

NOMBRES REALS

1. Fraccions i decimals

Ja fa anys que coneixes les fraccions. Probablement no t'agradin les seves regles de càlcul i prefereixis passar primer a decimal. En aquesta secció aprofitarem l'expressió decimal de fraccions per saber-ne alguna cosa més.

1.1. Expressió decimal d'una fracció

Calcula l'expressió decimal d'aquestes fraccions:

a) $\frac{9}{5}$

b) $\frac{9}{11}$

c) $\frac{11}{500}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{1}{22}$

f) $\frac{123}{999}$

g) $\frac{278}{96}$

h) $\frac{909}{2500}$

i) $\frac{10}{11}$

j) $\frac{12}{13}$

k) $\frac{15}{14}$

l) $\frac{8}{125}$

m) $\frac{285}{36}$

n) $\frac{245}{81}$

o) $\frac{1}{3456}$

p) $\frac{1111}{2000}$

Fixa't en els resultats. Podries fer alguna classificació dels diferents nombres decimals que has obtingut?

1.2. La fracció generatriu

Tota fracció té una expressió decimal associada. Passar de fracció a decimal és fàcil: només cal dividir! Passar de decimal a fracció no és tan ràpid, però no és difícil.

La fracció generatriu és la fracció que s'obté a partir d'un decimal.

Exercici 135. Troba la fracció generatriu d'aquests nombres decimals:

a) 3,2

b) 1,7

c) 5,42

d) 2,216

e) $2,\widehat{3}$

f) $1,\widehat{7}$

g) $1,\widehat{65}$

h) $4,\widehat{67}$

i) $3,\widehat{178}$

j) $0,\widehat{362}$

k) $4,6\widehat{7}$

l) $1,\widehat{23}$

m) $2,1\widehat{25}$

n) $7,4\widehat{05}$

o) $2,1\widehat{26}$

p) $1,47\widehat{30}$

q) $6,162\widehat{7}$

r) $4,637\widehat{54}$

s) $5,315\widehat{784}$

t) $0,38674\widehat{715}$

1.3. Aproximacions

Sovint es confon aproximar amb truncar. Quan trunquem un nombre decimal, a vegades l'estem aproximant correctament i a vegades no.

Exercici 136. Escribe l'expressió decimal truncada i també l'arrodonida amb la precisió que s'indica:

- a. 2,36 fins a les dècimes
- b. $1,4\overline{2}$ fins a les dècimes
- c. 3,247128 fins a les centèsimes
- d. $0,1\overline{2}$ fins a les centèsimes
- e. $4,01\overline{7}$ fins a les centèsimes
- f. 1,826743 fins a les mil·lèsimes

Exercici 137. Calcula el resultat d'aquestes operacions de diferents maneres:

- Aproximant els termes a les dècimes i operant
- Aproximant els termes a les centèsimes i operant
- Aproximant els termes a les mil·lèsimes i operant
- Calculant la fracció generatriu i operant

- | | | |
|--------------------|--|--|
| a) $1,6 + 2,5$ | b) $2,3\overline{5} + 1,7\overline{2}$ | c) $4,34\overline{8} + 2,53\overline{7}$ |
| d) $2,5 - 1,6$ | e) $2,3\overline{5} - 1,7\overline{2}$ | f) $4,34\overline{8} - 2,53\overline{7}$ |
| g) $1,6 \cdot 2,5$ | h) $2,3\overline{5} \cdot 1,7\overline{2}$ | i) $4,34\overline{8} \cdot 2,53\overline{7}$ |
| j) $1,6 : 2,5$ | k) $2,3\overline{5} : 1,7\overline{2}$ | l) $4,34\overline{8} : 2,53\overline{7}$ |

Amb ajut del resultat exacte de l'operació (el que has obtingut amb les fraccions), calcula quin marge d'error o imprecisió (error absolut) tens en el resultat i quina importància té aquest error respecte el resultat (error relatiu).

2. Nombres irracionals

Abans hem vist que tota fracció es pot representar per un nombre decimal. Les fraccions representen nombres racionals, per tant, tot nombre racional es pot expressar en forma decimal.

Però, i al revés? Qualsevol nombre decimal té una fracció associada?

