

7. Funcions, límits i continuïtat

EXERCICIS PROPOSATS

1. La funció $f(x) = -x^2 + 120x - 3200$ representa el benefici, en euros, que obté una empresa en la fabricació de x unitats d'un producte.

- Quantes unitats s'han de fabricar per obtenir el màxim benefici possible? Quin és aquest benefici màxim?
- Troba la funció que expressa el benefici unitari.
- Quin és el benefici unitari en fabricar 60 unitats?

- a) Com que és una paràbola còncaua cap avall, el màxim l'assoleix en el vèrtex: $x_v = \frac{120}{2} = 60$. Per tant, el màxim benefici s'obté fabricant 60 unitats de producte.

Com que $f(60) = -60^2 + 120 \cdot 60 - 3200 = 400$, el benefici és de 400 euros.

b) $B(x) = \frac{f(x)}{x} = \frac{-x^2 + 120x - 3200}{x}$

- c) $B(60) = \frac{f(60)}{60} = \frac{-60^2 + 120 \cdot 60 - 3200}{60} \approx 6,67$ €/unitat. Produir 60 unitats representa un benefici de 6,67 euros per unitat produïda.

2. Troba l'expressió matemàtica que ens dona el producte de dos nombres en funció d'un d'ells, sabent que la suma de tots dos és 100.

$$x + y = 100, y = 100 - x \Rightarrow xy = x(100 - x). \text{ Per tant, } P(x) = x(100 - x).$$

3. Una empresa fabrica pots de llautó de forma cilíndrica i sense tapa per emmagatzemar un líquid colorant amb un volum de 500 cm^3 . Si x és el radi de la base, troba una funció que doni els metres quadrats de llautó necessari en funció de x .

Si h és l'alçària del pot, la superfície és $S(x) = 2\pi xh + \pi x^2$; com que el volum $V = \pi x^2 h$, llavors l'alçària del pot és $h = \frac{500}{\pi x^2}$, i la superfície, $S(x) = \frac{1000}{x} + \pi x^2$.

4. Donades les funcions $f(x) = x^2 - 3$ i $g(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$, calcula el domini i l'expressió de les funcions:

a) $f+g$

b) $f-g$

c) $f \cdot g$

d) $\frac{1}{f}$

e) $\frac{f}{g}$

$$D(f) = \mathbb{R}$$

$$D(g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$$

a) $D(f+g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = (x^2 - 3) + \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x^4 - 7x^2 + x + 13}{x^2 - 4}$

b) $D(f-g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ $(f-g)(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 3) - \frac{x+1}{x^2-4} = \frac{x^4 - 7x^2 - x + 11}{x^2 - 4}$

c) $D(f \cdot g) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$ $(f \cdot g)(x) = \frac{(x^2 - 3)(x+1)}{x^2 - 4} = \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3}{x^2 - 4}$

d) Com que $f(-\sqrt{3}) = f(\sqrt{3}) = 0 \Rightarrow D\left(\frac{1}{f}\right) = \mathbb{R} - \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$ $\left(\frac{1}{f}\right)(x) = \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x^2 - 3}$

e) $g(-1) = 0 \Rightarrow D\left(\frac{f}{g}\right) = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x^2 - 4)(x^2 - 3)}{x+1} = \frac{x^4 - 7x^2 + 12}{x+1}$

5. Siguin:

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$g(x) = \frac{1}{x-2}$$

Calcula $f \circ g$ i $g \circ f$.

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f\left(\frac{1}{x-2}\right) = \sqrt{x-2}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt{\frac{1}{x}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{x}} - 2} = \frac{\sqrt{x}}{1 - 2\sqrt{x}}$$

6 a 9. Exercicis resolts.

10. Amb l'ajuda de la calculadora, obtén els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow -3} (e^x + 5)$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2}$

a) $\lim_{x \rightarrow -3} e^x + 5 = e^{-3} + 5 \approx 5,05$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x}$. No existeix. Si ens aproximem al zero per l'esquerra, obtenim que el límit és -1 , però si ens hi aproximem per la dreta, el límit dona 1 , és a dir, els límits laterals no coincideixen.

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\ln(x-1)}{x-2} = 1$

11. Calcula a perquè existeixi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$, essent:

$$f(x) = \begin{cases} ax + 1 & \text{si } x < 2 \\ \sqrt{x-2} & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + 1) = 2a + 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x-2} = 0$$

Perquè existeixi $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ ha de ser $2a + 1 = 0$, és a dir, $a = -\frac{1}{2}$.

12. Escriu una possible expressió perquè una funció f , definida a trossos, que compleixi que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ i

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 \quad \text{i} \quad f(1) = -2.$$

Resposta oberta. Una possible expressió per a la funció f seria: $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ -2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

13. Calcula, si existeix, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$, essent f la funció:

$$f(x) = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x < -1 \\ x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 4 \\ 3 - 5x & \text{si } x > 4 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 3) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 + 1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Per tant, } \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 4^-} (x^2 + 1) = 17 \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} (3 - 5x) = -17 \end{cases} \Rightarrow \text{Com que els límits a esquerra i dreta no coincideixen, el límit no existeix.}$$

14. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$ i $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3 - 2x}{(1-x)^4}$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3 - 2x}{(1-x)^4}$ i $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3 - 2x}{(1-x)^4}$

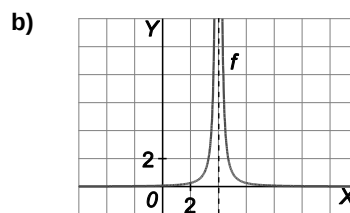
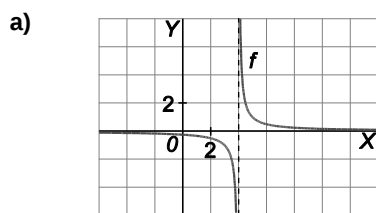
c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x}$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x}$ i $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x}{x - 1} \Rightarrow$ No existeix.

b) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-3 - 2x}{(1-x)^4} = -\frac{1}{16}$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-3 - 2x}{(1-x)^4} = -\frac{1}{16}$; $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{-3 - 2x}{(1-x)^4} = -\frac{1}{16}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x}{x} \Rightarrow$ No existeix.

15. Calcula $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$ en cada cas.



a) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$; No existeix $\lim_{x \rightarrow 4} f(x)$.

b) $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$

16. Exercici resolt.

17. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)(2+3x)}{2x^2-5}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-5}{x+2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-4}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x-1)(2+3x)}{2x^2-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^2+x-2}{2x^2-5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{6x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} - \frac{2}{x^2}}{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{2 - \frac{5}{x^2}} = \frac{6+0+0}{2+0} = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2-5}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x^2}{x} - \frac{5}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \frac{5}{x}}{1 + \frac{2}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2-4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x}{x^2} - \frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2} - \frac{4}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{4}{x^2}} = \frac{0-0}{1-0} = 0$

18. Calcula els valors de a perquè es compleixi: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(ax-1)(2+ax)}{3x^2+1} = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(ax-1)(2+ax)}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2ax+a^2x^2-2-ax}{3x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^2x^2+ax-2}{3x^2+1} = \frac{a^2}{3} = 2 \Rightarrow a^2 = 6 \Rightarrow a = \pm\sqrt{6}$$

19. La població de bacteris de cert cultiu segueix la llei $P(t) = \frac{(3t^2+2)(5t+1)}{(2t+1)^3}$ en milers de bacteris, on t indica els dies transcorreguts des del seu inici.

a) Quina població hi havia abans de l'estudi? I després d'una setmana?

b) En augmentar el temps, tendeix a estabilitzar-se la població?

$$\text{a) } P(0) = \frac{(3 \cdot 0 + 2)(5 \cdot 0 + 1)}{(2 \cdot 0 + 1)^3} = \frac{2}{1} = 2 \text{ milers de bacteris. Hi havia 2000 bacteris.}$$

$$P(7) = \frac{(3 \cdot 7^2 + 2)(5 \cdot 7 + 1)}{(2 \cdot 7 + 1)^3} = \frac{149 \cdot 36}{15^3} \approx 1589,33 \text{ milers de bacteris. Hi haurà 1589 bacteris, aproximadament.}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} P(t) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3t^2 + 2)(5t + 1)}{(2t + 1)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15t^3 + 3t^2 + 10t + 2}{8t^3 + 12t^2 + 6t + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{15t^3}{t^3} + \frac{3t^2}{t^3} + \frac{10t}{t^3} + \frac{2}{t^3}}{\frac{8t^3}{t^3} + \frac{12t^2}{t^3} + \frac{6t}{t^3} + \frac{1}{t^3}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15 + \frac{3}{t} + \frac{10}{t^2} + \frac{2}{t^3}}{8 + \frac{12}{t} + \frac{6}{t^2} + \frac{1}{t^3}} = \frac{15}{8} = 1,875 \text{ milers de bacteris} \end{aligned}$$

El nombre de bacteris s'aproxima cada vegada més a 1875.

20. Exercici resolt.

21. Calcula $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ en els casos següents.

$$\text{a) } f(x) = \frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x - 2}{x + 2}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x + \frac{1}{x}}{x - \frac{1}{x}} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 5)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 5)}{(x + 2)} = -\frac{3}{4}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{x + 2} = \frac{0}{4} = 0$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} \text{ dona lloc a una indeterminació del tipus } \frac{0}{0}. \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x + 2)(x - 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 4$$

22. Calcula aquests límits.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x + 5}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - x)(3 + x)$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x)$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3x + 1} + x \right)$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{5}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{5}{x}} = \frac{0}{1 + 0} = 0$$

- b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x) = +\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x) = +\infty$
 d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (5 - x)(3 + x) = -\infty$
 e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$
 f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{3x+1} + x \right) = \frac{2}{-\infty} - \infty = 0 - \infty = -\infty$

23. Calcula aquests límits. Si donen lloc a indeterminacions indica de quin tipus són i resol-les.

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 - \frac{3}{x} \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x-1)^3}$ j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{x}$
 b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 1}{x - 2}$ e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$ h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + x - 5)$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + x - 5)$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}$ i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-3}{x^2 - 3x + 2} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(7 - \frac{3}{x} \right) = 7 - 0 = 7$

b) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - x + 1}{x - 2} = \frac{9 + 3 + 1}{-5} = -\frac{13}{5}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + x - 5) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(3x + 1 - \frac{5}{x} \right) = (-\infty)(-\infty) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$. Indeterminació tipus $\frac{0}{0}$. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 2x + 4)}{(x+2)} = 3$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2}$. Indeterminació tipus $\frac{0}{0}$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1-x^2})(1 + \sqrt{1-x^2})}{x^2(1 + \sqrt{1-x^2})} =$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - x^2)}{x^2(1 + \sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x^2(1 + \sqrt{1-x^2})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 + 3}}$. Indeterminació tipus $\frac{0}{0}$. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x^2}{2 - \sqrt{x^2 + 3}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x^2)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{(2 - \sqrt{x^2 + 3})(2 + \sqrt{x^2 + 3})} =$

$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x^2)(2 + \sqrt{x^2 + 3})}{1 - x^2} = \lim_{x \rightarrow 1} (2 + \sqrt{x^2 + 3}) = 4$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x-1)^3}$. Indeterminació tipus $\frac{0}{0}$. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x^2 - 4x + 4}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 - 4)}{(x-1)^3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 - 4)}{(x-1)^2} = -\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + x - 5) = +\infty$

i) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-3}{x^2-3x+2} \right)$. Indeterminació $\infty - \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+2}{x-1} - \frac{x-3}{x^2-3x+2} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2-x-1}{(x-1)(x-2)} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{Per tant, el límit no existeix.}$$

j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{x}$. Indeterminació tipus $\infty - \infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1})(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})}{x(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1})} = 0$$

24 a 27. Exercicis resolts.

