

5. Geometria analítica

EXERCICIS PROPOSATS

1 i 2. Exercicis resolts.

3. Comprova si els punts $A(-2, 3)$, $B(2, -3)$ i $C(-2, 5)$ pertanyen o no a la recta que passa per $P(-2, 6)$ i té com a vector director $\vec{v} = (0, -3)$. Calcula dos punts més d'aquesta recta.

La recta que passa per $P(-2, 6)$ i té com a vector director $\vec{v} = (0, -3)$, que és paral·lel a l'eix Y , és la recta vertical $r: x = -2$, per tant, únicament els punts que tenen per abscissa -2 pertanyen a la recta, és a dir, A i C pertanyen a r però B no.

4. Calcula les equacions de les rectes paral·leles als eixos que passen pel punt $A(-3, 5)$.

La recta paral·lela a l'eix X que passa per A és $y = 5$, i la recta paral·lela a l'eix Y que passa per A és $x = -3$.

5. Indica dos punts i el vector director de la recta $r: 8x + y = 7$.

Dos punts de la recta són, per exemple, $A(1, -1)$ i $B(0, 7)$, el vector director és $\overrightarrow{AB} = (-1, 8)$.

6. En cada cas, calcula l'equació general de la recta que passa pels punts:

a) $A(2, -5)$ i $B(1, -3)$

b) $A(-2, -4)$ i $B(3, -2)$

a) El vector director és $\overrightarrow{AB} = (-1, 2)$ i la recta passa per $A(2, -5)$. Per tant:

$$\frac{x-2}{-1} = \frac{y+5}{2} \Rightarrow 2x-4 = -y-5 \Rightarrow 2x+y+1=0$$

b) El vector director és $\overrightarrow{AB} = (5, 2)$ i la recta passa per $A(-2, -4)$. Per tant:

$$\frac{x+2}{5} = \frac{y+4}{2} \Rightarrow 2x+4 = 5y+20 \Rightarrow 2x-5y-16=0$$

7. Troba k perquè $r: (k+5)x - (3+k)y = 1-k$ passi per $P(2, 3)$.

Substituint les coordenades de P a l'equació de la recta tenim $2(k+5) - 3(3+k) = 1-k \Rightarrow 0=0$, per tant, el punt P pertany a r per a qualsevol valor real de k .

8. Troba el valor de k perquè la recta que passa pels punts $A(2, -1)$ i $B(3, k)$ passi pel punt $C(1, -4)$.

C pertany a la recta que passa per A i B si i només si els vectors $\overrightarrow{AB} = (1, k+1)$ i $\overrightarrow{AC} = (-1, -3)$ són proporcionals. Per tant:

$$\frac{1}{-1} = \frac{k+1}{-3} \Rightarrow -k-1 = -3 \Rightarrow k=2$$

9 a 11. Exercicis resolts.

12. Indica un vector director i un altre de normal de la recta d'equació $-3x + 2y - 4 = 0$.

Un vector normal és $\vec{n} = (-3, 2)$ i un vector director és $\vec{u} = (2, 3)$.

13. Troba un vector director i un altre de normal de la recta que passa pel punt $A\left(-2, \frac{1}{3}\right)$ i per l'origen de coordenades.

Vector director: $\overrightarrow{OA} = \left(-2, \frac{1}{3}\right) = (-6, 1)$

Vector normal: $\vec{n} = (1, 6)$

14. Una recta té com a vector normal a $\vec{n} = (2, -3)$ i passa pel punt $A(-1, 2)$. Escriu-ne l'equació general.

L'equació general és de la forma $2x - 3y + k = 0$. Com que la recta passa per A, ha de ser $-2 - 6 + k = 0 \Rightarrow k = 8$.

Per tant, l'equació general de la recta és $2x - 3y + 8 = 0$.

15. Troba l'equació normal de la recta que passa per $P(1, -3)$ i és perpendicular a la que passa per $A(0, 2)$ i $B(-1, 0)$.

La recta té vector director $\overrightarrow{AB} = (-1, -2) \approx (1, 2)$ i passa pel punt P, per tant, la seva equació normal és:

$$(x - 1) + 2(y + 3) = 0 \text{ o } x + 2y + 5 = 0.$$

16. Escriu l'equació de la recta perpendicular a $3x - 6y = 1$ i que passa pel punt $A(-3, 2)$.

Totes les perpendiculars a $3x - 6y = 1$ són de la forma $6x + 3y + k = 0$. Fent a que A pertanyi a la perpendicular tenim $-18 + 6 + k = 0 \Rightarrow k = 12$ i, per tant, l'equació de la recta perpendicular és

$$6x + 3y + 12 = 0 \Rightarrow 2x + y + 4 = 0.$$

17. Troba l'equació de la recta perpendicular a $5x + 4y - 3 = 0$ que talla la recta $6(x - 1) - (y - 1) = 0$ a $x = 1$.

Totes les rectes perpendiculars a $5x + 4y - 3 = 0$ són de la forma $4x - 5y + k = 0$. Fent que talli

$6(x - 1) - (y - 1) = 0$ en $x = 1$, és a dir, a que passi pel punt $(1, 1)$ tenim $4 - 5 + k = 0 \Rightarrow k = 1$. Per tant, l'equació de la recta perpendicular és $4x - 5y + 1 = 0$.

18. Troba l'equació de la recta perpendicular al segment d'extrems $A(0, -2)$ i $B(1, 4)$ i que passa pel punt $C(3, 0)$.

La recta té vector normal $\overrightarrow{AB} = (1, 6)$ i passa pel punt C, per tant, la seva equació és:

$$1(x - 3) + 6(y - 0) = 0 \Rightarrow x + 6y - 3 = 0$$

19. Sigui el triangle de vèrtexs $A(5, 3)$, $B(7, -1)$ i $C(1, -1)$. Troba l'equació de l'altura corresponent al vèrtex A.

L'altura corresponent al vèrtex A passa per aquest punt i és perpendicular a $\overrightarrow{BC} = (-6, 0) \approx (1, 0)$, per tant, la seva equació és $(x - 5) + 0(y - 3) = 0 \Rightarrow x = 5$.

20. Exercici resolt.**21. Calcula l'equació de la recta que passa pel punt $A(-2, 4)$ i té pendent $m = 3$.**

$$y - 4 = 3(x + 2) \Rightarrow y - 4 = 3x + 6 \Rightarrow y = 3x + 10$$

22. Indica el vector director i el pendent de les rectes:

$$\text{a) } -2x + y + 7 = 0 \quad \text{b) } \begin{cases} x = 3\lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \quad \text{c) } x + 4 = \frac{y - 1}{2}$$

$$\text{a) Vector director: } \vec{u} = (1, 2). \text{ Pendent: } m = \frac{2}{1} = 2.$$

$$\text{b) Vector director: } \vec{u} = (3, -1). \text{ Pendent: } m = -\frac{1}{3}.$$

$$\text{c) Vector director: } \vec{u} = (1, 2). \text{ Pendent: } m = \frac{2}{1} = 2.$$

23. Calcula el pendent i l'ordenada a l'origen de la recta que passa pels punts:

$$\text{a) } A(-1, 5) \text{ i } B(2, -2) \quad \text{b) } A(1, 2) \text{ i } B(2, -1)$$

Sigui $y = mx + n$ l'equació explícita de la recta, on m és el pendent i n l'ordenada en l'origen. Els punts donats han de complir l'equació, per la qual cosa tenim:

$$\text{a) } \begin{cases} -m + n = 5 \\ 2m + n = -2 \end{cases} \Rightarrow m = -\frac{7}{3}, n = \frac{8}{3} \quad \text{b) } \begin{cases} m + n = 2 \\ 2m + n = -1 \end{cases} \Rightarrow m = -3, n = 5$$

24. Troba l'equació explícita i la punt-pendent de la recta que passa per $A(0, 5)$ i és perpendicular a $3x + 5y + 2 = 0$.

La recta buscada té vector director $\vec{u} = (3, 5)$, per tant, té pendent $m = \frac{5}{3}$, a més, passa per A , amb la qual cosa la seva equació punt-pendent és $y - 5 = \frac{5}{3}x$ i la seva equació explícita és $y = \frac{5}{3}x + 5$.

25. Exercici interactiu.**26 a 28. Exercicis resolts.****29. Indica, en cada cas, si les rectes r i s són paral·leles o secants i, en l'últim cas, obtén el punt d'intersecció:**

$$\text{a) } r: \begin{cases} x = 2 - 4t \\ y = 3 + 2t \end{cases} \quad s: \begin{cases} x = 2s \\ y = -s \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} r: 2x + 5y - 5 = 0 \\ s: 3x - 5y + 5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2 - 4t = 2s \\ 3 + 2t = -s \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t + s = 1 \\ 2t + s = -3 \end{cases} \text{ Com que el sistema és incompatible, les dues rectes són paral·leles.}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3} \neq \frac{5}{-5} \Rightarrow \text{Són rectes secants. Calculem el punt de tall: } \begin{cases} 2x + 5y - 5 = 0 \\ 3x - 5y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = 1 \Rightarrow P(0, 1)$$

30. Calcula l'equació de la recta paral·lela a la recta $r: 2x + y + 1 = 0$ i que passa pel punt d'intersecció de les rectes $s: x - y + 5 = 0$ i $t: x + y + 1 = 0$.