Que és el numero e???

<https://www.youtube.com/watch?v=Z5czpA-fyMU>

Exercici 138. Digues si aquests nombres són irracionals:

- | | | | |
|--------------------------|-------------------------|------------------|-------------------|
| a) $\sqrt{5}$ | b) $\sqrt{6}$ | c) $\sqrt{8}$ | d) $\sqrt{16}$ |
| e) $\sqrt{\frac{25}{9}}$ | f) $\sqrt{\frac{3}{9}}$ | g) $\sqrt[3]{8}$ | h) $\sqrt[4]{81}$ |

Exercici 139. Una empresa d'aliments en conserva ha tret un nou producte. El posarà en llaunes de forma cilíndrica, que tenen 8 cm de diàmetre i 12 cm d'altura. L'etiqueta ha de quedar a 2 cm de les bases de la llauna i l'ha d'envoltar completament. Quines dimensions ha de tenir l'etiqueta?

Si es fa una tirada de 50.000 etiquetes, calcula quina despesa de paper suposaria haver calculat "generosament" les mides de l'etiqueta.

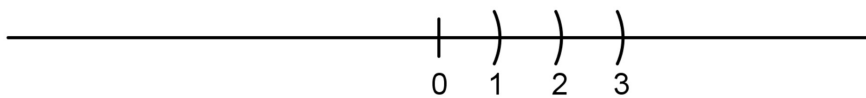
Exercici 140. En el cas dels nombres irracionals, aproximar és obligat. Troba l'expressió d'aquests nombres amb la precisió que s'indica:

- $\sqrt{7}$ fins a les dècimes
- $\sqrt{31}$ fins a les centèsimes
- $\sqrt{15}$ fins a les centèsimes
- $\sqrt{27}$ fins a les mil·lèsimes
- $\sqrt{85}$ fins a les mil·lèsimes
- $\sqrt{123}$ fins a les mil·lèsimes

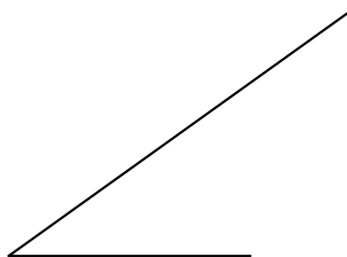
2.1. Representació gràfica d'alguns nombres irracionals

Tradicionalment s'ha considerat la representació exacta de nombres com la que es feia amb ajut de regle (no graduat) i compàs.

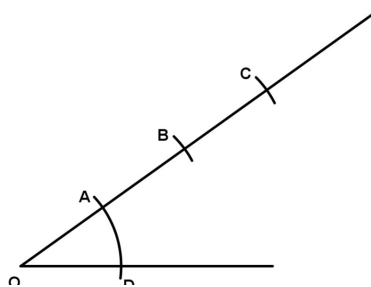
Així, la representació dels enters es fa aplicant l'obertura del compàs diverses vegades:



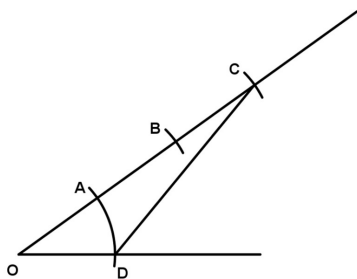
En el cas dels racionals, s'aconsegueix aplicant el teorema de Tales:



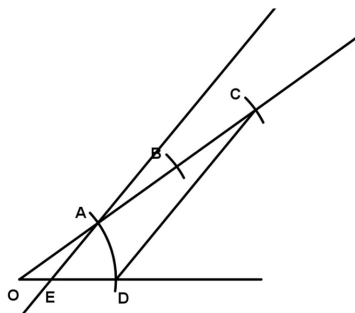
Tenim dues rectes concurrents



Amb un compàs marquem punts distanciat una unitat: $OA = AB = BC = OD = 1$



Tracem un segment que passi per C i D

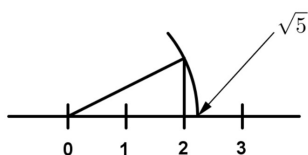


Si fem una recta paral·lela al segment CD que passi per A obtindrem el punt E. Quant val OE?