28. Calcula els límits següents realitzant en cada cas les transformacions adequades.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-5} \right)^{2x-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-2}{x-5} \right)^{x+5}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+3}{x^2+3x-1} \right)^{\frac{x^2+1}{x+3}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{2x}{x+5} \right)^{\frac{1}{x-5}}$

a) Indeterminació del tipus $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+2}{x-5} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{7}{x-5} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-5}{7}} \right)^{\frac{x-5}{7}} \right]^{\frac{7}{x-5}(2x-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{14x-7}{x-5}} = e^{14}$$

b) Com que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{x-5} = 3$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+5) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-2}{x-5} \right)^{x+5} = +\infty$.

c) Indeterminació del tipus $1^{+\infty}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-x+3}{x^2+3x-1} \right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-4x+4}{x^2+3x-1} \right)^{\frac{x^2+1}{x+3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2+3x-1}{-4x+4}} \right)^{\frac{x^2+3x-1}{-4x+4}} \right]^{\frac{-4x+4}{x^2+3x-1} \cdot \frac{x^2+1}{x+3}} = \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^3+4x^2-4x+4}{x^3+6x^2+8x-3}} = e^{-4} \end{aligned}$$

d) Indeterminació del tipus $1^{+\infty}$.

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} \left(\frac{2x}{x+5} \right)^{\frac{1}{x-5}} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \left(1 + \frac{x-5}{x+5} \right)^{\frac{1}{x-5}} = \lim_{x \rightarrow 5^+} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x+5}{x-5}} \right)^{\frac{x+5}{x-5}} \right]^{\frac{1}{x+5}} = e^{\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{1}{x+5}} = e^{\frac{1}{10}}$$

29. Sabent que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$, justifica $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$. Ajuda: escriu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x$ com $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x}$ i opera amb aquesta última expressió.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x} \right)^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^x = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{x-1} \right]^{\frac{x}{x-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x-1}} = e \end{aligned}$$

30. Exercici interactiu.

31. Exercici resolt.

32. Estudia la continuïtat de les funcions següents, especificant el tipus de discontinuïtat.

a) $f(x) = \frac{x}{x-3}$

c) $f(x) = \ln \sqrt[3]{x-2}$

b) $f(x) = \frac{x+1}{2x^3 - 7x^2 - 5x + 4}$

d) $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) La funció $f(x)$ és racional amb el denominador igual a $x-3$. Per tant, la funció serà contínua en tots els valors per als quals el denominador és diferent de zero. Quan valgui 0, serà discontinua: $x-3=0 \Rightarrow x=3$. Aleshores $D(f) = \mathbb{R} - \{3\}$.

b) Com que és un quocient de polinomis, la funció és contínua en tot el seu domini, que són tots els nombres reals, excepte els que anul·len el denominador, és a dir, la funció és contínua a $\mathbb{R} - \left\{ -1, 4, \frac{1}{2} \right\}$. A $x=4$ i $x=\frac{1}{2}$ la discontinuïtat és de salt infinit i a $x=-1$ és evitable.

c) Les funcions logaritme i arrel cúbica són contínues en tot el seu domini.

Com que la funció està definida si $x-2 > 0$, f és contínua a $D(f) = (2, +\infty)$.

$$d) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2+1 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 2x+1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Com que les funcions que defineixen cada tros són contínues, ja que són trossos de rectes i paràboles, només cal veure què passa a $x = 0$ i a $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x+1) = 1 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2+1) = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Per tant, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \text{ i la funció és contínua a } x = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+1) = 2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+1) = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{Per tant, no existeix } \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ ja que, tot i que els límits laterals existeixen, no coincideixen. Així doncs, a } x = 1 \text{ hi ha una discontinuïtat de salt finit.}$$

33. Determina per a quins valors de a i b és contínua la funció següent.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - b & \text{si } x \leq 0 \\ ax + b & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x^2 + b & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Si $x \neq 0$ i $x \neq 2$, la funció és contínua perquè són trossos de paràboles i rectes.

Calculem els límits laterals a $x = 0$ i a $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - b) = -b = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} (ax + b) = b \end{cases}$$

Si volem que a $x = 0$ sigui contínua, llavors $-b = b \Rightarrow b = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} (ax + b) = 2a + b = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 + b) = 4 + b \end{cases}$$

Si volem que sigui contínua a $x = 2$, ha de ser $2a + b = 4 + b$, i com que $b = 0$, ha de ser $a = 2$.

$$\text{La funció és: } f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2x & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ x^2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

34. Exercici interactiu.

35 a 37. Exercicis resolts.

38. Demostra que l'equació següent té alguna solució real.

$$x^5 + x^3 + x + 1 = 0$$

Si apliquem el teorema de Bolzano a la funció contínua $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$ a l'interval $[-1, 0]$, per exemple, com que $f(-1) = -2$ i $f(0) = 1$, es dedueix que existeix c a $(-1, 0)$ amb $f(c) = 0$.

Per tant, $x = c$ és una solució de l'equació.

39. Demosta que l'equació $x^3 + 5x + 1 = 0$ té alguna solució real i dona'n una aproximació correcta fins a les dècimes.

De nou s'aplica el teorema de Bolzano a la funció $f(x) = x^3 + 5x + 1$ en intervals cada vegada més petits fins a obtenir l'aproximació desitjada:

$$[-1, 0]$$

$$f(-1) = -5 \text{ i } f(0) = 1$$

$$[-0,2; -0,1]$$

$$f(-0,2) = -0,008 \text{ i } f(-0,1) = 0,499$$

La solució és $x = -0,1$, ...

40. La funció $f(x) = \frac{3}{x-2}$ compleix que $f(1) = -3$ i $f(3) = 1$ i no talla l'eix X en cap punt. Contradiu aquest exemple el teorema de Bolzano?

No el contradiu, ja que la funció no compleix totes les hipòtesis del teorema de Bolzano. La funció no és contínua a l'interval $[1,3]$, té una discontinuïtat essencial a $x = 2$.

41. Troba el màxim de la funció $P(x) = -x^2 + 5x$.

Com diu el text, la funció té un màxim. En ser una paràbola, sabem que assolirà el màxim en el vèrtex $V\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$.

Comprovem que el màxim s'assoleix a l'interval $[0,5]$.

42 a 45. Exercicis resolts.

46. Es defineix poder adquisitiu, PA , com la quantitat de béns o serveis (de preu unitari, PU) que podem adquirir amb una determinada quantitat de diners T , és a dir: $PA = \frac{T}{PU}$. Per exemple, si disposem de 180 € per comprar llibres que valen 15 € cadascun, tenim un poder adquisitiu de 12 llibres.

Calcula el límit del poder adquisitiu quan T i PU depenen del temps t i aquest tendeix a més infinit, en els casos següents.

a) $T(t) = 5t + 1$ i $PU(t) = t^2 + 1$

b) $T(t) = 8t^2 + t$ i $PU(t) = 2t^2 - 3$

c) $T(t) = 3t + 12$ i $PU(t) = 250$

a) $\lim_{t \rightarrow +\infty} PA = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{T(t)}{PU(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{5t+1}{t^2+1} = 0$

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} PA = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{T(t)}{PU(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{8t^2+t}{2t^2-3} = 4$

c) $\lim_{t \rightarrow +\infty} PA = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{T(t)}{PU(t)} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t+12}{250} = +\infty$

47 a 56. Exercicis resolts.

EXERCICIS

Funcions reals

57. Calcula el domini d'aquestes funcions.

a) $f(x) = e^{3x-6}$

d) $f(x) = \frac{3}{x-2} - \sqrt{x-2}$

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 16}$

e) $f(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{x}{x-2}}$

c) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-5}}$

f) $f(x) = \ln(3x-7)$

a) $D(f) = \mathbb{R}$

b) Com que $x^2 + 16 > 0$ sempre, $D(f) = \mathbb{R}$.

c) Ha de ser $x - 5 > 0$, $D(f) = (5, +\infty)$.

d) Per una banda ha de ser $x - 2 \neq 0$ i per l'altra, $x - 2 \geq 0$.

Així doncs, ha de ser $x - 2 > 0$, per tant, $D(f) = (2, +\infty)$.

e) Perquè la potència estigui sempre definida ha de ser $\frac{1}{x} > 0$, és a dir, $x > 0$.

A més, perquè no s'anul·li el denominador de l'exponent ha de ser $x - 2 \neq 0$ per la qual cosa $D(f) = (0, +\infty) - \{2\}$.

f) Ha de ser $3x - 7 > 0$.

Així doncs, $D(f) = \left(\frac{7}{3}, +\infty\right)$

 58. Sigui la funció $f(x) = \frac{2x+5}{x^2-4}$. Calcula:

a) El seu domini.

b) Per a quins valors de x és $f(x) > 0$?

a) Com que el denominador s'anul·la si $x = -2$ o $x = 2$, $D(f) = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

b) Estudiem el signe del numerador i del denominador:

	$\left(-\infty, -\frac{5}{2}\right)$	$\left(-\frac{5}{2}, -2\right)$	$(-2, 2)$	$(2, +\infty)$
Signe de $2x + 5$	-	+	+	+
Signe de $x^2 - 4$	+	+	-	+
Signe de $f(x)$	-	+	-	+

$$f(x) > 0 \text{ a } \left(-\frac{5}{2}, -2\right) \cup (2, +\infty)$$

59. Troba la paràbola que passa pels punts $A(0,-1)$, $B(1,2)$ i $C(2,3)$.

L'equació de la paràbola és $y = ax^2 + bx + c$. Plantegem el sistema:

$$\begin{cases} -1 = c \\ 2 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \end{cases} \quad \text{les solucions són } a = -1, b = 4 \text{ i } c = -1.$$

La paràbola és $y = -x^2 + 4x - 1$.