Es calcula el punt d'intersecció de s i t :

$$\begin{cases} x - y + 5 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -3, y = 2 \Rightarrow P(-3, 2)$$

El feix de rectes paral·leles a r té equació $2x + y + K = 0$. Com que la recta que es busca passa per P , tenim:

$$-6 + 2 + K = 0 \Rightarrow K = 4. \text{ Per tant, l'equació de la recta és } 2x + y + 4 = 0.$$

31. Troba l'equació del feix que té per vèrtex $P(-5, 4)$.

$$\{y - 4 = m(x + 5), m \in \mathbb{R}\} \cup \{x = -5\}$$

32 i 33. Exercicis resolts.

34. Calcula k perquè la distància entre les rectes $5x + 12y - k = 0$ i $5x + 12y + 15 = 0$ sigui 2.

Observem que les rectes donades són paral·leles. Tenim:

$$d(r, s) = 2 \Rightarrow \frac{|-k - 15|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = 2 \Rightarrow |-k - 15| = 26 \Rightarrow \begin{cases} -15 - k = 26 \\ -15 - k = -26 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = -41 \\ k = 11 \end{cases}$$

35. Calcula l'àrea del triangle determinat per $O(0, 0)$ i les interseccions de la recta $x + 2y = 4$ amb els eixos.

El triangle té com a vèrtexs $O(0, 0)$, $A(0, 2)$ i $B(4, 0)$.

L'àrea del triangle és $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$ amb: base = $d(O, B) = 4$ u, altura = $d(O, A) = 2$ u

$$\text{Per tant, } A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4 \text{ u}^2$$

36. Calcula la mida de les altures del triangle de vèrtexs $A(4, 1)$, $B(-1, 3)$ i $C(0, 4)$.

$AB: 2x + 5y - 13 = 0$, $BC: x - y + 4 = 0$ i $AC: 3x + 4y - 16 = 0$, per tant, les altures mesuren:

$$h_{AB} = d(C, AB) = \frac{|20 - 13|}{\sqrt{4 + 25}} = \frac{7}{\sqrt{29}} = \frac{7\sqrt{29}}{29} \text{ u} \quad h_{BC} = d(A, BC) = \frac{|4 - 1 + 4|}{\sqrt{1 + 1}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2} \text{ u}$$

$$h_{AC} = d(B, AC) = \frac{|-3 + 12 - 16|}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{7}{5} \text{ u}$$

37. Troba la distància del punt $C(10, 0)$ a la recta que passa per $A(-2, 3)$ i $B(2, 2)$. Quina és la posició relativa de A , B i C ?

La recta AB té vector director $\overrightarrow{AB} = (4, -1)$ i passa per A , la seva equació és: $\frac{x+2}{4} = \frac{y-3}{-1} \Rightarrow x + 4y - 10 = 0$.

$$d(C, AB) = \frac{|10 - 10|}{\sqrt{1 + 16}} = 0 \text{ u, cosa que significa que } C \text{ pertany a la recta } AB, \text{ és a dir, } A, B \text{ i } C \text{ estan alineats.}$$

38. Exercici resolt.

39. Calcula l'angle que formen les rectes:

a) $r: 3x - 4y = 0$ i $s: 2x + 2y + 3 = 0$

b) $r: y = x - 5$ i $s: y = 2x + 2$

a) Vectors normals: $\vec{n}_r = (3, -4)$ i $\vec{n}_s = (2, 2)$. Per tant: $\cos \alpha = \cos(r, s) = \frac{|\vec{n}_r \cdot \vec{n}_s|}{|\vec{n}_r| \cdot |\vec{n}_s|} = \frac{2}{10\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{10} \Rightarrow \alpha = 81,87^\circ$

b) Els pendents són $m_1 = 1$ i $m_2 = 2$, per tant, $\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{1 - 2}{1 + 2} \right| = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 18,43^\circ$.

40. Calcula l'angle format per $r: 4x + 2y - 7 = 0$ i l'eix Y .

Els vectors normals són $\vec{n}_1 = (4, 2)$ i $\vec{n}_2 = (1, 0)$, per tant, $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{4}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 26,57^\circ$

41. Calcula la recta perpendicular a $r: 4x + y - 3 = 0$ i que passa pel punt $P(-3, 3)$.El pendent de la recta r és $m = -1$, per tant, el pendent d'una recta perpendicular a aquesta és $m' = 1$.Així doncs, l'equació de la recta buscada és $y - 3 = x + 3 \Rightarrow y = x + 6$ **42 i 43. Exercicis resolts.****44. Obtén el simètric de $P(-2, 3)$ respecte del punt $M(1, -4)$.**Sigui $P'(a, b)$ el punt buscat, M és el punt mitjà del segment $\overline{PP'}$. Per tant:

$$\left(\frac{-2+a}{2}, \frac{3+b}{2} \right) = (1, -4) \Rightarrow \begin{cases} \frac{-2+a}{2} = 1 \\ \frac{3+b}{2} = -4 \end{cases} \Rightarrow a = 4, b = -11 \Rightarrow P'(4, -11)$$

45. Troba la recta simètrica de l'eix d'ordenades respecte de $y = x + 1$.Calculem el punt Q d'intersecció de totes dues rectes ja que és l'únic invariant per la simetria: $Q(0, 1)$.Per calcular la recta simètrica indicada n'hi ha prou amb determinar el simètric P' d'un altre punt qualsevol, P , de l'eix d'ordenades, ja que la recta buscada quedarà determinada pels punts Q i P' .Agafant $P(0, -1)$, la recta perpendicular a $y = x + 1$ que passa per P és $y = -x - 1$.Totes dues rectes es tallen a $M(-1, 0)$ i M ha de ser el punt mitjà del segment $\overline{PP'}$, per la qual cosa $P'(-2, 1)$.Per tant, la recta simètrica que es busca és la que passa per Q i P' , l'equació de la qual és $y = 1$.**46. Determina el triangle simètric de $k(4, 0)$, $B(-1, 6)$ i $C(-1, -1)$ respecte de la simetria central amb centre a l'origen de coordenades.**El simètric d'un punt $P(a, b)$ respecte de la simetria central amb centre $O(0, 0)$ és $P'(-a, -b)$.Per tant, els vèrtexs del triangle simètric són $A'(-4, 0)$, $B'(1, -6)$ i $C'(1, 1)$.

47. Troba el triangle simètric de $A(3, 0)$, $B(0, 3)$ i $P(-2, -2)$ respecte de la simetria axial amb eix la recta $y = x$.

El simètric d'un punt $P(a, b)$ respecte de la simetria axial amb eix la recta $y = x$ és $P'(b, a)$.

Per tant, els vèrtexs del triangle simètric són $A'(0, 3)$, $B'(3, 0)$ i $C'(-2, -2)$.

48. Troba l'extrem B del segment $\overline{AB}$ sent $A(2, 1)$ i sabent que la mediatriu del segment és $r: x + 2y - 9 = 0$.

Sigui $B(a, b)$, com que la mediatriu és perpendicular a $\overline{AB} = (a-2, b-1)$, aquest vector ha de ser proporcional a $\vec{n}_r = (1, 2)$. A més, el punt mitjà del segment $\overline{AB}$ ha de pertànyer a r , per tant:

$$\begin{cases} \frac{a-2}{1} = \frac{b-1}{2} \\ \frac{2+a}{2} + 2\frac{1+b}{2} - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a-b=3 \\ a+2b=14 \end{cases} \Rightarrow a=4, b=5 \Rightarrow B(4, 5)$$

49. Exercici interactiu.

50. Troba la mediatriu del segment d'extrems $A(-1, 3)$ i $B(5, -3)$.

Els punts $P(x, y)$ de la mediatriu compleixen que: $d(A, X) = d(B, X) \Rightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-5)^2 + (y+3)^2} \Rightarrow$
 $\Rightarrow x^2 + 2x + 1 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 10x + 25 + y^2 + 6y + 9 \Rightarrow x - y - 2 = 0$

51. Troba el punt de la recta $r: x - 3y - 11 = 0$ que equidista dels punts $A(-2, 3)$ i $B(6, -1)$.

Els punts que equidisten de A i B pertanyen a la mediatriu del segment $\overline{AB}$, d'equació:

$$\sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2} \Rightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = x^2 - 12x + 36 + y^2 + 2y + 1 \Rightarrow 2x - y - 3 = 0$$

Per tant, el punt P que es busca és la intersecció de la mediatriu amb $r: \begin{cases} x - 3y - 11 = 0 \\ 2x - y - 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow P\left(-\frac{2}{5}, -\frac{19}{5}\right)$

52. Donades les rectes $r: x - 3y + 4 = 0$ i $s: x + y = 0$, obtén les seves bisectrius, comprova que es tallen en el punt d'intersecció de r i s i que són perpendiculars.

