{k}{0{,}035}}\right)^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{10k\cdot 0{,}035}{k}} = e^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{0{,}35k}{k}} = e^{0{,}35}$$

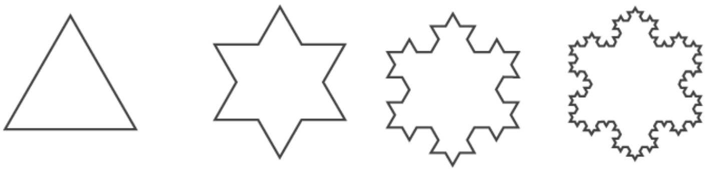
El capital final serà:

$$C_f = 100\,000\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{0{,}035}{k}\right)^{10k} = 100\,000\cdot e^{0{,}35} = 141\ 906{,}75$$

FLOC DE NEU

Una fractal de Koch mostra la forma que té un floc de neu. Es construeix a partir d'un triangle equilàter de la manera següent. Es divideix en tres parts iguals cada costat del triangle i s'elimina el terç central. En el seu lloc es construeix un triangle equilàter cap enfora.

Si el costat inicial és igual a *c*, el del nou triangle és $\frac{c}{3}$. Si repetim aquest procés, tindrem:



Es dona la paradoxa que si el procediment es repeteix infinites vegades el perímetre del floc de neu és infinit. en canvi, la seva àrea és finita i val $A_\infty = \frac{8}{5}A_0$.

Escriu el terme general de la successió que té per termes el perímetre de cadascun del triangles que es va formant.

	Nombre de segments a cada costat	**Longitud de cada segment**	**Perímetre**
	1	c	$p_0 = 3c$
	4	$\frac{c}{3}$	$p_1 = 3\cdot 4\frac{c}{3} = \frac{4}{3}\cdot 3c = \frac{4}{3}p_0$
	4^2	$\frac{c}{9} = \frac{c}{3^2}$	$p_2 = 3\cdot 4^2\frac{c}{3^2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2\cdot p_0$
	4^3	$\frac{c}{3^3}$	$p_3 = \left(\frac{4}{3}\right)^3\cdot p_0$

El terme general que ens dona el perímetre de cada nova figura serà: $p_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot p_0$.

Si calculem el límit quan *n* tendeix a infinit, tenim:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{3}\right)^n\cdot p_0 = \left(\frac{4}{3}\right)^{+\infty}\cdot p_0 = +\infty$$

AUTOAVALUACIÓ

1. Calcula el termes generals d'aquestes successions.

a) $a_1 = 0, a_2 = 3, a_3 = 8, a_3 = 15, a_5 = 24, \ldots$

b) $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{5}, a_3 = \frac{3}{7}, a_4 = \frac{4}{9}, \ldots$

a) $a_n = n^2 - 1$

b) $a_n = \frac{n}{2n+1}$

2. Escriu els cinc primers termes d'aquestes successions.

a) $a_n = \frac{n^2+1}{n}$ **b)** $a_1 = 2; a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + 2$

a) Si $a_n = \frac{n^2+1}{n}$, llavors:

$$a_1 = \frac{2}{1} = 2, a_2 = \frac{5}{2}, a_3 = \frac{10}{3}, a_4 = \frac{17}{4}, a_5 = \frac{26}{5}$$

b) $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + 2$, llavors :

$$a_1 = 2, a_2 = -\frac{1}{2}\cdot 2 + 2 = 1, a_3 = -\frac{1}{2}\cdot 1 + 2 = \frac{3}{2}, a_4 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2} + 2 = \frac{5}{4}, a_5 = -\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{4} + 2 = \frac{11}{8}$$

3. D'una progressió aritmètica coneixem $a_1 = 5$ i d = –3. Determina a_{32}.

En una progressió aritmètica es compleix:

$$a_{32} = a_1 + 31d = 5 + 31\cdot(-3) = -88$$

4. D'una progressió progressió geomètrica coneixem $a_2 = \frac{3}{4}$ i $a_5 = \frac{24}{500}$. Determina el terme general.