60. Siguin les funcions $f(x) = x^2 + ax + b$ i $g(x) = -x^2 + c$. Determina a , b i c sabent que les gràfiques d'aquestes funcions es tallen en els punts $(-2,-3)$ i $(1,0)$.

Totes dues funcions han de passar per aquests punts. Plantegem el sistema i resollem:

$$\begin{cases} -3 = (-2)^2 + a(-2) + b \\ -3 = -(1)^2 + c \\ 0 = 1^2 + a \cdot 1 + b \\ 0 = -1^2 + c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3 = 4 - 2a + b \Rightarrow b = 2a - 7 \\ -3 = -1 + c \Rightarrow c = -2 \\ 0 = 1 + a + b \Rightarrow 0 = 1 + a + 2a - 7 \Rightarrow a = 2 \quad b = -3 \\ 0 = -1 + c \Rightarrow c = 1 \end{cases}$$

Les funcions són: $f(x) = x^2 + 2x - 3$ i $g(x) = -x^2 + 1$

61. Expressa la funció $f(x) = |2x + 4| - x - 1$ com una funció definida a trossos i dibuixa'n la gràfica.

$$|2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } 2x + 4 \geq 0 \\ -2x - 4 & \text{si } 2x + 4 < 0 \end{cases} \Rightarrow |2x + 4| = \begin{cases} 2x + 4 & \text{si } x \geq -2 \\ -2x - 4 & \text{si } x < -2 \end{cases}$$

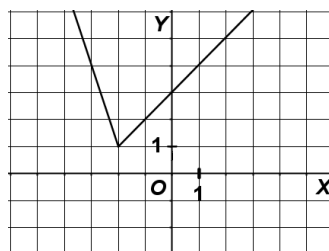
Observa com queda l'expressió depenent dels valors de x :

A l'interval $(-\infty, -2)$ es té: $f(x) = -2x - 4 - x - 1 = -3x - 5$

A l'interval $(-2, +\infty)$ es té: $f(x) = 2x + 4 - x - 1 = x + 3$

L'expressió de f com a funció definida a trossos és:

$$f(x) = \begin{cases} -3x - 5 & \text{si } x < -2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$



Operacions amb funcions

62. Escriu les funcions següents com a composició de funcions elementals.

a) $A(x) = (5x - 2)^{12}$

b) $B(x) = \cos \sqrt{e^{x-1}}$

c) $C(x) = \frac{1}{\ln x^2}$

d) $D(x) = e^{\sqrt{\sin x^5}}$

a) $f(x) = 5x - 2$; $g(x) = x^{12} \Rightarrow A(x) = (g \circ f)(x)$

b) $f(x) = x - 1$; $g(x) = e^x$; $h(x) = \sqrt{x}$; $p(x) = \cos x \Rightarrow B(x) = (p \circ h \circ g \circ f)(x)$

c) $f(x) = x^2$; $g(x) = \ln x$; $h(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow C(x) = (h \circ g \circ f)(x)$

d) $f(x) = x^5$; $g(x) = \sin x$; $h(x) = \sqrt{x}$; $p(x) = e^x \Rightarrow D(x) = (p \circ h \circ g \circ f)(x)$

63. Sigui $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

a) Calcula la funció $(f \circ f)(x)$.

b) La Caterina assegura que $(f \circ f)(-1) = 0$ i la Glòria afirma que $(f \circ f)(-1)$ no existeix. Qui té raó?

a) $(f \circ f)(x) = f\left(\frac{1}{1+x}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+x}} = \frac{x+1}{x+2}$

b) La Glòria té raó, perquè com que $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$, $x = -1$ no pertany al domini de $(f \circ f)$.

64. Calcula la funció inversa de:

a) $f(x) = x^3 - 8$

b) $f(x) = \frac{2x-5}{3}$

a) $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+8}$

b) $f^{-1}(x) = \frac{3x+5}{2}$

65. Siguin les funcions f i g definides així:

$$f(x) = \begin{cases} 5x - 7 & \text{si } x < -1 \\ 1 - 3x & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} 3 - 2x & \text{si } x < 2 \\ x + 7 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Troba l'expressió de la funció suma: $s(x) = (f + g)(x)$

$f(x) = 5x - 7$ $g(x) = 3 - 2x$ $s(x) = 3x - 4$	-1	$f(x) = 1 - 3x$ $g(x) = 3 - 2x$ $s(x) = 4 - 5x$	2	$f(x) = 1 - 3x$ $g(x) = x + 7$ $s(x) = 8 - 2x$
---	----	---	---	--

L'expressió de la funció suma és: $s(x) = \begin{cases} 3x - 4 & \text{si } x < -1 \\ 4 - 5x & \text{si } -1 \leq x < 2 \\ 8 - 2x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

Límit d'una funció en un punt

66. La funció $f(x)$ no està definida per a $x = 1$. Observant la taula de valors següent, contesta raonadament:

x	0,99	0,999	1,001	1,01
$f(x)$	3,02	3,001	-2,99	-2,95

a) Existeix $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$?

b) Creus que existeix $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]^2$?

a) Sembla que no, ja que tenint en compte les dades, sembla que $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -3$.

b) Sembla que sí; pel que es veu a l'apartat a, seria $\lim_{x \rightarrow 1} [f(x)]^2 = 9$.

67. La funció $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$ no està definida per a $x = 2$. Amb ajuda de la calculadora, troba el límit $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

x	1,9	2,1	1,99	2,01
$f(x)$	2,925 64	3,075 61	2,992 51	3,007 51

Tenint en compte aquestes dades, sembla que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$.

68. Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$ i $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 5$, calcula, en cada cas, el límit següent.

a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$

b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$

c) $\lim_{x \rightarrow a} [3f(x) - g(x)]$

d) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2$

e) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + 2g(x)]^2$

f) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{[f(x)]^2 + g(x) + 2}$

g) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^2$

h) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{2f(x)+g(x)}$

a) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3 + 5 = 8$

b) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 3 - 5 = -2$

c) $\lim_{x \rightarrow a} [3f(x) - g(x)] = 3 \lim_{x \rightarrow a} f(x) - \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 9 - 5 = 4$

d) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^2 = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^2 = 3^2 = 9$

e) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + 2g(x)]^2 = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) + 2 \lim_{x \rightarrow a} g(x) \right]^2 = (3 + 2 \cdot 5)^2 = 169$

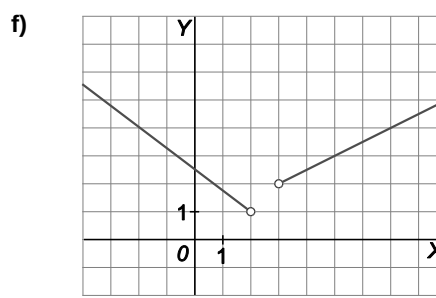
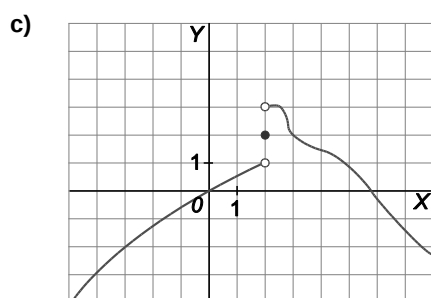
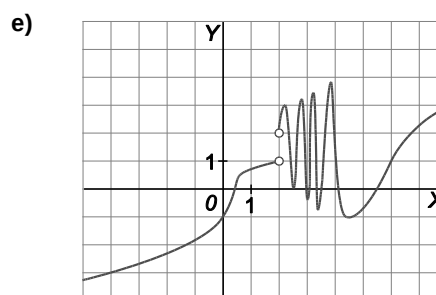
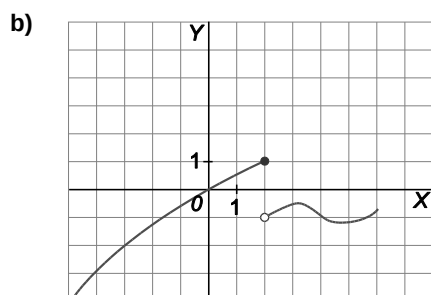
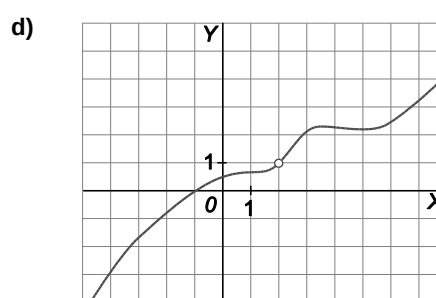
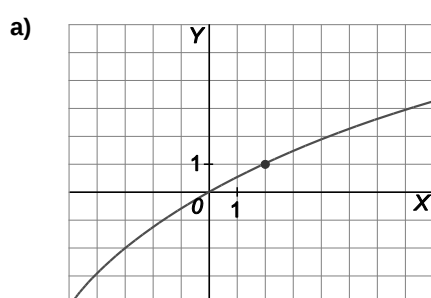
f) $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{[f(x)]^2 + g(x) + 2} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow a} ([f(x)]^2 + g(x) + 2)} = \sqrt{9 + 5 + 2} = 4$

g) $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)^2 = \left[\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) \right]^2 = \left[\frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} \right]^2 = \left(\frac{3}{5} \right)^2 = \frac{9}{25}$

h) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x))^{2f(x)+g(x)} = \left[\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right]^{2 \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)} = 3^{2 \cdot 3 + 5} = 3^{11}$

69. Dibuixa, aproximadament, en cada cas, una gràfica per a una possible funció que es comporti de la manera següent a prop de $x = 2$.

- a) $f(2) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$
- b) $f(2) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -1$
- c) $f(2) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 3$
- d) $f(2)$ no està definida, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$.
- e) $f(2)$ no està definida, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2$.
- f) $f(2)$ no està definida, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1$ i $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ no existeix.