Exercici 141. Representa les fraccions $\frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{2}{3}, \frac{3}{5}, \frac{5}{7}$ i $\frac{10}{7}$.

No hi ha mètode general per a poder representar qualsevol nombre irracional, però sí existeix si el nombre irracional és un radical quadràtic.

La clau està en el teorema de Pitàgores. Si, per exemple, volem representar $\sqrt{5}$, descomponem el 5 com a suma de dos quadrats perfectes ($5 = 4 + 1 = 2^2 + 1$), i per tant $\sqrt{5}$ és la hipotenusa del triangle rectangle de catets 2 i 1.



Exercici 142. Representa aquests nombres racionals:

- | | | | | | |
|---------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| a) $\sqrt{2}$ | b) $\sqrt{10}$ | c) $\sqrt{8}$ | d) $\sqrt{17}$ | e) $\sqrt{13}$ | f) $\sqrt{20}$ |
| g) $\sqrt{6}$ | h) $\sqrt{3}$ | i) $\sqrt{11}$ | j) $\sqrt{12}$ | k) $\sqrt{18}$ | l) $\sqrt{7}$ |

3. Desigualtats, inequacions

Exercici 143. Una empresa fabrica un producte que, segons estudis de mercat que ha encarregat, ha de vendre a 6€ la unitat. Aquesta empresa té unes despeses fixes mensuals de local i personal de 9.000€ i, a més, el cost de producció és de 4€ per unitat.

- Calcula les despeses de l'empresa, els ingressos i els beneficis que obté en la venda de 2.000 unitats. I si ven 4.000 unitats? I si en ven 6.000?
- Troba una expressió que relacioni les despeses mensuals D de l'empresa i el nombre d'unitats x venudes en un mes.
- Troba una expressió que relacioni els ingressos mensuals I de l'empresa i el nombre d'unitats x venudes en un mes.
- Troba una expressió que relacioni el benefici mensual B de l'empresa i el nombre d'unitats x venudes en un mes.
- Com han de ser les despeses i els ingressos en un mes perquè l'empresa guanyi diners? Com seran els beneficis? Troba una expressió que indiqui com han de ser aquests beneficis per tal que l'empresa guanyi diners.
- Quantes unitats ha de vendre mensualment si vol obtenir beneficis?
- Hi hauria les mateixes solucions si l'empresa es conformés només en no perdre diners?

Exercici 144. Completa la taula:

6	18	$6 < 18$
$6 + 5$	$18 + 5$	
$6 - 4$	$18 - 4$	
$6 \cdot 10$	$18 \cdot 10$	
$6 \cdot (-4)$	$18 \cdot (-4)$	
$6 : 3$	$18 : 3$	
$6 : (-2)$	$18 : (-2)$	

Quines conclusions en treus?

Exercici 145. Comprova si $x = -1$ i $x = 1$ pertanyen al conjunt de solucions de la inequació si $2x - 10 < 6x$.

Escriu la inequació resultant en fer aquestes transformacions sobre l'anterior inequació:

- Sumar 3 unitats als dos membres
- Restar $2x$ als dos membres
- Multipliquen els dos membres per -6
- Sumar -2 als dos membres
- Multipliquen els dos membres per 6

Exercici 146. Resol les següents inequacions. Expressa la seva solució en forma de desigualtat, d'interval i de gràfica.

- | | |
|----------------------------|--|
| a. $3x - 2 > 0$ | h. $2(x - 3) \geq 5(3x - 2) + 3x$ |
| b. $-4x + 8 < 0$ | i. $\frac{6x - 2}{3} \leq \frac{3}{2}$ |
| c. $2x - 1 \leq 0$ | j. $\frac{1 - 2x}{9} > 1 + \frac{4 - x}{6}$ |
| d. $-x + 2 \geq 0$ | k. $\frac{x}{26} + \frac{x}{6} > 2 - \frac{x}{3}$ |
| e. $3 + 5(x - 3) > -2$ | l. $\frac{2x - 4}{6} - \frac{3x + 1}{3} \leq 4x + 2$ |
| f. $4x + 3 \geq -2(3 - x)$ | |
| g. $3x - 2 < 8(x - 1)$ | |