Atès que és una progressió geomètrica, es compleix que $a_5 = a_2 \cdot r^3$

Aleshores , $\frac{24}{500} = \frac{3}{4}\cdot r^3 \Rightarrow r^3 = \frac{24\cdot 4}{500\cdot 3} = \frac{8}{125} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{8}{125}} = \frac{2}{5}$

Així mateix: $a_2 = a_1 \cdot r \Rightarrow \frac{3}{4} = a_1 \cdot \frac{2}{5} \Rightarrow a_1 = \frac{15}{8}$

El terme general és $a_n = \frac{15}{8}\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

5. Comprova que les successions $a_n = \frac{n-5}{n}$ i $b_n = n^2 - n$ són creixents.

Una successió és creixent si es compleix que $a_{n+1} - a_n > 0$

Si $a_n = \frac{n-5}{n}$, tenim:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1-5}{n+1} - \frac{n-5}{n} = \frac{n-4}{n+1} - \frac{n-5}{n} = \frac{n^2-4n-n^2+4n+5}{(n+1)n} = \frac{5}{(n+1)n} > 0 \text{ ja que } n \geq 1$$

Així doncs, la successió és creixent.

Si $b_n = n^2 - n$, llavors:

$$b_{n+1} - b_n = [(n+1)^2 - (n+1)] - [n^2 - n] = n^2 + n - n^2 + n = 2n > 0 \text{ ja que } n \geq 1.$$

Així doncs, la successió és creixent.

6. Comprova que les successions $a_n = \frac{3n+1}{4n-1}$ i $b_n = -n^2 + n - 3$ són decreixents.

Una successió és creixent si es compleix que $a_{n+1} - a_n < 0$

Si $a_n = \frac{3n+1}{4n-1}$, tenim:

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3(n+1)+1}{4(n+1)-1} - \frac{3n+1}{4n-1} = \frac{3n+4}{4n+3} - \frac{3n+1}{4n-1} = \frac{12n^2+13n-4-12n^2-13n-3}{(4n+3)(4n-1)} = \frac{-7}{(4n+3)(4n-1)} < 0 \text{ ja que } n \geq 1$$

Així doncs, la successió és decreixent.

Si $b_n = -n^2 + n - 3$, llavors:

$$b_{n+1} - b_n = [-(n+1)^2 + (n+1) - 3] - [-n^2 + n - 3] = -n^2 - n - 3 + n^2 - n + 3 = -2n < 0 \text{ ja que } n \geq 1.$$

Així doncs, la successió és decreixent.

7. Calcula per a cada successió una fita superior i una fita inferior, si existeixen.

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$ **b)** $a_n = \frac{n^2+n}{n^2+3}$ **c)** $a_n = \frac{1}{2^n}$ **d)** $a_n = n^3 + 3$

El nombre real m serà una fita inferior si és més petit que tots els termes de la successió i el nombre real M serà una fita superior si és més gran que tots els termes de la successió.

De cada successió es calculen uns quants termes i s'estudia la seva tendència:

a) $a_n = \frac{2n+1}{n+3}$

$$a_1 = \frac{3}{4}, a_2 = 1, a_3 = \frac{7}{6}, \ldots, a_{10} = \frac{21}{13}, \ldots, a_{100} = \frac{201}{103}, \ldots, a_{1000} = \frac{2001}{1003}$$

$m = \frac{3}{4}$ i $M = 2$

b) $a_n = \dfrac{n^2+n}{n^2+3}$

$a_1 = \dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{6}{7}, a_3 = 1, ..., a_{10} = \dfrac{110}{103}, ..., a_{100} = \dfrac{10100}{10003}$

$m = \dfrac{1}{2}$ i $M = 2$

c) $a_n = \dfrac{1}{2^n}$

$a_1 = \dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{1}{4}, a_3 = \dfrac{1}{8}, ..., a_{10} = \dfrac{1}{1024}$

$m = 0$ i $M = \dfrac{1}{2}$

d) $a_n = n^3 + 3$

$a_1 = 4, a_2 = 11, a_3 = 30, ..., a_{10} = 1003$

$m = 4$ i no té fita superior.

8. Calcula aquests límits.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(n^2+3n+1\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-6n+1}{-4n^2+7n-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-6n+1}{-4n^2+n+3}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+1}{n^2}\right)^n$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (3)^{\frac{5n^2+4}{-n^2+n}}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{n+1}{n+1}\right)^{3n}$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} (n^2+3n+1) = +\infty$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{3n^2-6n+1}{-4n^2+7n-1} = \dfrac{-3}{4}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^3-6n+1}{-4n^2+n+3} = -\infty$

d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{3n^2+1}{n^2}\right)^n = 3^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim\limits_{n\to\infty} (3)^{\frac{5n^2+4}{-n^2+n}} = 3^{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+4}{-n^2+n}} = 3^{-5} = \dfrac{1}{3^5}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right)^{3n} = \lim\limits_{n\to\infty} (2)^{3n} = +\infty$