70. La funció f està definida a trossos.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1} & \text{si } x \leq -1 \\ e^{1+x} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

a) Amb l'ajuda de la calculadora, troba els límits laterals $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

b) Decideix si existeix o no el límit $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

a)

x	-1,1	-1,01	-0,9	-0,99
$f(x)$	-2,1	-2,01	1,105 171	1,010 05

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -2$ i $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1$, per tant no existeix $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

71. Calcula $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}}$.

x	0,1	0,01
$f(x)$	$0,1^{10} = 0,000\ 000\ 000\ 1$	$0,01^{100} = 0,000\ 0\dots$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 0$$

72. Existeix el límit $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{|x-3|}{|x|-3}$?

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{|x-3|}{|x|-3} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{-x+3}{x-3} = -1, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{|x-3|}{|x|-3} = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x-3}{x-3} = 1, \text{ per tant, el límit no existeix.}$$

Límits infinits i a l'infinit

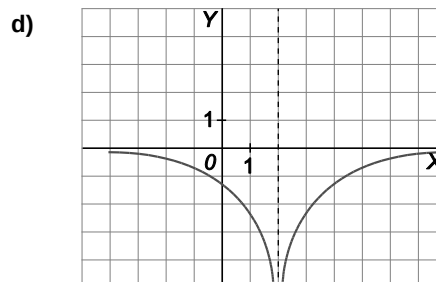
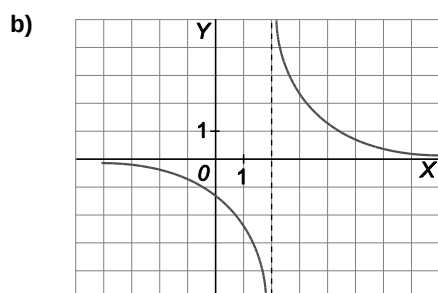
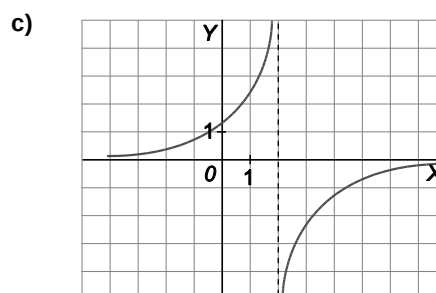
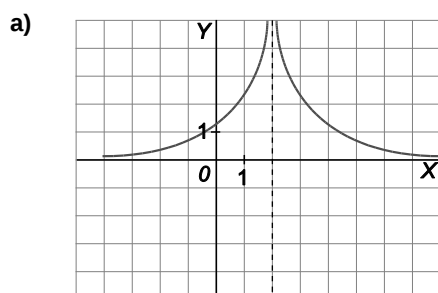
73. Dibuixa possibles gràfiques per a les quatre funcions següents. Han de complir tots dos requisits cadascuna.

a) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = +\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^+} i(x) = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 2^-} i(x) = -\infty$



74. Les gràfiques següents corresponen a quatre funcions que no estan definides a $x = 1$. Associa cada gràfica amb alguna d'aquestes funcions.

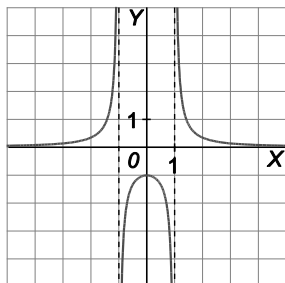
$$f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$g(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$$

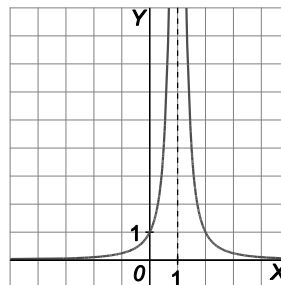
$$h(x) = \frac{1}{1 - x}$$

$$i(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^2}$$

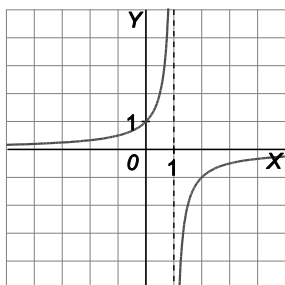
I.



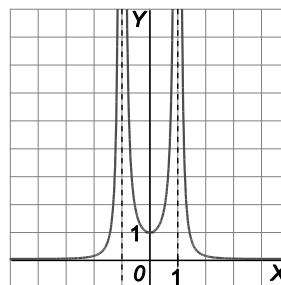
III.



II.



IV.



I. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

II. $h(x) = \frac{1}{1 - x}$

III. $g(x) = \frac{1}{(x - 1)^2}$

IV. $i(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^2}$

Càlcul de límits

75. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + x + 1)$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + x + 1)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 4x + 5)$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 4x + 5)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x^4)$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x^4)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + x + 1) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^2 + 4x + 5) = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x^4) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x^2 + x + 1) = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 4x + 5) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x^4) = -\infty$

76. Calcula aquests límits.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 3}}{2x + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 4x + 1} - 3x)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{9x^2 + 3}}{2x + 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(9 + \frac{3}{x^2}\right)}}{x \left(2 + \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{\left(9 + \frac{3}{x^2}\right)}}{x \left(2 + \frac{5}{x}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{\left(9 + \frac{3}{x^2}\right)}}{\left(2 + \frac{5}{x}\right)} = \frac{\sqrt{9+0}}{2+0} = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + 4x + 1} - 3x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{9x^2 + 4x + 1} - 3x)(\sqrt{9x^2 + 4x + 1} + 3x)}{\sqrt{9x^2 + 4x + 1} + 3x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 + 4x + 1 - 9x^2}{\sqrt{9x^2 + 4x + 1} + 3x} =$

$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(4 + \frac{1}{x}\right)}{x \left(\sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{1}{x}}{\sqrt{9 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}} + 3} = \frac{4+0}{\sqrt{9+0+0}+3} = \frac{2}{3}$

77. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x})$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+3} - \sqrt{x})(\sqrt{x+3} + \sqrt{x})}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3-x}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{x+3} + \sqrt{x}} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} =$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{(x+1) - (x-1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}}{2} = +\infty$

78. Calcula aquests límits. No oblidis estudiar, si és necessari, els límits laterals.

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)^2}{x-3}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x+1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x-4}$

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+1)^2}{x-3}$. No existeix, perquè $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{(x+1)^2}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{(x+1)^2}{x-3} = +\infty \end{cases}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x^2-1}$. No existeix, perquè $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x^2-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2-1} = +\infty \end{cases}$.

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x+1}{x+1}$. No existeix, perquè $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{2x+1}{x+1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{2x+1}{x+1} = -\infty \end{cases}$.

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-4x-4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)}{(x-2)}$. No existeix, perquè $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-3)}{(x-2)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x-3)}{(x-2)} = -\infty \end{cases}$.

79. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8+x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2+x}-1}{\sqrt{8-x}-3} \cdot \frac{\sqrt{2+x}+1}{\sqrt{2+x}+1} \cdot \frac{\sqrt{8-x}+3}{\sqrt{8-x}+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(\sqrt{8-x}+3)}{(-1-x)(\sqrt{2+x}+1)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8-x}+3}{-(\sqrt{2+x}+1)} = \frac{6}{-2} = -3$

b) Aquest límit no existeix, perquè:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8+x}}{\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8+x}(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2})}{(\sqrt{3+x}-\sqrt{2x+2})(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2})} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8+x}(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2})}{-(x-1)} =$$

$$= \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{8+x}(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2})}{-(x-1)} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{8+x}(\sqrt{3+x}+\sqrt{2x+2})}{-(x-1)} = -\infty \end{cases}$$

80. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (20\sqrt{x} - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3)(2x+1)}{4x^2 - 3x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (25x^2 + 3000x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2}{(x+2)^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} (x+3)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (20\sqrt{x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{20}{\sqrt{x}} - 1 \right) = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x-3)(2x+1)}{4x^2 - 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(1 - \frac{3}{x} \right) x \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{x^2 \left(4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(1 - \frac{3}{x} \right) \cdot \left(2 + \frac{1}{x} \right)}{\left(4 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{1 \cdot 2}{4} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (25x^2 + 3000x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(25 + \frac{3000}{x} \right) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2}{(x+2)^2}$ el numerador tendeix a 6 i el denominador, que sempre és positiu, tendeix a zero, per

tant, $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + 2}{(x+2)^2} = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x}$ no existeix, ja que $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{5}{x} = -\infty$ i $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{5}{x} = +\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} (x+3)^{\frac{1}{(x-1)^2}}$. La base tendeix a 4 i l'exponent tendeix a $+\infty$, per tant: $\lim_{x \rightarrow 1} (x+3)^{\frac{1}{(x-1)^2}} = +\infty$.

81. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)^2 - 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x}$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 + x - 90}{\sqrt{x} - 3}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = \lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{x}+1) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(x+2)} = \frac{1}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{4+6}{4-2} = \frac{10}{2} = 5$

d) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{9-9}{9+3} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \frac{1-3}{1+1} = -1$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 3x}{x^2 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+3)}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+3}{x-1} = \frac{3}{-1} = -3$

g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-2} = -2$

h) $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{x^2 + x - 90}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x+10)}{\sqrt{x}-3} \cdot \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{(x-9)(x+10)(\sqrt{x}+3)}{x-9} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 9} (x+10)(\sqrt{x}+3) = 19 \cdot 6 = 114$

82. Calcula aquests límits.

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+6x+9}{x-3}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x^2-x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-1}{x(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^4-3x}{x^3-2x^2} = -\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{2}{x} - \frac{3}{x+1} \right) = -\infty$

f) $\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2+6x+9}{x-3} = +\infty$

83. Calcula aquests límits a l'infinit.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{2x+5}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-x}{x+5}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 5\sqrt{x})$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x)$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3x} - \frac{2}{2x+1} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right)$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x} \right)$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-x)(8x-3)}{(2x-1)^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-2}{2x+5} = \frac{3}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5-x}{x+5} = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 5\sqrt{x}) = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2 + 2x) = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3x} - \frac{3}{2x+1} \right) = 0 - 0 = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(\frac{x+1-x}{x(x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+x}{x} - \frac{2+x}{1+x} \right) = 1 - 1 = 0$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2-x)(8x-3)}{(2x-1)^2} = -2$

84. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x}$ c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x-7}\right)^{3x}$ e) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{(x-1)^2}}$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-5}{x^2-3x}\right)^{3x^2+2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+x}{x-7}\right)^{\frac{x}{5}}$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}\right)^{x+2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}}$ h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-5}{7+x}\right)^{x^2+1}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{x}\right)^{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{6x}{3}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^6 = e^6.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+x}{x-7}\right)^{\frac{x}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{9}{x-7}\right)^{\frac{x}{5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x-7}{9}}\right)^{\frac{x-7}{9}}\right]^{\frac{x}{5} \cdot \frac{9}{x-7}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x}{5x-35}} = e^{\frac{9}{5}}.$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x-7}\right)^{3x}$ La base tendeix a $\frac{1}{2}$ i l'exponent a $+\infty$ per tant, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{2x-7}\right)^{3x} = 0.$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{(x-1)(x+1)}\right)^{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{x^2-1}\right)^{\frac{x^2-1}{x^2-1}}\right]^{\frac{x+2}{x^2-1}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+2}{x^2-1}} = e^0 = 1.$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} x^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} (1+x-1)^{\frac{1}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x-1}}\right)^{\frac{1}{x-1}} = e.$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{1}{x}}\right)^{\frac{1}{x}}\right]^{\frac{1}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}}.$ Com que $e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}} = 0$ i $e^{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}} = +\infty$, el límit demanat no existeix.