Els punts $P(x, y)$ de les bisectrius compleixen:

$$d(P, r) = d(P, s) \Rightarrow \frac{|x - 3y + 4|}{\sqrt{10}} = \frac{|x + y|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{x - 3y + 4}{\sqrt{10}} = \pm \frac{x + y}{\sqrt{2}} \Rightarrow \begin{cases} b_1: (\sqrt{5} - 1)x + (\sqrt{5} + 3)y - 4 = 0 \\ b_2: (\sqrt{5} + 1)x + (\sqrt{5} - 3)y + 4 = 0 \end{cases}$$

El punt de tall de les rectes és: $\begin{cases} x - 3y + 4 = 0 \\ x + y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 1 \Rightarrow P(-1, 1)$

P compleix l'equació de cada una de les bisectrius: $\begin{cases} (\sqrt{5} - 1)(-1) + (\sqrt{5} + 3) \cdot 1 - 4 = -\sqrt{5} + 1 + \sqrt{5} + 3 - 4 = 0 \\ (\sqrt{5} + 1)(-1) + (\sqrt{5} - 3) \cdot 1 + 4 = -\sqrt{5} - 1 + \sqrt{5} - 3 + 4 = 0 \end{cases}$

Els vectors normals a b_1 i b_2 són, respectivament, $\vec{n}_1 = (\sqrt{5} - 1, \sqrt{5} + 3)$ i $\vec{n}_2 = (\sqrt{5} + 1, \sqrt{5} - 3)$, que compleixen $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 5 - 1 + 5 - 9 = 0$, per la qual cosa totes dues bisectrius són perpendiculars.

53. Troba els punts de la recta $r: y = -x + 6$ que equidisten de les rectes $s: 3x - y = 1$ i $t: 3x + y = 5$.

Els punts que equidisten de s i t són els que pertanyen a les seves bisectrius, d'equacions:

$$\frac{|3x - y - 1|}{\sqrt{10}} = \frac{|3x + y - 5|}{\sqrt{10}} \Rightarrow 3x - y - 1 = \pm(3x + y - 5) \Rightarrow \begin{cases} b_1: y = 2 \\ b_2: x = 1 \end{cases}$$

Els punts que es busquen són, per tant, els punts de tall de r amb cada una de les bisectrius: $P_1(4, 2)$ i $P_2(1, 5)$.

54. Donat el triangle de vèrtexs $A(5, 1)$, $B(3, 7)$ i $C(-2, 3)$:

- a) Calcula el circumcentre. b) Calcula l' incentre. c) Calcula el baricentre.

a) El circumcentre, T , és el punt de tall de les mediatrius del triangle. Per tant:

$$\begin{cases} \sqrt{(5-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(3-x)^2 + (7-y)^2} \\ \sqrt{(5-x)^2 + (1-y)^2} = \sqrt{(-2-x)^2 + (3-y)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 12y = 32 \\ -14x + 4y = -13 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{71}{38}, y = \frac{125}{38} \Rightarrow T\left(\frac{71}{38}, \frac{125}{38}\right)$$

b) L' incentre, I , és el punt de tall de les bisectrius interiors del triangle. Per tant:

$$\text{Recta AB: } 3x + y - 16 = 0 \quad \text{Recta BC: } 4x - 5y + 23 = 0 \quad \text{Recta AC: } 2x + 7y - 17 = 0$$

$$\begin{cases} \frac{|3x + y - 16|}{\sqrt{10}} = \frac{|4x - 5y + 23|}{\sqrt{41}} \\ \frac{|3x + y - 16|}{\sqrt{10}} = \frac{|2x + 7y - 17|}{\sqrt{53}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (3\sqrt{53} + 2\sqrt{10})x + (\sqrt{53} + 7\sqrt{10})y = 17\sqrt{10} + 16\sqrt{53} \\ (3\sqrt{41} + 4\sqrt{10})x + (\sqrt{41} - 5\sqrt{10})y = 16\sqrt{41} - 23\sqrt{10} \end{cases} \Rightarrow I(2,06; 3,82)$$

c) El baricentre, G , és el punt de tall de les mediatrius del triangle. Per tant:

$$\text{Punt mitjà de AB: } M_1(4, 4) \quad \text{Punt mitjà de BC: } M_2\left(\frac{1}{2}, 5\right)$$

$$\begin{cases} CM_1: x - 6y + 20 = 0 \\ AM_2: 8x + 9y - 49 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = \frac{11}{3} \Rightarrow T\left(2, \frac{11}{3}\right)$$

55 a 62. Exercicis resolts.

EXERCICIS

Equacions de la recta

63. Per a cadascuna de les rectes següents, indica si els punts $P(-2, 1)$ i $Q(3, -1)$ pertanyen o no a les rectes i calcula un punt més de cada una.

a) $r_1: (x, y) = (7, -2) + \lambda(4, -1)$ b) $r_2: \begin{cases} x = -2 + \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \end{cases}$ c) $r_3: 2x + 5y = 1$ d) $r_4: \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{5}$

a) Substituint les coordenades de tots dos punts a l'equació, tenim:

$$(-2, 1) = (7, -2) + \lambda(4, -1) \Rightarrow \begin{cases} -2 = 7 + 4\lambda \\ 1 = -2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -\frac{9}{4} \\ \lambda = -3 \end{cases} \Rightarrow P \notin r_1$$

$$(3, -1) = (7, -2) + \lambda(4, -1) \Rightarrow \begin{cases} 3 = 7 + 4\lambda \\ -1 = -2 - \lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow Q \in r_1$$

Per calcular un punt més n'hi ha prou amb donar valor a λ , per exemple, agafant $\lambda = 0$ obtenim el punt $R(7, -2)$.

b) Substituint les coordenades de tots dos punts a les equacions, tenim:

$$\begin{cases} -2 = -2 + \lambda \\ 1 = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow P \in r_2 \qquad \begin{cases} 3 = -2 + \lambda \\ -1 = 1 + 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 5 \\ \lambda = -1 \end{cases} \Rightarrow Q \notin r_2$$

Per calcular un punt més n'hi ha prou amb donar valor a λ , per exemple, agafant $\lambda = 1$ obtenim el punt $R(-1, 3)$.

c) Substituint les coordenades de tots dos punts a l'equació, tenim:

$$2(-2) + 5 \cdot 1 = 1 \Rightarrow P \in r_3 \qquad 2 \cdot 3 + 5(-1) = 1 \Rightarrow Q \in r_3 \quad \text{Un altre punt de la recta és, per exemple, } R(-7, 3)$$

d) Substituint les coordenades de tots dos punts a l'equació, tenim:

$$\frac{-2+1}{2} \neq \frac{1-2}{5} \Rightarrow P \notin r_4 \qquad \frac{3+1}{2} \neq \frac{-1-2}{5} \Rightarrow Q \notin r_4$$

64. Obtén l'equació vectorial i les equacions paramètriques de cadascuna de les rectes següents.

a) La recta que passa pel punt $P(-3, 1)$ i té la direcció del vector $\vec{u} = (-1, -2)$.

b) La recta que passa pels punts $A(2, -3)$ i $B(1, 4)$.

c) La recta que té com un dels seus vectors de direcció $\vec{u} = (-3, 3)$ i talla la part positiva de l'eix d'abscisses en un punt que dista 3 unitats de l'origen de coordenades.

a) E. vectorial: $r : (x, y) = (-3, 1) + \lambda(-1, -2)$ E. paramètriques: $r : \begin{cases} x = -3 - \lambda \\ y = 1 - 2\lambda \end{cases}$

b) Vector director: $\overrightarrow{AB} = (-1, 7)$ E. vectorial: $r : (x, y) = (2, -3) + \lambda(-1, 7)$ E. paramètriques: $r : \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = -3 + 7\lambda \end{cases}$

c) E. vectorial: $r : (x, y) = (3, 0) + \lambda(-3, 3)$ E. paramètriques: $r : \begin{cases} x = 3 - 3\lambda \\ y = 3\lambda \end{cases}$

65. Per a cadascuna de las rectes següents, determina l'equació contínua i l'equació general.

a) Passa pel punt $A(-3, -4)$ i té la direcció del vector $\vec{u} = (1, -2)$.

b) Passa pels punts $P(2, -5)$ i $Q(5, 1)$.

c) Passa per l'origen de coordenades i pel punt $B(-3, 4)$.

a) Equació contínua: $\frac{x+3}{1} = \frac{y+4}{-2}$ Equació general: $-2x - 6 = y + 4 \Rightarrow 2x + y + 10 = 0$

b) Equació contínua: $\frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{6}$ Equació general: $6x - 12 = 3y + 15 \Rightarrow 2x - y - 9 = 0$

c) Equació contínua: $\frac{x}{-3} = \frac{y}{4}$ Equació general: $4x + 3y = 0$

66. Troba un vector director i un de normal en cadascuna de les rectes següents.

a) $r : -2x + 3y = 5$

b) $s : x - \frac{3}{2}y + 1 = 0$

c) Passa pels punts $A(2, -5)$ i $B(-5, -1)$.