9. Indica quin o quins d'aquests límits és una potència de *e*.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+8}{n+5}\right)^{n+3}$ **b)** $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}\right)^{2n}$ **c)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+6}\right)^{n+1}$ **d)** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+3)^2}{n^2}\right)^{n+3}$

Tots els límits del tipus 1^{∞} són una potència del nombre e.

a) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+8}{n+5}\right)^{n+3} = 1^{+\infty}$

b) $\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{5}{n}\right)^{2n} = 2^{+\infty}$

c) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{n+6}\right)^{n+1} = 2^{+\infty}$

d) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+3)^2}{n^2}\right)^{n+3} = 1^{+\infty}$

Així doncs, *a* i *d* són potències de *e*.

RELACIONA I CONTESTA

Tria l'única resposta correcta en cada cas

1. Tenim la successió de termes 3, 6, 11, 18, 27,... El seu terme general és:

A. $a_n = 2n+1$ **B.** $a_n = n+2$ **C.** $a_n = n^2+2$ **D.** $a_n = 4-n^2$

La resposta correcta és la C.

2. D'una progressió geomètrica sabem que la seva raó és *r* = 3. El seu terme general pot ser:

A. $a_n = 3^{2n-1}$ **B.** $a_n = 3^{1-n}$ **C.** $a_n = 3^{n-1}$ **D.** $a_n = 3^{n^2}$

La resposta correcta és la C. En efecte: $a_n = 1\cdot 3^{n-1},\ a_1 = 1$.

3. La successió que té el terme $a_k = 0$ és:

A. $a_n = n+2$ **B.** $a_n = (-1)^{n+1} - n$ **C**. $a_n = \frac{1}{n-1}\ si\ n > 1$ **D.** $a_n = 2^n$

La resposta correcta és la B, ja que si $a_k = 0 \Rightarrow (-1)^{n+1} - n = 0 \Rightarrow n = (-1)^{n+1} \Rightarrow n = 1$.

4. Sigui a_n una successió no constant. Llavors és cert que:

A. Si a_n està fitada, aleshores és convergent.

B. Si a_n és convergent $\Rightarrow$ $b_n = (a_n)^2 + 1$ també és convergent.

C. Si a_n és creixent, aleshores és convergent.

D. Si a_n és convergent, aleshores a_n és creixent o decreixent.

La resposta correcta és la B, ja que si $\lim_{n\to\infty} a_n = L \Rightarrow \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\left((a_n)^2+1\right) = L^2+1$.

Assenyala, en cada cas, les respostes correctes

5. El límit de la successió $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3-4n+n^2-3n^3}{n-4n^2+3n^3}\right)$ és igual a:

A. $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^3-1}{n^3+1}\right)$ **B.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-1\right)^{\frac{n+1}{n-1}}$ **C.** $\lim_{n\to\infty}\frac{-2n^2+n+1}{-2n^2+4n-1}$ **D.** $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+3n+5}{-n^2+3n+1}\right)$

Tenim: $\lim_{n\to\infty}\frac{3-4n+n^2-3n^3}{n-4n^2+3n^3}=-1$

Les respostes correctes són la B i la D.

6. Siguin a_n i b_n dues successions polinòmiques divergents.

A. Si $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ i $\lim_{n\to\infty} b_n=+\infty$, aleshores $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$

B. Si $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ i $\lim_{n\to+\infty} b_n=+\infty$, aleshores $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=0$

C. Si $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ i $\lim_{n\to+\infty} b_n=+\infty$, aleshores $\lim_{n\to\infty}(a_n)^{b_n}=+\infty$

D. Si $\lim_{n\to\infty} a_n=+\infty$ i $\lim_{n\to+\infty} b_n=-\infty$, aleshores $\lim_{n\to\infty}(a_n-b_n)=+\infty$

Les respostes correctes són C i D, ja que $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{+\infty}{+\infty}$ és indeterminat i $\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=+\infty+(+\infty)=+\infty$.

Tria la relació correcta entre les les afirmacions donades

7. Sigui una successió a_n .

1. La successió a_n està fitada.

2. La successió a_n té el límit numèric L: $\lim_{n\to\infty} a_n=L$

A. $1\Rightarrow 2$

B. $2\Rightarrow 1$

C. $1\Leftrightarrow 2$

D. 1 i 2 s'autoexclouen

Una successió pot estar fitada i no tenir límit. N'és un exemple $a_n=(-1)^n$. En canvi, si una successió té límit L, aleshores està fitada entre el primer terme i el límit.

La resposta correcta és la B.