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2-5}{x^2-3x}\right)^{3x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3x-5}{x^2-3x}\right)^{3x^2+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{x^2-3x}{3x-5}}\right)^{\frac{x^2-3x}{3x-5}}\right]^{3x^2+2 \cdot \frac{3x-5}{x^2-3x}} =$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3x^2+2)(3x-5)}{x^2-3x}} = +\infty$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-5}{7+x}\right)^{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-12}{7+x}\right)^{x^2+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{7+x}{-12}}\right)^{\frac{-12}{7+x}}\right]^{x^2+1 \cdot \frac{7+x}{-12}} =$
 $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{(x^2+1)(7+x)}{12}} = 0$

85. Calcula aquest límit: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0,000\,01}{x^2}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 0,000\,01}{x^2} = -\infty$, perquè el numerador tendeix a $-0,000\,01$ i el denominador és positiu i tendeix a zero. Si aproximem aquest límit amb la calculadora, s'han de prendre valors de x menors que $0,000\,01$.

86. Calcula el valor de a perquè es compleixi que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + ax + 1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + ax + 1} - x)(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)}{(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax + 1}{(\sqrt{x^2 + ax + 1} + x)} = \frac{a}{2} = 2$$

Per tant, $a = 4$

Continuïtat d'una funció en un punt i en un interval

87. Estudia la continuïtat de les funcions següents.

a) $f(x) = \sin x$

e) $f(x) = x^2 - \ln x$

b) $f(x) = xe^x + x^2$

f) $f(x) = x + 2$

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3}$

g) $f(x) = \frac{x+1}{x}$

d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+25}$

h) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-25}$

a) $f(x) = \sin x$

És contínua a tot $\mathbb{R}$.

b) $f(x) = xe^x + x^2$

És contínua a tot $\mathbb{R}$ perquè és producte i suma de contínues.

c) $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3}$

És contínua a $\mathbb{R} - \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$.

d) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+25}$

És contínua a tot $\mathbb{R}$ perquè és quocient de contínues i el denominador no s'anul·la mai.

e) $f(x) = x^2 - \ln x$

És contínua a $(0, +\infty)$.

f) $f(x) = x + 2$

És contínua a tot $\mathbb{R}$.

g) $f(x) = \frac{x+1}{x}$

És contínua a $\mathbb{R} - \{0\}$.

h) $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-25}$

És contínua a $\mathbb{R} - \{5, -5\}$.

88. Sigui $f(x) = \begin{cases} 2x^2 - ax + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ -x^2 + 3x - b & \text{si } x > 1 \end{cases}$. Determina els valors de a i b que fan que f sigui contínua a $x = 1$ i que $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2x^2 - ax + 1) = 2 - a + 1 = 3 - a = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x^2 + 3x - b) = -1 + 3 - b = 2 - b$$

Perquè sigui contínua a $x = 1$ ha de ser $3 - a = 2 - b$, és a dir, $a = b + 1$.

$$\text{Com que } f\left(\frac{3}{2}\right) = -\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{3}{2} - b = \frac{1}{4}, \text{ llavors } b = -\frac{9}{4} + \frac{9}{2} - \frac{1}{4} = 2.$$

Per tant, perquè es compleixin totes dues condicions ha de ser $a = 3$ i $b = 2$.

89. Estudi la continuïtat de: $f(x) = \begin{cases} 16 - x^2 & \text{si } -2 \leq x < 2 \\ x^2 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

La funció és contínua a $[-2, 2)$ i a $[2, 3]$ perquè les funcions $16 - x^2$ i x^2 són contínues.

Estudiem què passa a $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (16 - x^2) = 12 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 = 4 = f(2) \end{cases}$$

La funció no és continua a $x = 2$, ja que no existeix $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ perquè els límits laterals no coincideixen. És una discontinuïtat de salt finit.

90. Es considera la funció real de variable real definida per:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x < 2 \\ 3x + m & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

a) Calcula el valor de paràmetre real m perquè la funció f sigui contínua a $x = 2$.

b) Calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)} = -4 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (3x + m) = 6 + m = f(2) \end{cases}$$

Perquè sigui contínua ha de ser $-4 = 6 + m$, per tant, $m = -10$.

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + m) = +\infty$$

91. Es considera la funció: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 9 & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{9x - 27}{x + 3} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

- a) Estudia la continuïtat en el punt $x = 0$.
b) Calcula el límit quan x tendeix a $-\infty$ i quan x tendeix a $+\infty$.

a) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 9) = -9 = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{9x - 27}{x + 3} = -9 \end{cases}$ Per tant, la funció és contínua a $x = 0$.

b) $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 9) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x - 27}{x + 3} = 9 \end{cases}$

92. Es considera la funció real de variable real definida per: $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 3 \\ x + b & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Determina a i b perquè f sigui contínua a tot $\mathbb{R}$.

Com que les funcions $g(x) = x + a$, $h(x) = x^2 - 2$ i $i(x) = x + b$ són contínues sigui quin sigui el valor de a i b , n'hi ha prou amb els límits laterals a $x = 1$ i $x = 3$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x + a) = 1 + a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 2) = -1 = f(1) \end{cases} \Rightarrow 1 + a = -1 \Rightarrow a = -2$

$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x^2 - 2) = 7 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x + b) = 3 + b \end{cases} \Rightarrow 3 + b = 7 \Rightarrow b = 4$

Els valors buscats són $a = -2$ i $b = 4$.

93. Calcula els valors de $a, b \in \mathbb{R}$ perquè la funció: $f(x) = \begin{cases} x + a & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} & \text{si } 0 < x < 1 \\ bx & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ sigui contínua a tots els punts.

Cal mirar què passa a $x = 0$ i a $x = 1$, perquè a la resta és contínua.

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + a) = a = f(0) \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{3x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = \frac{1}{3} \end{cases}$

Perquè sigui contínua a $x = 0$, ha de ser $a = \frac{1}{3}$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{3x} = \frac{\sqrt{2}}{3} \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} bx = b = f(1) \end{cases} \Rightarrow \text{Perquè sigui contínua a } x = 1 \text{ ha de ser } b = \frac{\sqrt{2}}{3}.$

94. Estudia la continuïtat de: $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{x-1} & \text{si } x \leq 2 \\ \frac{3x^2-2x}{x+2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$

A $(-\infty, 2) - \{1\}$, la funció és contínua, i a $(2, +\infty)$ també, perquè són quocients de polinomis i els denominadors no s'anul·len. Vegem què passa si $x = 1$ i si $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+2}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+2}{x-1} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \text{La funció té una discontinuïtat de salt infinit a } x = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-1} = 4 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2-2x}{x+2} = 2 \end{cases} \Rightarrow \text{La funció té una discontinuïtat de salt finit a } x = 2.$$

Així doncs, la funció és contínua a $\mathbb{R} - \{1, 2\}$.

95. Donada la següent funció real de variable real:

$$f(x) = \begin{cases} e^x & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia la seva continuïtat.

La funció $g(x) = e^x$ és contínua a tot $\mathbb{R}$, la funció $h(x) = \frac{x^3}{(x-2)^2} + 1$ no està definida si $x = 2$ i és contínua en el seu domini, per això, el domini de la funció f és $D(f) = \mathbb{R} - \{2\}$.

Estudiem la continuïtat a $x = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^3}{(x-2)^2} + 1 \right) = 1 = f(0) \end{cases}$$

Així doncs, la funció és contínua a $\mathbb{R} - \{2\}$.

96. Sigui la funció:

$$f(x) = \begin{cases} e^{x-1} & \text{si } x < 1 \\ (x+a)^2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Per a quins valors del paràmetre a és contínua la funció?

La funció és contínua si $x \neq 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{x-1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x+a)^2 = (1+a)^2 = f(1) \end{cases}$$

Ha de ser $(1+a)^2 = 1$, $a = 0$ o $a = -2$.

97. Determina el valor de a perquè sigui contínua a $x = -1$ la funció:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{x-1} & \text{si } x \leq -1 \\ x^3 - 3x^2 + 6x - 2 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{ax}{x-1} = \frac{a}{2} \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x^3 - 3x^2 + 6x - 2) = -12 = f(-1) \end{cases} \Rightarrow \frac{a}{2} = -12; \quad a = -24$$

Perquè la funció sigui contínua a $x = -1$ ha de ser $a = -24$.

98. Determina a i b perquè la funció següent sigui contínua en tots els seus punts:

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + b & \text{si } x < 0 \\ x - a & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \frac{a}{x} + b & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$$

Com que $\frac{a}{x} + b$ és contínua a $(1, +\infty)$, només s'ha d'estudiar què passa a $x = 0$ i a $x = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (ax^2 + b) = b \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - a) = -a = f(0) \end{cases} \Rightarrow \text{Perquè sigui contínua ha de ser } b = -a.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x - a) = 1 - a \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a}{x} + b = a + b = f(1) \end{cases} \Rightarrow \text{Perquè sigui contínua a } x = 1, \text{ ha de ser } 1 - a = a + b.$$

Si resollem el sistema $\begin{cases} b = -a \\ 1 - a = a + b \end{cases}$ obtenim $a = 1, b = -1$.

99. Es considera la funció:

$$f(x) = \begin{cases} |-x-1| - t & \text{si } x \leq 2 \\ x - 5 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Troba el valor de t perquè f sigui contínua a $x = 2$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (|-x-1| - t) = 3 - t = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x - 5) = -3 \end{cases} \Rightarrow 3 - t = -3 \Rightarrow t = 6$$

Teoremes relacionats amb la continuïtat

100. Demostra que l'equació $x^5 - x^2 + x - 5 = 0$ té alguna solució real.

$f(x) = x^5 - x^2 + x - 5$ és contínua a $[0, 2]$, $f(0) = -5 < 0$ i $f(2) = 25 > 0$. Si s'aplica el teorema de Bolzano, sabem que hi ha un nombre c entre 0 i 2 amb $c^5 - c^2 + c - 5 = 0$.

101. Demostra que l'equació $x^3 + x - 5 = 0$ té almenys una solució real inferior a 2 i superior a 1.

$f(x) = x^3 + x - 5$ és contínua a $[1, 2]$, $f(1) = -3 < 0$ i $f(2) = 5 > 0$. Si s'aplica el teorema de Bolzano, sabem que hi ha un nombre c entre 1 i 2 amb $c^3 + c - 5 = 0$.