- a) Vector normal: $\vec{n} = (-2, 3)$ Vector director: $\vec{u} = (3, 2)$
- b) Vector normal: $\vec{n} = \left(1, -\frac{3}{2}\right)$ Vector director: $\vec{u} = \left(\frac{3}{2}, 1\right)$
- c) Vector director: $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-7, 4)$ Vector normal: $\vec{n} = (4, 7)$

67. Obtén les equacions dels costats del triangle de vèrtexs $P(1, 3)$, $Q(-4, 0)$ i $R(-2, -1)$. Per a cada costat, troba un vector de direcció i un de normal.

Costat PQ . Un vector de direcció és $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-5, -3)$. Un vector normal és $\vec{n} = (3, -5)$.

L'equació és $\frac{x-1}{-5} = \frac{y-3}{-3} \Rightarrow -3x+3 = -5y+15 \Rightarrow 3x-5y+12=0$

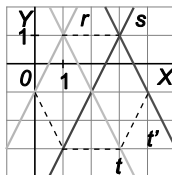
Costat QR . Un vector de direcció és $\vec{u} = \overrightarrow{QR} = (2, -1)$. Un vector normal és $\vec{n} = (1, 2)$.

L'equació és $\frac{x+4}{2} = \frac{y-0}{-1} \Rightarrow -x-4 = 2y \Rightarrow x+2y+4=0$

Costat PR . Un vector de direcció és $\vec{u} = \overrightarrow{PR} = (-3, -4)$. Un vector normal és $\vec{n} = (4, -3)$.

L'equació és $\frac{x-1}{-3} = \frac{y-3}{-4} \Rightarrow -4x+4 = -3y+9 \Rightarrow 4x-3y+5=0$

68. Troba les equacions punt-pendent de les rectes r , s , t i t' de la figura.



La recta r passa per $P_1(1, 1)$ i té pendent $m_1 = 2$, així, la seva equació punt-pendent és $y-1=2(x-1)$.

La recta s passa per $P_2(3, 1)$ i té pendent $m_2 = 2$, així, la seva equació punt-pendent és $y-1=2(x-3)$.

La recta t passa per $P_3(1, 1)$ i té pendent $m_3 = -2$, així, la seva equació punt-pendent és $y-1=-2(x-1)$.

La recta t' passa per $P_4(3, 1)$ i té pendent $m_4 = -2$, així, la seva equació punt-pendent és $y-1=-2(x-3)$.

69. Troba les equacions paramètriques de les rectes:

- a) $r: y = -2x + 3$ b) $s: 4x + 3y - 6 = 0$ c) $t: \frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y - 1 = 0$ d) $w: \frac{x-4}{2} = \frac{y+5}{3}$

a) La recta passa per $P(0, 3)$, vector director $\vec{u} = (1, -2)$. Les equacions són: $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$

b) La recta passa per $P(0, 2)$, vector normal $\vec{n} = (4, 3)$ i director $\vec{u} = (-3, 4)$. Les equacions són: $s: \begin{cases} x = -3\lambda \\ y = 2 + 4\lambda \end{cases}$

c) La recta passa per $P(2, 0)$, vector normal $\vec{n} = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \approx (2, 3)$ i director $\vec{u} = (-3, 2)$. Equacions: $t: \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 2\lambda \end{cases}$

d) La recta passa per $P(4, -5)$, vector director $\vec{u} = (2, 3)$. Les equacions són: $w: \begin{cases} x = 4 + 2\lambda \\ y = -5 + 3\lambda \end{cases}$

70. Troba l'equació normal i l'equació general de la recta que té $\vec{n} = (2, 4)$ com a vector normal i passa pel punt mitjà del segment $\overline{AB}$ sent $A(0, -2)$ i $B(-3, 0)$.

El punt mitjà del segment AB és $M\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

L'equació normal és $2\left(x + \frac{3}{2}\right) + 4(y + 1) = 0$

L'equació general és $2x + 4y + 7 = 0$

71. Calcula el pendent de les rectes següents:

a) $r : y = -2x + 3$

b) $r : 2x - 3y + 5 = 0$

c) Recta que passa pels punts $P(-1, 2)$ i $Q(1, 3)$.

d) $r : \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = -1 + 2\lambda \end{cases}$

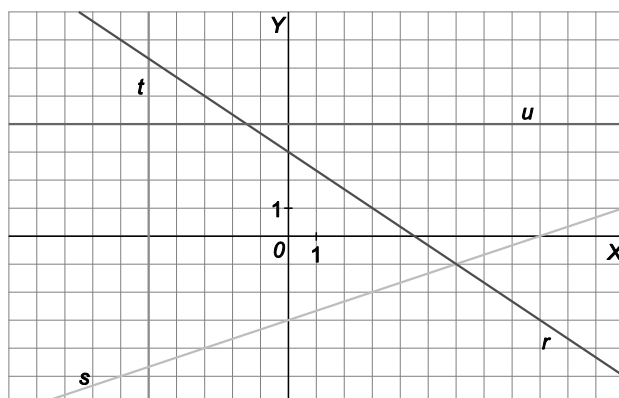
a) $m = -2$

b) $2x - 3y + 5 = 0 \Rightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3} \Rightarrow m = \frac{2}{3}$

c) El vector director és $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (2, 1)$, per tant, el pendent és $m = \frac{1}{2}$

d) El vector director és $\vec{u} = (5, 2)$, per tant, el pendent és $m = \frac{2}{5}$

72. Indica el valor dels pendents i de les ordenades a l'origen de les rectes de la figura i determina, per a cada una d'elles, la seva equació general.



Recta r :

$$m = -\frac{2}{3}, n = 3 \Rightarrow y = -\frac{2}{3}x + 3 \Rightarrow 2x + 3y - 9 = 0$$

Recta s :

$$m = \frac{1}{3}, n = -3 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x - 3 \Rightarrow x - 3y - 9 = 0$$

Recta t :

$$m = \infty, \text{ no té ordenada a l'origen } \Rightarrow x + 5 = 0$$

$$\text{Recta } u: m = 0, n = 4 \Rightarrow y - 4 = 0$$

73. Troba l'equació explícita de la recta que passa pel punt $P(-2, -5)$ i forma amb la part positiva de l'eix d'ordenades un angle de 60° .

La recta forma un angle de 30° amb la part positiva de l'eix d'abscisses, per la qual cosa té pendent

$$m = \tan(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{L'equació explícita és: } y + 5 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x + 2) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{2\sqrt{3} - 15}{3}$$

74. Obtén les equacions explícites de les rectes següents.

- a) Passa per $A(-1, 2)$ i té pendent $m = 2$.
 b) Passa pels punts $A(-1, 3)$ i $B(2, 4)$.
 c) Passa per $A(2, 3)$ i forma amb la part dreta de l'eix d'abscisses un angle de 30° .
 d) Passa per $A(-2, 5)$ i forma, amb la part esquerra de l'eix d'abscisses, un angle de 120° .

a) $y - 2 = 2(x + 1) \Rightarrow y = 2x + 4$

b) El vector director és $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (3, 1)$, l'equació explícita és: $\frac{x+1}{3} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x+1 = 3y-9 \Rightarrow y = \frac{1}{3}x + \frac{10}{3}$

c) El pendent és $m = \operatorname{tg}(30^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{3}$, l'equació explícita és: $y - 3 = \frac{\sqrt{3}}{3}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{9 - 2\sqrt{3}}{3}$

d) La recta forma un angle de 60° amb la part dreta de l'eix d'abscisses, per la qual cosa té pendent $m = \operatorname{tg}(60^\circ) = \sqrt{3}$, per tant, l'equació explícita és: $y - 5 = \sqrt{3}(x + 2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + (2\sqrt{3} + 5)$.

Posicions relatives de rectes

75. Troba l'equació de la recta que passa pel punt $P(2, 6)$ i és paral·lela a $r : \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -1 - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.