Síntesi

102. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{5+x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 25x)$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+5} - \sqrt{x})$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2 + 7x + 1}{(2x+1)(1-4x)}$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+5}{x-1} \right)^{x-1}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3-x}{5+x} = -1$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+5} - \sqrt{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{2x+5} - \sqrt{x})(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x})}{(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+5}{(\sqrt{2x+5} + \sqrt{x})} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2 + 25x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-12x^2 + 7x + 1}{(2x+1)(1-4x)} = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$

e) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{(1-x)(x^2+x+1)} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2+x-2}{(1-x)(x^2+x+1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(1-x)(x^2+x+1)} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-(x+2)}{(x^2+x+1)} = -1$

f) $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{x+5}{x-1} \right)^{x-1} = 4^2 = 16$

103. Escriu un exemple de dues funcions f i g tals que compleixin les condicions:

1. No existeixin $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ni $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$.

2. Existeixi $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$.

Si $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ i $g(x) = e^x - \frac{x+1}{x-1}$, es compleixen les condicions. En general, si $H(x)$ és una funció tal que

existeix $\lim_{x \rightarrow 1} H(x)$ i $F(x)$ una altra funció amb $F(1) \neq 0$, les condicions es compleixen per a $f(x) = \frac{F(x)}{x-1}$ i

$$g(x) = H(x) - \frac{F(x)}{x-1}.$$

104. Calcula els límits següents.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 7x - 5}}{2x - 9}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{4x^2 + 3x})$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x^2 - 2x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 9}$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 5}{\sqrt{4x^2 - x + 2}}$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x + 3x - 1}{(x + 1)^2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 16}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 + 4)(x - 2)(x + 2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 4)(x + 2) = 8 \cdot 4 = 32$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{4x^2 + 3x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sqrt{4x^2 + 3x})(x + \sqrt{4x^2 + 3x})}{(x + \sqrt{4x^2 + 3x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^2 - 3x}{(x + \sqrt{4x^2 + 3x})} = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 5} \sqrt{x^2 - 9} = \sqrt{5^2 - 9} = 4$

d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5^x + 3x - 1}{(x + 1)^2} = \frac{1 + 0 - 1}{1} = 0$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 7x - 5}}{2x - 9} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x - 3}{(x - 1)^2} = -\infty$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 5}{\sqrt{4x^2 - x + 2}} = \frac{1}{2}$

h) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 7x + 10}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 5)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} (x - 5) = -3$

105. La funció $f(x)$ està definida a $\mathbb{R}$ per: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ a - x & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) Calcula el valor de a perquè f sigui contínua a $\mathbb{R}$.

b) Calcula el valor de a perquè la funció tingui a $x = 2$ un salt de 3 unitats cap amunt.

c) Calcula el valor de a perquè la funció tingui a $x = 2$ un salt de 5 unitats cap avall.

a) Mirem què passa a $x = 2$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) : \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 - 1) = 3 = f(2) \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (a - x) = a - 2 \end{cases} \Rightarrow \text{Perquè sigui contínua ha de ser } a - 2 = 3 \Rightarrow a = 5.$$

b) Perquè tingui un salt de tres unitats cap amunt ha de ser $a - 2 = 6 \Rightarrow a = 8$.

c) Perquè tingui un salt de cinc unitats cap avall ha de ser $a - 2 = -2 \Rightarrow a = 0$.

106. Estudia si la funció $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ és contínua a $x = 1$.

La funció no està definida a $x = 1$ per la qual cosa no és contínua.

Si calculem els límits laterals obtenim:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x - 1)(x + 1)}{-(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -(x + 1) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)(x + 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 1) = 2$$

Per tant, la funció té una discontinuïtat de salt finit a $x = 1$.

QÜESTIONS

107. Donades les funcions $f(x) = \frac{1}{x-1}$ i $g(x) = \frac{1}{x-2}$, es compleix que:

$$(f \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x-2} - 1} = \frac{x-2}{3-x}$$

És correcte afirmar que $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{3\}$.

No és correcte dir $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{3\}$ ja que 2 no pertany a $D(f \circ g)$ perquè no existeix $g(2)$. $D(f \circ g) = \mathbb{R} - \{3, 2\}$.

108. Què pots dir del domini d'aquesta funció? $f(x) = \sqrt{x-1} + \ln(1-x)$.

Un nombre x pertanyerà a $D(f)$ si $x - 1 \geq 0$ i $1 - x > 0$, és a dir: $x \geq 1$ i $x < 1$. Com que aquestes dues condicions són incompatibles, no hi ha cap nombre x que pertanyi a $D(f)$.

109. Existeixen valors de a i b per als quals la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & \text{si } x \leq 1 \\ bx & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ ax + 4 & \text{si } x > 3 \end{cases}$ sigui contínua a $\mathbb{R}$?

Perquè f sigui contínua a $\mathbb{R}$ ho ha de ser, en particular, a $x = 1$ i a $x = 3$.

L'exigència de continuïtat a $x = 1$ ens obliga a escriure $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, és a dir: $1 + a = b$ i la continuïtat a $x =$

$$3, \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) \text{ o sigui: } 3b = 3a + 4$$

Com que no és possible que es verifiquin simultàniament les equacions $1 + a = b$ i $3a + 4 = 3b$, no hi ha valors de a i b que facin que f sigui contínua a $\mathbb{R}$.

110. Escriu dues funcions f i g , totes dues amb domini $\mathbb{R}$, tals que $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ i $f(2) \neq g(2)$.

Només cal que n'hi hagi una que sigui discontinua a $x = 2$. Per exemple $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 7 & \text{si } x = 2 \end{cases}$ i

$$g(x) = x + 1.$$

111. A la funció següent:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 6x + 8} & \text{si } x \leq 3 \\ 1 - 3x & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Per a quants nombres reals a es compleix que el límit de $f(x)$ quan x tendeix a a per algun costat és més infinit o menys infinit?

$$\text{Si } x^2 - 6x + 8 = 0, x = 4 \text{ o } x = 2.$$

Però en ser $f(x) = 1 - 3x$ si $x > 3$, l'únic nombre a per al qual es compleix el que es demana és $a = 2$.

112. Si f és continua a $x = 2$ i la seva gràfica passa pel punt $A(2, 0)$, quin és el valor de $\lim_{x \rightarrow 2} (3 + [f(x)]^2)$?

Com que f és continua a $x = 2$, ho és de la funció $g(x) = 3 + (f(x))^2$, per tant,

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3 + [f(x)]^2) = 3 + f(2)^2 = 3 + 0^2 = 3.$$

113. Siguin les funcions:

$$f(x) = 1 + x\sqrt{\frac{2}{x^2} + 7}$$

$$g(x) = 1 + \sqrt{2 + 7x^2}$$

Podem afirmar que $f(x) = g(x)$?

No és cert que $f(x) = g(x)$ si $x < 0$. Per exemple: $f(-1) = 1 - \sqrt{9} = -2$ i $g(-1) = 1 + \sqrt{9} = 4$.

L'explicació és que $\sqrt{2 + 7x^2} = \sqrt{x^2 \left(\frac{2}{x^2} + 7 \right)}$, si $x \neq 0$, no és $x\sqrt{\frac{2}{x^2} + 7}$ sinó $|x|\sqrt{\frac{2}{x^2} + 7}$, però tot i això, $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ i $D(g) = \mathbb{R}$.

114. Escriu una funció racional $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ tal que $p(1) = 0$ i el límit de la qual quan x tendeix a 1 per algun costat sigui més infinit o menys infinit.

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

115. Raona si es pot assegurar que l'equació $f(x) - 2 = 0$ té alguna solució a $[1, 4]$ sabent que:

1. f és contínua a l'interval $[1, 4]$.

2. $f(1) = 0$ i $f(4) = 3$.

Sí, es pot assegurar que l'equació $f(x) - 2 = 0$ té alguna solució a $[1, 4]$.

La funció $F(x) = f(x) - 2$ compleix les condicions del teorema de Bolzano a l'interval $[1, 4]$ ja que allà és contínua i $F(1) = -2 < 0$ i $F(4) = 1 > 0$ per la qual cosa existeix almenys un c a $[1, 4]$ amb $F(c) = 0$, i, per tant, c és una solució de l'equació plantejada.

116. Hi ha algun valor de k per al qual la funció $f(x) = \begin{cases} x - \frac{x^2}{1+x} & \text{si } x \neq -1 \\ k & \text{si } x = -1 \end{cases}$ sigui contínua a $\mathbb{R}$?

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \left(x - \frac{x^2}{1+x} \right) = +\infty$ per tant, com que no existeix el límit lateral, la funció no és contínua a $x = -1$ sigui quin sigui el valor de k .

PROBLEMES

117. Una bomboneria elabora diàriament x kg de bombons. El cost diari, en euros, de la producció depèn de la quantitat segons la relació següent:

$$C(x) = 5 + 22,5x$$

S'estima que si s'elaboren x kg diaris, un kg ha de vendre's a $60 - 0,5x^2$ €. Si cada dia es ven tota la producció, troba una funció que expressi els beneficis diaris d'aquesta bomboneria si es compleixen les indicacions donades.

Si cada quilo es ven a $60 - 0,5x^2$ €, pels x kg produïts en un dia s'obtingran uns ingressos de $x(60 - 0,5x^2)$ €. Els beneficis són els ingressos menys els costos de producció. Així doncs, la funció que ens dona els beneficis és $B(x) = x(60 - 0,5x^2) - (5 + 22,5x) = -0,5x^3 + 37,5x - 5$ €.

118. El balanç econòmic mensual, en milers d'euros, d'una companyia vinícola ve donat per $f(x) = 3 - \frac{5}{x+2}$, $x \geq 0$, on x és el temps en anys d'ençà que es va fundar la companyia. A quin valor tendeixen els guanys o les pèrdues a llarg termini?

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 - \frac{5}{x+2} = 3. \text{ Els guanys tendeixen a 3000 euros mensuals.}$$

119. Una peça és sotmesa a un procés de modificació mitjançant escalfor durant 4 hores. La temperatura T en graus centígrads, que adquireix la peça en funció del temps x , en hores, ve donada per l'expressió:

$$T(x) = Ax - Bx^2 \quad 0 \leq x \leq 4$$

Sabem que després de dues hores d'haver començat el procés, la temperatura és de 40°C i que, en acabar el procés ($T = 4$), la peça està a 0°C . Determina les constants A i B .

$$\text{Sabem que } T(2) = 2A - 4B = 40 \text{ i } T(4) = 4A - 16B = 0.$$

Si resollem el sistema obtenim $A = 40$ i $B = 10$ i la funció que ens dona la temperatura en funció del temps és $T(x) = 40x - 10x^2$, $0 \leq x \leq 4$.

120. El preu unitari que els consumidors accepten pagar per un cert article depèn de la quantitat x d'aquests articles que surten a la venda, seguint aquest model de demanda:

$$d(x) = \frac{56}{x+5}, \text{ amb } d(x) \text{ en euros i } x \text{ en milers d'unitats.}$$

Quin és el preu unitari d'aquest article en el punt d'equilibri si el model d'oferta és $o(x) = 3x + 2$?

Es calculen les unitats que han de sortir a la venda per aconseguir el punt d'equilibri:

$$d(x) = o(x) \Rightarrow \frac{56}{x+5} = 3x + 2 \Rightarrow 56 = (3x + 2)(x + 5) \Rightarrow 3x^2 + 17x - 46 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -\frac{23}{3} \text{ (que no té sentit en aquest context).}$$

Per tant, el punt d'equilibri s'aconsegueix posant a la venda 2000 unitats.

El preu unitari és $o(2) = 3 \cdot 2 + 2 = 8$ euros.

121. La concentració d'ozó contaminant, en micrograms per metre cúbic, en una ciutat ve donada per la funció $C(t) = 90 + 15t - 0,6t^2$; on t és el temps transcorregut des de l'1 de gener de 1990, comptat en anys.

- Fins a quin any està creixent la concentració d'ozó?
- Quina és la concentració màxima d'ozó a la qual arriba aquesta ciutat?
- Com que la funció de la concentració és una paràbola, creixerà fins al vèrtex $V(12,5;183,75)$.

Per tant, això passarà a mitjan any 2002 i serà de 183,75 micrograms per metre cúbic.

- La concentració màxima a la qual arriba aquesta ciutat és de 183,75 micrograms per metre cúbic.

122. Un grup de suricates fuig d'una forta sequera que assola el seu hàbitat i comença el seu pelegrinatge per buscar aigua a l'instant $t = 0$. El nombre d'individus de la població segueix aquesta llei $P(t) = 140 - 4t - t^2$, on t es mesura en mesos.

- Quantes suricates hi havia al principi de la fugida?
 - Demostra que la població va disminuint sempre.
 - Finalment no van trobar zones amb aigua. Quan va desaparèixer completament la població?
- $P(0) = 140$. Al començament hi havia 140 individus.
 - Com que la funció és una paràbola còncaua cap avall, a la dreta del vèrtex que està a $V(-2,144)$ és sempre decreixent, per tant, la població va disminuint sempre.
 - $P(t) = 0 \Rightarrow 140 - 4t - t^2 = 0 \Rightarrow t = -14$ i $t = 10$. La població va desaparèixer després de 10 mesos de començar el pelegrinatge.

123. El cost mensual de les trucades telefòniques de certa companyia s'obté sumant la quantitat fixa (en concepte de lloguer de línia) amb una altra de proporcional a la durada de les trucades. En dos mesos diferents s'han pagat 21,14 € per 13 hores i 27 minuts de trucades i 23,60 € per 15 hores i mitja de trucades.

a) Troba la funció que ens dona el cost en funció dels minuts parlats.

b) Quants cèntims cobren per cada minut parlat?

a) $C(t) = a + bt$, en què a és la quantitat fixa, i b , el preu per minut. Per trobar a i b resollem el sistema:

$$\begin{cases} 21,14 = a + 807b \\ 23,60 = a + 930b \end{cases}$$

La solució del sistema és $a = 5$ i $b = 0,02$.

$C(t) = 5 + 0,02t$, amb t mesurat en minuts.

b) Cobren 0,02 cèntims per minut.

124. El servei de traumatologia d'un hospital va implantar un nou sistema que permet reduir a curt termini les llistes d'espera. Es preveu que a partir d'ara, la funció següent indicarà en cada moment (t , mesurat en mesos) el percentatge de pacients que podrà ser operat sense necessitat d'entrar en llista d'espera:

$$P(t) = \begin{cases} t^2 - 8t + 50 & \text{si } 0 \leq t \leq 10 \\ \frac{38t - 100}{0,4t} & \text{si } t > 10 \end{cases}$$

a) Confirma que aquesta funció és contínua i que, per tant, no presenta un salt a $t = 10$.

b) Per més temps que passi, a quin percentatge no arribarà mai?

a) Si $t \neq 10$, la funció és contínua perquè està definida per un polinomi o un quocient de polinomis amb denominador no nul en el seu domini de definició.

$$\lim_{t \rightarrow 10} P(t) : \begin{cases} \lim_{t \rightarrow 10^-} P(t) = \lim_{t \rightarrow 10^-} t^2 - 8t + 50 = 70 = f(10) \\ \lim_{t \rightarrow 10^+} P(t) = \lim_{t \rightarrow 10^+} \frac{38t - 100}{0,4t} = 70 \end{cases} \Rightarrow \text{Per tant, } P(t) \text{ és contínua a } t = 10.$$

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{38t - 100}{0,4t} = \frac{38}{0,4} = 95$$

No s'arribarà mai al 95 % de pacients que podran ser operats sense necessitat d'entrar en llista d'espera.

125. Al mar hi ha una taca provocada per una erupció marina. La superfície afectada, en km^2 , ve donada per la funció $f(t) = \frac{11t + 20}{t + 2}$, essent t el temps transcorregut d'ençà que s'ha començat a observar-la.

a) Quina és la superfície afectada inicialment, quan es va començar a mesurar-la?

b) Té algun límit l'extensió de la superfície de la taca?

$$\text{a) } f(0) = \frac{20}{2} = 10. \text{ La superfície inicialment afectada és de } 10 \text{ km}^2.$$

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{11t + 20}{t + 2} = 11. \text{ Amb el temps, l'extensió s'aproximarà als } 11 \text{ km}^2.$$

126. Hem d'invertir en un fons d'inversió una quantitat de diners superior o igual a 1000 € i inferior o igual a 9000 €. El benefici B que s'obté depèn de la quantitat invertida x , en milers d'euros, de la manera següent:

$$B(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } 1 \leq x < 4 \\ -x^2 + 10x - 21 & \text{si } 4 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

a) Estudia la continuïtat de la funció B a l'interval $(1,9)$.

b) Per a quins valors de $x \in [1,9]$ el benefici és positiu?

a) $\lim_{x \rightarrow 4^-} B(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} (x - 1) = 3$ i $\lim_{x \rightarrow 4^+} B(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} (-x^2 + 10x - 21) = 3 = f(4)$ per tant, la funció és contínua a $(1,9)$.

b) $x - 1 > 0$ si $x > 1$ per la qual cosa a $(1,4)$ la funció és positiva.

$-x^2 + 10x - 21 = -(x - 7)(x - 3)$ és positiva a $(3,7)$ i, per tant ho és a $[4,7)$

Els beneficis són positius a l'interval $(1,7)$.

127. Els beneficis mensuals d'un artesà, expressats en euros, que ven x objectes, s'ajusten a la funció $B(x) = -0,5x^2 + 50x - 800$, on $20 \leq x \leq 60$. Demuestra que les funcions benefici i benefici mitjà tenen un màxim.

La funció benefici és una paràbola còncaua cap avall i, per tant, arriba al seu màxim en el vèrtex $V(50,450)$.

Com que $20 \leq 50 \leq 60$, el màxim benefici s'obté venent 50 objectes i és de 450 euros.

El benefici mitjà és $\frac{-0,5x^2 + 50x - 800}{x}$. Com que la funció és contínua a l'interval $[20, 60]$, aplicant el teorema del màxim i el mínim, concloem que en aquest interval assoleix el màxim, tot i que no sabem trobar-lo.

128. Un comerç obre les seves portes a les nou del matí i les tanca quan han marxat tots els clients. El nombre de clients ve donat per la funció: $C(t) = -t^2 + 8t$, essent t el nombre d'hores transcorregudes des de la seva obertura. La despesa per client (en euros) també depèn de t i decreix a mesura que passen les hores segons la funció: $G(t) = 300 - 25t$.

a) A quina hora es produeix la major aflluència de clients?

b) A quina hora tanca el comerç?

c) Quant gasta l'últim client que abandona el local?

d) Troba la funció que ens dona la recaptació depenent del temps.

e) Quan hi ha major recaptació depenent del temps?

a) Com que $C(t) = -t^2 + 8t$ és una paràbola, aconsegueix el seu màxim en el vèrtex, que és $V(4,16)$, per tant, la màxima aflluència es produeix al cap de 4 hores d'obrir, és a dir, a les 13:00, i és de 16 clients.

b) El negoci tanca quan $C(t) = -t^2 + 8t = 0$, al cap de 8 hores d'haver obert, o sigui, a les 17:00.

c) L'últim client abandona el local quan $t = 8$ i gasta $G(8) = 300 - 25 \cdot 8 = 100$ euros.

d) La recaptació en una hora és el producte del nombre de clients aquella hora per la despesa de cada client aquella hora. Així doncs, $R(t) = C(t)G(t) = (-t^2 + 8t)(300 - 25t)$.

e) $R(4) = (-4^2 + 8 \cdot 4)(300 - 25 \cdot 4) = 3200$ euros. $R(5) = (-5^2 + 8 \cdot 5)(300 - 25 \cdot 5) = 2625$ euros.

Hi ha una major recaptació a la quarta hora que a la cinquena.

129. S'ha estimat que la població d'un barri perifèric d'una gran ciutat evolucionarà seguint el model:
 $P(t) = \frac{240 + 20t}{16 + t}$ en milers d'habitants, on t indica els anys transcorreguts des de la seva creació l'any 2015.

- a) Quina població tenia aquest barri l'any 2015?
- b) Quina població tindrà aquest barri l'any 2025?
- c) Serà possible que la població del barri dupliqui la població inicial?
- d) A llarg termini, la població s'estabilitzarà o no?

a) $P(0) = \frac{240}{16} = 15$. El barri tenia 15 000 habitants el 2015.

b) $P(10) = \frac{240 + 200}{26} \approx 16,923$. El 2025 el barri tindrà 16 923 habitants aproximadament.

c) Hauria d'existir t amb $\frac{240 + 20t}{16 + t} = 30 \Rightarrow 240 + 20t = 480 + 30t \Rightarrow t = -24$. No, no és possible ja que l'equació plantejada només té una solució negativa i $t \geq 0$.

d) $\lim_{t \rightarrow +\infty} P(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{240 + 20t}{16 + t} = 20$. Sí, la població s'estabilitzarà en 20 000 habitants.