La recta que es busca té vector director $\vec{u} = (2, -1)$, per tant, l'equació és:

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y-6}{-1} \Rightarrow -x+2 = 2y-12 \Rightarrow x+2y-14 = 0$$

76. Estudia les posicions relatives dels parells de rectes següents.

a) $r : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 1 - \lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = \frac{3+t}{2} \\ y = \frac{1-t}{2} \end{cases}$

b) $r : 3x - 2y = 7 \quad s : 2x - 3y = 8$

c) $r : x + y = 7 \quad s : -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{7}{2} = 0$

- a) Els vectors directors són $\vec{u}_r = (1, -1)$ i $\vec{u}_s = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. Com que són proporcionals i el punt $P(1, 1)$ pertany a totes dues rectes, les rectes són coincidents.

b) $\frac{3}{2} \neq \frac{-2}{-3} \Rightarrow$ Les rectes són secants.

- c) L'equació de s es pot escriure com $x + y - 7 = 0$, que és la mateixa equació de r , per la qual cosa les rectes són coincidents.

77. Calcula el punt d'intersecció dels següents parells de rectes secants.

a) $r : \begin{cases} x = 2 - 3\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \quad s : \begin{cases} x = 1 - 4\mu \\ y = 2 + 2\mu \end{cases}$

b) $r : 2x - 5y = -\frac{23}{2} \quad s : 3x - 4y = -12$

$$a) \begin{cases} 2-3\lambda=1-4\mu \\ 1+\lambda=2+2\mu \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -3\lambda+4\mu=-1 \\ \lambda-2\mu=1 \end{cases} \Rightarrow \lambda=-1, \mu=-1 \Rightarrow \text{El punt d'intersecció és } P(5, 0)$$

$$b) \begin{cases} 2x-5y=-\frac{23}{2} \\ 3x-4y=-12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-10y=-23 \\ 3x-4y=-12 \end{cases} \Rightarrow x=-2, y=\frac{3}{2} \Rightarrow \text{El punt d'intersecció és } P\left(-2, \frac{3}{2}\right)$$

78. Troba l'equació de la recta que passa pel punt d'intersecció de les rectes $r: 2x - 3y + 1 = 0$ i $s: 4x + y - 3 = 0$ i talla l'eix d'abscisses al punt $P(4, 0)$.

$$\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ 4x+y-3=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{4}{7}, y=\frac{5}{7} \Rightarrow r \text{ i } s \text{ es tallen al punt } Q\left(\frac{4}{7}, \frac{5}{7}\right). \text{ El vector director de la recta buscada és}$$

$$\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{24}{7}, \frac{5}{7}\right) = (-24, 5), \text{ per tant, l'equació és: } \frac{x-4}{-24} = \frac{y-0}{5} \Rightarrow 5x-20 = -24y \Rightarrow 5x+24y-20=0$$

79. Troba l'equació dels següents parells de rectes paral·leles a la recta donada.

a) Paral·lela a $2x + 5y - 5 = 0$ i que passa pel punt $A(-2, 6)$.

b) Paral·lela a l'eix d'abscisses i que passa pel punt $A(-1, 4)$.

c) Paral·lela a l'eix d'ordenades i que passa pel punt $A(-1, 4)$.

d) Paral·lela a $r: \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 5+t \end{cases}$ i que passa pel punt $P(-2, 4)$.

a) La recta és de la forma $2x + 5y + k = 0$. Com que passa per A , ha de ser $-4 + 30 + k = 0 \Rightarrow k = -26$. Per tant, l'equació que es busca és $2x + 5y - 26 = 0$.

b) La recta és $y = 4$.

c) La recta és $x = -1$.

d) La recta té vector director $\vec{u} = (3, 1)$, així, l'equació és: $\frac{x+2}{3} = \frac{y-4}{1} \Rightarrow x+2 = 3y-12 \Rightarrow x-3y+14=0$.

80. Obtén l'equació de les següents rectes.

a) Perpendicular a $x - 2y - 3 = 0$ i que passa pel punt $A(2, -1)$.

b) Paral·lela a l'eix d'abscisses i que passa pel punt $A(-4, 8)$.

c) Paral·lela a l'eix d'ordenades i que passa pel punt $A(-1, 3)$.

d) Perpendicular a $r: \begin{cases} x = -1+2t \\ y = 5+t \end{cases}$ i que passa pel punt $P(-1, 0)$.

a) La recta té vector director $\vec{u} = (1, -2)$, per tant, l'equació és: $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-2} \Rightarrow -2x+4 = y+1 \Rightarrow 2x+y-3=0$.

b) La recta és vertical i passa per A , per tant, l'equació és: $x = -4$.

c) La recta és horitzontal i passa per A , per tant, l'equació és: $y = 3$.

d) La recta té vector normal $\vec{n} = (2, 1)$, per tant, l'equació és: $2(x+1) + 1(y-0) \Rightarrow 2x+y+2=0$.

81. En cada cas, calcula el valor del paràmetre k perquè les rectes tinguin la posició relativa indicada.

a) $r: x - ky + 1 = 0$; $s: kx - 4y - 3 = 0$, paral·leles.

b) $r: kx - 2y - 4k = 0$; $s: x - 3y - 4 = 0$, coincidents.

c) $r: 2kx + 5y - 1 = 0$; $s: 3x - ky + 2 = 0$, paral·leles.

a) S'ha de complir que $\frac{1}{k} = \frac{-k}{-4} \neq \frac{1}{-3} \Rightarrow k^2 = 4 \Rightarrow k = \pm 2$.

b) S'ha de complir que $\frac{k}{1} = \frac{-2}{-3} = \frac{-4k}{-4} \Rightarrow k = \frac{2}{3}$.

c) S'ha de complir que $\frac{2k}{3} = \frac{5}{-k} \neq \frac{-1}{2} \Rightarrow 2k^2 = -15 \Rightarrow$ Impossible, per tant, no poden ser paral·leles.

Feix de rectes

82. Obtén l'equació del feix de rectes secants de vèrtex el punt $P(-2, 3)$. Troba la recta d'aquest feix que té pendent $m = -\frac{1}{2}$.

L'equació del feix és $y - 3 = m(x + 2)$. Si $m = -\frac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2) \Rightarrow 2y - 6 = -x - 2 \Rightarrow x + 2y - 4 = 0$.

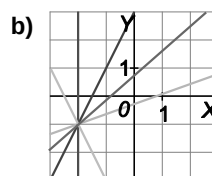
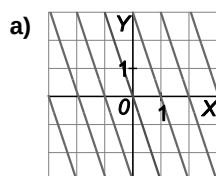
83. Determina l'equació del feix determinat per les rectes secants $r: y = 2x - 3$ i $s: y = 3x - 5$ i troba el seu vèrtex i la recta d'aquest feix que passa pel punt $P(-2, 2)$.

L'equació del feix és: $2x - y - 3 + \lambda(3x - y - 5) = 0$. Vèrtex: $\begin{cases} y = 2x - 3 \\ y = 3x - 5 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1 \Rightarrow V(2, 1)$

Si la recta passa per P , tenim que $-4 - 2 - 3 + \lambda(-6 - 2 - 5) = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{9}{13}$. Per tant, la recta que es busca és:

$$2x - y - 3 - \frac{9}{13}(3x - y - 5) = 0 \Rightarrow 26x - 13y - 39 - 27x + 9y + 45 = 0 \Rightarrow x + 4y - 6 = 0$$

84. Determina les equacions dels feixos de rectes d'aquestes figures i troba en cada cas la recta que passa pel punt $P(-1, -2)$.



a) És un feix de rectes paral·leles de pendent $m = -3$, per tant, l'equació és: $3x + y + K = 0$.

D'aquestes, la que passa per P compleix $-3 - 2 + K = 0 \Rightarrow K = 5$, per tant, l'equació és: $3x + y + 5 = 0$.

b) És un feix de rectes secants de vèrtex $V(-2, -1)$, per tant, l'equació és: $y + 1 = m(x + 2)$.

D'aquestes, la que passa per P compleix $-2 + 1 = m(-1 + 2) \Rightarrow m = -1$, per tant, l'equació és:

$$y + 1 = -(x + 2) \Rightarrow x + y + 3 = 0.$$

Distàncies i angles

85. Calcula la distància entre els punts A i B:

a) $A(2, -3)$ i $B(-2, 5)$

c) $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ i $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

b) $A\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$ i $B\left(\frac{5}{2}, -\frac{5}{3}\right)$

d) $A\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{3}\right)$ i $B\left(\frac{3}{5}, -3\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{(-2-2)^2 + (5+3)^2} = \sqrt{16+64} = \sqrt{80} = 4\sqrt{5} \text{ u}$

b) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{3}-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ u}$

c) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{10}{4}} = \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ u}$

d) $d(A, B) = \sqrt{\left(\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-3+\frac{5}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{100} + \frac{16}{9}} = \sqrt{\frac{1609}{900}} = \frac{\sqrt{1609}}{30} \text{ u}$

86. Troba la distància del punt $P(2, -3)$ al punt d'intersecció de les rectes $r: \begin{cases} x=1 \\ y=-1+\lambda \end{cases}$ i $s: 2x+y-3=0$.Punt d'intersecció A: $2-1+\lambda-3=0 \Rightarrow \lambda=2 \Rightarrow A(1, 1)$. Per tant, $d(A, P) = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} \text{ u}$

87. Troba el perímetre del romboide determinat per les rectes següents.

a) $x+4y-9=0$

b) $x-y-4=0$

c) $x+4y-6=0$

d) $x-y+6=0$

Observem que a i c són paral·leles, igual que b i d, per tant, és un paral·lelogram. Els vèrtexs són:

$$\begin{cases} x+4y-9=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow x=5, y=1 \Rightarrow A(5, 1)$$

$$\begin{cases} x+4y-6=0 \\ x-y+6=0 \end{cases} \Rightarrow x=-\frac{18}{5}, y=\frac{12}{5} \Rightarrow C\left(-\frac{18}{5}, \frac{12}{5}\right)$$

$$\begin{cases} x+4y-9=0 \\ x-y+6=0 \end{cases} \Rightarrow x=-3, y=3 \Rightarrow B(-3, 3)$$

$$\begin{cases} x+4y-6=0 \\ x-y-4=0 \end{cases} \Rightarrow x=\frac{22}{5}, y=\frac{2}{5} \Rightarrow D\left(\frac{22}{5}, \frac{2}{5}\right)$$

El perímetre és $2(d(A, B) + d(B, C)) = 2\left(\sqrt{64+4} + \sqrt{\frac{9}{25} + \frac{9}{25}}\right) = 2\left(2\sqrt{17} + \frac{3}{5}\sqrt{2}\right) \approx 18,19 \text{ u}$

88. Troba la distància del punt $P(-4, 3)$ al punt mitjà del segment d'extremes $A(1, -3)$ i $B(-1, 2)$.

El punt mitjà del segment és $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, per tant, $d(P, M) = \sqrt{16 + \frac{49}{4}} = \frac{\sqrt{113}}{2} \text{ u}$

89. Calcula la distància del punt P a la recta r en els casos següents.

a) $P(-3, 4)$ $r: 2x + 3y - 5 = 0$

b) $P(1, -2)$ $r: \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases}$

a) $d(P, r) = \frac{|2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 - 5|}{\sqrt{2^2 + 3^2}} = \frac{1}{\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{13} \text{ u}$

b) $\begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = -2 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{-2} \Rightarrow -x+1 = y+2 \Rightarrow x+y+1=0 \Rightarrow d(P, r) = \frac{|1-2+1|}{\sqrt{1^2+1^2}} = 0$

90. Comprova que els parells de rectes següents són paral·leles i calcula, en cada cas, la distància que les separa.

a) $r: 2x - y = 7$ $s: 2x - y = 8$ b) $r: 2x - 3y - 2 = 0$ $s: -\frac{2}{3}x + y - 2 = 0$

a) $\frac{2}{2} = \frac{-1}{-1} \neq \frac{-7}{-8} \Rightarrow$ Són paral·leles i $d(r, s) = \frac{|-7+8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ u}$

b) $s: -\frac{2}{3}x + y - 2 = 0 \Rightarrow 2x - 3y + 6 = 0$. $\frac{2}{2} = \frac{-3}{-3} \neq \frac{-2}{6} \Rightarrow$ Són paral·leles i $d(r, s) = \frac{|-2-6|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{8}{\sqrt{13}} = \frac{8\sqrt{13}}{13} \text{ u}$

91. Calcula les mides dels seus tres costats i classifica els triangles següents.

a) $A(3, 2)$, $B(5, -4)$ i $C(1, -2)$ b) $A(3, 5)$, $B(-1, -1)$ i $C(5, -3)$ c) $A(0, 1)$, $B(0, 2)$ i $C\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$

a) $d(A, B) = \sqrt{2^2 + (-6)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ u}$

$d(B, C) = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ u}$

$d(A, C) = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ u}$

És un triangle isòsceles.

b) $d(A, B) = \sqrt{(-4)^2 + (-6)^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} \text{ u}$

$d(B, C) = \sqrt{6^2 + (-2)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ u}$

$d(A, C) = \sqrt{2^2 + (-8)^2} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ u}$

És un triangle escalè.

c) $d(A, B) = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1 \text{ u}$

$d(B, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \text{ u}$

$d(A, C) = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 \text{ u}$

És un triangle equilàter.

92. Calcula l'angle que formen les rectes:

a) $r: 3x + y = 1$ i $s: x - y = 3$

b) $r: x - 2y - 2 = 0$ i $s: -x - y - 2 = 0$

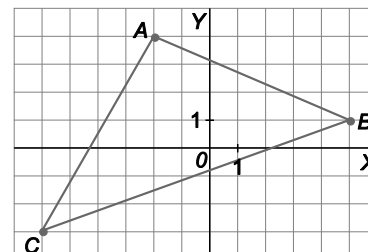
a) Els vectors normals són $\vec{n}_1 = (3, 1)$ i $\vec{n}_2 = (1, -1)$, per tant, $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2}{\sqrt{10} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63,43^\circ$

b) Els vectors normals són $\vec{n}_1 = (1, -2)$ i $\vec{n}_2 = (-1, -1)$, per tant, $\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{1}{\sqrt{5} \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 71,57^\circ$

93. Troba el perímetre del triangle format pels punts mitjans dels costats del triangle de la figura.

$A(-2, 4)$, $B(5, 1)$ i $C(-6, -3)$, de manera que els punts mitjans dels costats són

$M_1\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$, $M_2\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$ i $M_3\left(-4, \frac{1}{2}\right)$ i, per tant, el perímetre és:



$$P = d(M_1, M_2) + d(M_2, M_3) + d(M_3, M_1) = \sqrt{4 + \frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{49}{4} + \frac{9}{4}} + \sqrt{\frac{121}{4} + 4} = \frac{\sqrt{65} + \sqrt{58} + \sqrt{137}}{2} \text{ u}$$

Una altra manera de fer-ho seria:

$$P = \frac{1}{2} \text{Perímetre}(ABC) = \frac{1}{2} \left[\sqrt{7^2 + (-3)^2} + \sqrt{(-4)^2 + (-7)^2} + \sqrt{(-11)^2 + (-4)^2} \right] = \frac{1}{2} \left[\sqrt{58} + \sqrt{65} + \sqrt{137} \right]$$

94. Calcula l'àrea i el perímetre del quadrilàter que formen les rectes $r: 3x + 4y = 12$ i $s: 5x + 6y = 30$ amb els eixos coordenats.

Els vèrtexs del quadrilàter són $A(4, 0)$, $B(6, 0)$, $C(0, 5)$ i $D(0, 3)$.

El perímetre és $P = d(A, B) + d(B, C) + d(C, D) + d(D, A) = \sqrt{4 + 0} + \sqrt{36 + 25} + \sqrt{0 + 4} + \sqrt{16 + 9} = 9 + \sqrt{61} \text{ u}$.

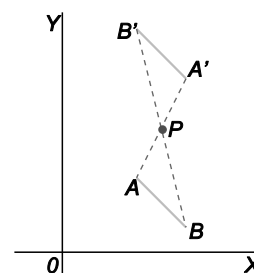
L'àrea es calcula restant les àrees dels triangles rectangles OBC i OAD : $S = 15 - 6 = 9 \text{ u}^2$.

Punts i rectes simètrics

95. Calcula les coordenades dels extrems del segment simètric del $\overline{AB}$ respecte de la simetria central de centre P essent: $A(2, 3)$, $B(4, 1)$ i $P(3, 5)$.

P ha de ser el punt mitjà de A i A' , per tant, si $A'(a_1, a_2)$, tenim:

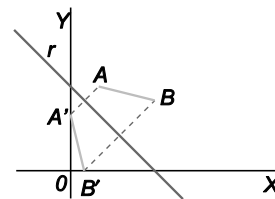
$$\begin{cases} \frac{2+a_1}{2} = 3 \Rightarrow a_1 = 4 \\ \frac{3+a_2}{2} = 5 \Rightarrow a_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow A'(4, 7)$$



Anàlogament, P ha de ser el punt mitjà de B i B' , per tant, si $B'(b_1, b_2)$, tenim:

$$\begin{cases} \frac{4+b_1}{2} = 3 \Rightarrow b_1 = 2 \\ \frac{1+b_2}{2} = 5 \Rightarrow b_2 = 9 \end{cases} \Rightarrow B'(2, 9)$$

96. Calcula les coordenades dels extrems del segment simètric del $\overline{AB}$ respecte de la simetria axial d'eix r essent $A(1, 3)$, $B\left(3, \frac{5}{2}\right)$ i $r: x + y = 3$.



La recta que passa per A i A' és perpendicular a r , per tant, és de la forma $x - y + k = 0$ i, com que passa per A , tenim $1 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = 2$, amb la qual cosa l'equació de la recta AA' és $x - y + 2 = 0$.