130. Una multinacional ha estimat que anualment els ingressos i les despeses en euros venen donats respectivament per les funcions:

$$I(x) = 28x^2 + 36\,000x$$

$$G(x) = 44x^2 + 12\,000x + 700\,000$$

On x representa la quantitat d'unitats venudes.

Determina:

- a) La funció que defineix el benefici anual en euros.
- b) La quantitat d'unitats que s'han de vendre perquè el benefici sigui màxim.
- c) El benefici màxim.

a) $B(x) = I(x) - G(x) = (28x^2 + 36\,000x) - (44x^2 + 12\,000x + 700\,000) = -16x^2 + 24\,000x - 700\,000$.

b) Com que la funció de beneficis és una paràbola, el màxim s'assolirà en el vèrtex, que és $V(750, 8\,300\,000)$.

Els màxims beneficis s'obtenen produint 750 unitats i són de 8 300 000 euros.

c) El benefici màxim és de 8 300 000 euros.

131. La funció de beneficis d'una empresa és $B(t) = \frac{3t - 6}{t + 1}$ on t representa els anys de vida de l'empresa ($t \geq 0$)

i $B(t)$ està expressat en milions d'euros. Es demana:

- a) Determinar quan l'empresa té guanys, i quan, pèrdues.
- b) Els beneficis són limitats? Raona la resposta. Si ho són, quin és el límit?

a) Com que si $t \geq 0$ el denominador de $\frac{3t - 6}{t + 1}$ és positiu, la funció és negativa si $3t - 6 < 0$, és a dir si $t < 2$.
 L'empresa va tenir pèrdues els dos primers anys de vida i la resta del temps tindrà guanys.

b) $\lim_{t \rightarrow +\infty} B(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t - 6}{t + 1} = 3$ i com que $t > 0$ $\frac{3t - 6}{t + 1} = \frac{3t + 3 - 9}{t + 1} = 3 - \frac{9}{t + 1} < 3$ per tant, els beneficis no superaran mai els tres milions d'euros.

AUTOAVALUACIÓ

COMPROVA EL QUE HAS APRÈS

1. La gràfica de $f(x) = \frac{ax+b}{x+2}$ talla l'eix horitzontal en el punt $A(3,0)$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$. Calcula $f(1)$.

En ser $f(3)=0$, tenim que $3a+b=0$ i en ser $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax+b}{x+2} = 2$, resulta $a=2$, així doncs, $b=-6$ i $f(x) = \frac{2x-6}{x+2}$ amb la qual cosa $f(1) = -\frac{4}{3}$.

2. Determina el domini d'aquesta funció:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$$

La funció $f(x)$ és racional. Calculem per a quins valors el denominador dona zero:

$$\sqrt{x-2} = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2$$

El denominador és una arrel. Per a valors inferiors a 2, el radicand pren valors negatius i l'arrel no queda definida. Per tant, el domini de la funció és $D(f) = (2, +\infty)$.

3. Si x és un nombre positiu, calcula $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h}$.

$$\frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \quad \text{si } h \neq 0.$$

$$\text{Així doncs, } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

4. Calcula $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h}$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{8+12h+6h^2+h^3-8}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(12+6h+h^2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (12+6h+h^2) = 12$$

5. Calcula $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 3x} + x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - 3x} - x)(\sqrt{x^2 - 3x} + x)}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3}{\sqrt{1 - \frac{3}{x}} + 1} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

6. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x+7}{2x-6} \right)^{\sqrt{4x^2+x-3}}$.

$$\begin{aligned} \left(\frac{2x+7}{2x-6} \right)^{\sqrt{4x^2+x-3}} &= \left(1 + \frac{13}{2x-6} \right)^{\sqrt{4x^2+x-3}} = \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{2x-6}{13}} \right)^{\frac{2x-6}{13}} \right]^{\frac{\sqrt{4x^2+x-3}}{\frac{2x-6}{13}}} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2x-6}{13}} \right)^{\frac{2x-6}{13}} &= e \text{ i } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x-3}}{\frac{2x-6}{13}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 13 \sqrt{\frac{4x^2+x-3}{(2x-6)^2}} = 13. \end{aligned}$$

Així doncs, el resultat del límit demanat és e^{13} .

7. És contínua la funció $f(x) = \frac{x+1}{|x|+1}$? Calcula els límits a més infinit i a menys infinit.

La funció $f(x) = \frac{x+1}{|x|+1}$ és contínua a $\mathbb{R}$ ja que és quocient de dues funcions contínues i el denominador no s'anul·la mai.

Si la definim a trossos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{-x+1} & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Així, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$ i $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

8. Donada la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} & \text{si } x < 2 \\ 3x + m & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$, calcula el valor de m perquè f sigui contínua a $x = 2$.

$$f(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 6 + m$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{(x+2)(x-2)}{(x-3)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x+2}{x-3} = -4$$

Perquè f sigui contínua a $x = 2$, ha de passar que $6 + m = -4 \Rightarrow m = -10$.

9. És contínua a $x = 0$ la funció $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2 + e^{\frac{1}{x}}} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$?

Estudiem $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2 + e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{2} \text{ perquè } \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{\frac{1}{x}} = 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2 + e^{\frac{1}{x}}} = 0 \text{ perquè } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}} = +\infty.$$

Així doncs, la funció no és contínua a $x = 0$ perquè no hi ha límit en el punt esmentat.

10. Els guanys d'una empresa, expressats en centenars de milers, venen donats per la funció

$$f(x) = \frac{3t + 8}{t + 2}$$

on t és el nombre d'anys transcorreguts. Hi ha un límit als guanys de l'empresa? Quin?

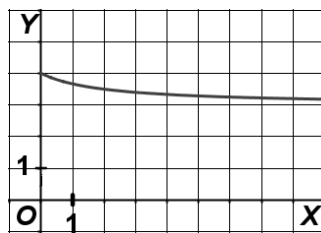
L'empresa comença amb un capital de 400 000 euros perquè $f(0) = \frac{8}{2} = 4$. Passats els anys, els guanys seran:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{3t + 8}{t + 2} = 3$$

Per tant, 300 000 euros serà el seu límit.

Els beneficis seran inferiors a 400 000 € i superiors a 300 000 €.

La gràfica de la funció és:



RELACIONA I CONTESTA

Tria l'única resposta correcta

1. Es consideren les funcions f , g i h , definides a $\mathbb{R}$, tals que per a tot nombre real x es compleix que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

Si a més, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, es pot deduir:

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ C. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$
 B. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ D. $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$

La resposta correcta és la C perquè com que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ per a tot x llavors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x).$$

Per descartar les opcions A, B i D només cal considerar les funcions $f(x) = 1$ per a tot x , $g(x) = x^2 + 2$ i $h(x) = x^2 + 4$

2. Considera la funció $f(x) = e^{-x^2+3}$. Llavors, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ és igual a:

- A. $+\infty$ B. 0 C. e^3 D. No existeix.

Si observem que $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 + 3) = -\infty$ veiem que la resposta és la B.

Assenyala les respostes correctes

3. Sigui f la funció definida a $(-2, +\infty)$ per la fórmula $f(x) = 3 + \frac{1}{x+2}$. Llavors:

- A. La gràfica de f talla l'eix Y a $\frac{7}{2}$. C. $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3$
 B. $f(x) > 3$ en tot $x \in D(f)$. D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

A. És certa, perquè $f(0) = 3 + \frac{1}{0+2} = \frac{7}{2}$.

B. És certa, perquè $\frac{1}{x+2} > 0$ si $x > -2$.

C. És falsa, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty$.

D. És falsa, perquè la funció no està definida si $x \leq -2$ i per tant no podem calcular $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

4. Sigui g la funció definida a $(0, +\infty)$ mitjançant la fórmula $g(x) = \ln \frac{2}{x}$. Llavors:

- A. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$
- B. La gràfica de $g(x)$ no talla mai l'eix X .
- C. La gràfica de $g(x)$ talla dues vegades l'eix Y .
- D. El conjunt de nombres reals solucions de la inequació $g(x) \leq 0$ és $[2, +\infty)$.
- A. És certa, perquè $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - \ln x) = \ln 2 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = -\infty$.
- B. És falsa, $g(2) = 0$.
- C. És falsa, perquè $g(x) = 0$ si $\ln 2 = \ln(x)$, l'única solució és $x = 2$.
- D. És certa, $g(x) \leq 0 \iff \ln 2 \leq \ln x$ i això passa si $2 \leq x$.

5. Sigui f la funció $f(x) = \sqrt{x^2 - x} + x$.

- A. $D(f) = \mathbb{R}$
- B. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- C. f és contínua en tots els punts del seu domini.
- D. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = 0$

- A. És falsa. $x^2 - x \geq 0$ si $x \leq 0$ o $1 \leq x$ per tant, $D(f) = (-\infty, 0] \cup [1, +\infty)$.
- B. És certa.
- C. És certa perquè és la suma de dues funcions contínues.

D. És falsa. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x^2 - x} - x)(\sqrt{x^2 - x} + x)}{\sqrt{x^2 - x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1 \right)} = -\frac{1}{2}$

Tria la relació correcta entre les dues afirmacions donades

6. Considera la funció $f(x) = xg(x)$:

1. La gràfica de f passa per l'origen de coordenades.

2. g és contínua a 0.

A. $1 \Rightarrow 2$, però $2 \nRightarrow 1$

C. $1 \Leftrightarrow 2$

B. $2 \Rightarrow 1$, però $1 \nRightarrow 2$

D. 1 i 2 s'exclouen entre si.

La relació correcta és la B. Com que $g(x)$ és contínua a $x = 0$, existeix $g(0)$ i $f(0) = 0 \cdot g(0) = 0$. Per tant, la funció passa per $(0, 0)$. Per veure que 1 no implica 2 n'hi ha prou a considerar la funció $g(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Assenyala la dada innecessària per contestar

7. Per demostrar si $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = +\infty$, on $f(x) = \frac{1}{(x-a)(x-b)(x-c)(x-4)^{2d}}$, amb a, b, c i d enters positius ens donen aquestes dades:

1. El valor de a

3. El valor de c

2. El valor de b

4. El valor de d

A. Pot eliminar-se la dada 1.

C. Pot eliminar-se la dada 3.

B. Pot eliminar-se la dada 2.

D. Pot eliminar-se la dada 4.

La resposta correcta és la D. Es pot eliminar el valor de d perquè només ens interessa el signe de l'expressió.

Per trobar-lo necessitem saber el signe de $(x-a)$, $(x-b)$, $(x-c)(x-4)^{2d}$ quan x s'aproxima a 4. Per conèixer els tres primers necessitem conèixer a , b i c , però $(x-4)^{2d}$ és sempre positiu perquè és $2d$ parell.