El punt d'intersecció d'aquesta recta i r és: $\begin{cases} x - y + 2 = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{5}{2} \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

M és el punt mitjà del segment $\overline{AA'}$, per tant, si $A'(a_1, a_2)$, tenim:

$$\begin{cases} \frac{1+a_1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = 0 \\ \frac{3+a_2}{2} = \frac{5}{2} \Rightarrow a_2 = 2 \end{cases} \Rightarrow A'(0, 2)$$

Si seguim un procés anàleg per al punt B tenim:

$$BB': x - y + k = 0 \Rightarrow 3 - \frac{5}{2} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2} \Rightarrow x - y - \frac{1}{2} = 0$$

$$\text{Punt d'intersecció: } \begin{cases} x - y - \frac{1}{2} = 0 \\ x + y = 3 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{4}, y = \frac{5}{4} \Rightarrow N\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right)$$

$$\text{Càlcul de } B'(b_1, b_2): \begin{cases} \frac{3+b_1}{2} = \frac{7}{4} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} \\ \frac{\frac{5}{2}+b_2}{2} = \frac{5}{4} \Rightarrow a_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow B'\left(\frac{1}{2}, 0\right)$$

97. Donades les rectes $r: x - 4y + 2 = 0$ i $s: 2x - 3y = -4$:

- Calcula'n el punt de tall.
- Demostra que el punt $P(1, 2)$ pertany a s i calcula'n el simètric respecte a la recta r .
- Calcula l'equació de la simètrica de la recta s respecte a la recta r .

a) El punt de tall és: $\begin{cases} x - 4y + 2 = 0 \\ 2x - 3y + 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow Q(-2, 0)$

- b) P compleix l'equació de s . En efecte: $2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + 4 = 2 - 6 + 4 = 0 \Rightarrow P \in s$.

La recta perpendicular a r que passa per P és: $4x + y + k = 0 \Rightarrow 4 + 2 + k = 0 \Rightarrow k = -6 \Rightarrow 4x + y - 6 = 0$.

Aquesta recta talla r en el punt: $\begin{cases} 4x + y - 6 = 0 \\ x - 4y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow M = \left(\frac{22}{17}, \frac{14}{17}\right)$

M és el punt mitjà de P i el seu simètric $P'(a, b)$, per tant: $\begin{cases} \frac{1+a}{2} = \frac{22}{17} \Rightarrow a = \frac{27}{17} \\ \frac{2+b}{2} = \frac{14}{17} \Rightarrow b = -\frac{6}{17} \end{cases} \Rightarrow P'\left(\frac{27}{17}, -\frac{6}{17}\right)$

- c) La recta passa per Q i P' , per tant l'equació és: $\frac{x+2}{61} = \frac{y}{-6} \Rightarrow -6x - 12 = 61y \Rightarrow 6x + 61y + 12 = 0$.

Llocs geomètrics

98. Donats els punts $A(1, 4)$, $B(-3, 0)$ i $C(3, -2)$:

- a) Determina les mediatrises dels segments $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$.
 b) Troba les coordenades del punt que equidista de A , B i C .

a) Mediatriu del segment $\overline{AB}$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 + 6x + 9 + y^2 \Rightarrow x + y - 1 = 0$$

Mediatriu del segment $\overline{AC}$:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-4)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$$

Mediatriu del segment $\overline{BC}$:

$$\sqrt{(x+3)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-3)^2 + (y+2)^2} \Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 = x^2 - 6x + 9 + y^2 + 4y + 4 \Rightarrow 3x - y - 1 = 0$$

b) El punt que equidista de A , B i C el circumcentre, s'obté com a punt d'intersecció de les mediatrises:

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2} \Rightarrow T\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

99. Troba les bisectrius de les rectes $r : 3x - 2y = -2$ i $s : \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$ i comprova que són perpendiculars.

Equació general de la recta s : $\begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{2} = y - 1 \Rightarrow x - 2y + 2 = 0$

Equacions de les bisectrius:

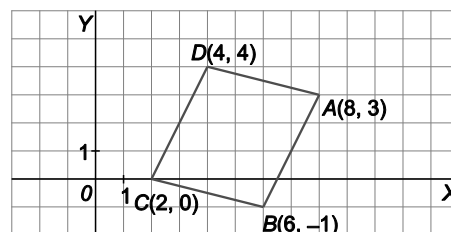
$$\frac{|3x - 2y + 2|}{\sqrt{13}} = \frac{|x - 2y + 2|}{\sqrt{5}} \Rightarrow \frac{3x - 2y + 2}{\sqrt{13}} = \pm \frac{x - 2y + 2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \begin{cases} b_1 : (3\sqrt{5} - \sqrt{13})x + (2\sqrt{13} - 2\sqrt{5})y + (2\sqrt{5} - 2\sqrt{13}) = 0 \\ b_2 : (3\sqrt{5} + \sqrt{13})x - (2\sqrt{13} + 2\sqrt{5})y + (2\sqrt{5} + 2\sqrt{13}) = 0 \end{cases}$$

Els vectors normals i, per tant, les bisectrius, són perpendiculars, ja que:

$$(3\sqrt{5} - \sqrt{13}, 2\sqrt{13} - 2\sqrt{5})(3\sqrt{5} + \sqrt{13}, -2\sqrt{13} - 2\sqrt{5}) = 45 - 13 - 52 + 20 = 0$$

Síntesi

100. Les diagonals d'un rombe són perpendiculars entre elles. Calcula les equacions de les diagonals de la figura i comprova si es tracta o no d'un rombe.



La diagonal AC té vector director $\overrightarrow{AC} = (-6, -3) \approx (2, 1)$ i passa per A , per tant, l'equació és:

$$\frac{x-8}{2} = \frac{y-3}{1} \Rightarrow x-8 = 2y-6 \Rightarrow x-2y-2 = 0$$

La diagonal BD té vector director $\overrightarrow{BD} = (-2, 5)$ i passa per B , per tant, l'equació és:

$$\frac{x-6}{-2} = \frac{y+1}{5} \Rightarrow 5x-30 = -2y-2 \Rightarrow 5x+2y-28 = 0$$

No es tracta d'un rombe, ja que les diagonals no són perpendiculars. En efecte, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 12 - 15 = -3 \neq 0$

101. Donat el quadrilàter de vèrtexs $A(1, 1)$, $B(5, 2)$, $C(3, 3)$ i $D\left(1, \frac{5}{2}\right)$:

- a) Demostra que es tracta d'un trapezi.
 b) Calcula el punt on es tallen les diagonals.
 c) Comprova que la recta que uneix els punts mitjans dels dos costats no paral·lels és paral·lela a les bases del trapezi.

a) Els costats AB i DC són paral·lels, ja que els vectors $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$ i $\overrightarrow{DC} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ són proporcionals.

Els costats AD i BC no són paral·lels, ja que els vectors $\overrightarrow{AD} = \left(0, \frac{3}{2}\right)$ i $\overrightarrow{BC} = (-2, 1)$ no són proporcionals.

Per tant, el quadrilàter és un trapezi de bases AB i DC .

b) La diagonal AC té equació: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow x-y=0$ i la BD : $\frac{x-5}{-4} = \frac{y-2}{\frac{1}{2}} \Rightarrow x+8y-21=0$.

$$\text{Punt de tall: } \begin{cases} x-y=0 \\ x+8y-21=0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{7}{3}, y = \frac{7}{3} \Rightarrow P\left(\frac{7}{3}, \frac{7}{3}\right)$$

c) $R\left(1, \frac{7}{4}\right)$ y $S\left(4, \frac{5}{2}\right)$ són els punts mitjans de AD i BC , respectivament. La recta RS és paral·lela als costats AB i DC , ja que els vectors $\overrightarrow{AB} = (4, 1)$, $\overrightarrow{DC} = \left(2, \frac{1}{2}\right)$ i $\overrightarrow{RS} = \left(3, \frac{3}{4}\right)$ són proporcionals.

102. Es considera el quadrilàter de vèrtexs: $A(-5, 0)$, $B(3, 2)$, $C(5, -8)$ i $D(-7, -6)$

- a) Calcula la mida de les dues diagonals.
 b) Comprova que els punts mitjans dels costats formen un paral·lelogram.
 c) Calcula el perímetre del paral·lelogram.
 d) Comprova que el perímetre trobat coincideix amb la suma de les dues diagonals del quadrilàter inicial.

a) $d(A,C) = \sqrt{10^2 + 8^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$ u

$d(B,D) = \sqrt{(-10)^2 + (-8)^2} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}$ u

b) Punt mitjà del costat AB : $M_1(-1, 1)$

Punt mitjà del costat BC : $M_2(4, -3)$

Punt mitjà del costat CD : $M_3(-1, -7)$

Punt mitjà del costat DA : $M_4(-6, -3)$

Com que $\overrightarrow{M_1M_4} = \overrightarrow{M_2M_3} = (-5, -4)$, $M_1M_2M_3M_4$ és un paral·lelogram.

c) El perímetre és $2d(M_1, M_2) + 2d(M_2, M_3) = 2\sqrt{5^2 + (-4)^2} + 2\sqrt{(-5)^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{41}$ u

d) La suma de les diagonals és $d(A,C) + d(B,D) = 4\sqrt{41}$, que coincideix amb el perímetre del paral·lelogram.

103. Troba el punt de la recta $r: 2x + y + 1 = 0$ que equidista dels punts $A(2, 2)$ i $B(-2, 4)$.

El punt buscat serà la intersecció de la recta r amb la mediatriu del segment AB .

La mediatriu del segment AB és: $\sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-4)^2} \Rightarrow 2x - y + 3 = 0$.

El punt d'intersecció és: $\begin{cases} 2x + y + 1 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 1 \Rightarrow P(-1, 1)$

104. Calcula els punts de la recta $r: x + y - 3 = 0$ que estan a distància 1 del punt $P(1, 1)$.

Els punts de la recta són de la forma $(t, 3-t)$; perquè estiguin a distància 1 de P s'ha de complir:

$$\sqrt{(t-1)^2 + (2-t)^2} = 1 \Rightarrow 2t^2 - 6t + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 2 \\ t = 1 \end{cases} \text{ Així s'obtenen dues solucions, } A(2, 1) \text{ i } B(1, 2).$$

105. Donat el triangle de vèrtexs: $A(1, 3)$, $B(-1, 2)$ i $C(0, -3)$

- Calcula les coordenades del baricentre.
- Troba les equacions de dues altures i les coordenades de l'ortocentre.
- Obtén les equacions de dues mediatris i les coordenades del circumcentre.
- Calcula el radi de la circumferència circumscrita al triangle.
- Comprova que el baricentre, l'ortocentre i el circumcentre estan alineats. Escribe la recta que passa per aquests punts, anomenada recta d'Euler.

a) El baricentre és $G\left(0, \frac{2}{3}\right)$

b) L'altura per A és perpendicular a $\overline{BC} = (1, -5)$, així, l'equació és: $1(x-1) - 5(y-3) \Rightarrow x - 5y + 14 = 0$.

L'altura per B és perpendicular a $\overline{AC} = (-1, -6)$, així, l'equació és: $-1(x+1) - 6(y-2) \Rightarrow x + 6y - 11 = 0$.

L'ortocentre és el punt d'intersecció d'aquestes altures: $H\left(-\frac{29}{11}, \frac{25}{11}\right)$

c) Mediatriu del costat AB : $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x+1)^2 + (y-2)^2} \Rightarrow 4x + 2y - 5 = 0$

Mediatriu del costat AC : $\sqrt{(x-1)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-0)^2 + (y+3)^2} \Rightarrow 2x + 12y - 1 = 0$

El circumcentre és el punt d'intersecció d'aquestes mediatris: $T\left(\frac{29}{22}, -\frac{3}{22}\right)$

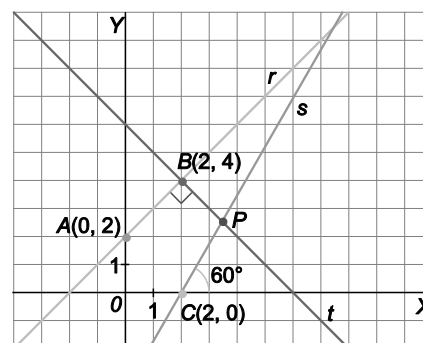
d) El radi de la circumferència circumscrita és $d(T, A) = \sqrt{\left(\frac{29}{22} - 1\right)^2 + \left(-\frac{3}{22} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{2405}{242}} \approx 3,15 \text{ u}$

e) $\overline{GH} = \left(-\frac{29}{11}, \frac{53}{33}\right)$ i $\overline{GT} = \left(\frac{29}{22}, -\frac{53}{66}\right)$ són proporcionals, per tant, el baricentre, l'ortocentre i el circumcentre estan alineats. La recta que passa per aquests punts és la recta d'Euler, d'equació:

$$\frac{x-0}{-\frac{29}{11}} = \frac{y-\frac{2}{3}}{\frac{53}{33}} \Rightarrow 53x + 87y - 58 = 0$$

106. A partir de la informació de la figura, calcula:

- Les equacions de les rectes r , s i t .
- El punt P d'intersecció entre s i t .
- El punt P' simètric de P respecte de la recta r .
- El punt C' simètric de C respecte de la recta r .
- El perímetre del quadrilàter $PCC'P'$.
- L'equació de la recta s' simètrica de s respecte a la recta r .
- L'angle que formen s i t .
- La recta paral·lela a s que passa per B .
- Les rectes que passen pel punt $D(-1, 3)$ i formen un angle de 30° amb la recta r .



a) $r: \frac{x-0}{2} = \frac{y-2}{2} \Rightarrow x-y+2=0$ $s: y-0 = \operatorname{tg} 60^\circ(x-2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$ $t: \frac{x-2}{-2} = \frac{y-4}{2} \Rightarrow x+y-6=0$

b) $\begin{cases} y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3} \\ x + y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{6+2\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(6+2\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{1-3} = 2\sqrt{3} \\ y = 6-2\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow P(2\sqrt{3}, 6-2\sqrt{3})$.

c) La perpendicular a r per P és t , que talla r a B . Per tant, B ha de ser el punt mitjà del segment $\overline{PP'}$, per la qual cosa $P'(4-2\sqrt{3}, 2+2\sqrt{3})$.

d) La perpendicular a r per C té equació $x+y-2=0$ i talla r en el punt A , amb la qual cosa A ha de ser el punt mitjà del segment $\overline{CC'}$ i, per tant, $C'(-2, 4)$.

e) $d(P, C) + d(C, C') + d(C', P') + d(P', P) = \sqrt{(2-2\sqrt{3})^2 + (-6+2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(-4)^2 + 4^2} + \sqrt{(6-2\sqrt{3})^2 + (-2+2\sqrt{3})^2} + \sqrt{(-4+4\sqrt{3})^2 + (4-4\sqrt{3})^2} = 8\sqrt{3} + 4\sqrt{6} - 8 \approx 15,65 \text{ u}$

f) La recta que es busca passa per P' i C' , per tant, l'equació és:

$$\frac{x+2}{6-2\sqrt{3}} = \frac{y-4}{-2-2\sqrt{3}} \Rightarrow (2+2\sqrt{3})x + (6-2\sqrt{3})y + (-20+12\sqrt{3}) = 0$$

g) Els vectors normals de s i t són, respectivament, $\vec{n}_1 = (\sqrt{3}, -1)$ i $\vec{n}_2 = (1, 1)$, per tant, l'angle que formen és:

$$\cos \alpha = \frac{|\sqrt{3}-1|}{2\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}-1)\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \alpha = 75^\circ$$

h) Com que el pendent de s és $m = \sqrt{3}$, la recta paral·lela a s que passa per B té equació:

$$y-4 = \sqrt{3}(x-2) \Rightarrow y = \sqrt{3}x + (4-2\sqrt{3})$$

i) La recta r té pendent 1, per tant, forma un angle de 45° amb la part positiva de l'eix d'abscisses. Les rectes que formen un angle de 30° amb la recta r han de formar, per tant, angles de 15° o de 75° amb la part positiva de l'eix d'abscisses.

Per tant, els pendents han de ser $m_1 = \operatorname{tg} 15^\circ = \frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = 2-\sqrt{3}$ i $m_2 = \operatorname{tg} 75^\circ = \frac{\operatorname{tg} 30^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ}{1 - \operatorname{tg} 30^\circ \operatorname{tg} 45^\circ} = 2+\sqrt{3}$.

D'aquesta manera, les rectes tenen equació:

$$y-3 = (2-\sqrt{3})(x+1) \Rightarrow y = (2-\sqrt{3})x + (5-\sqrt{3}) \quad y-3 = (2+\sqrt{3})(x+1) \Rightarrow y = (2+\sqrt{3})x + (5+\sqrt{3})$$

QÜESTIONS

107. Existeix algun valor de a per al qual els punts $O(0, 0)$, $A(1, 1)$ i $B(1, a)$ pertanyin a una mateixa recta?

Perquè els punts A , B i C pertanyin a una mateixa recta és necessari i suficient que els vectors $\overrightarrow{OA} = (1, 1)$ i $\overrightarrow{OB} = (1, a)$ tinguin la mateixa direcció, és a dir, siguin proporcionals. Per tant:

$$\frac{1}{1} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = 1 \Rightarrow \text{Per } a = 1, \text{ els punts } O, A \text{ i } B \text{ estan alineats, de fet, } A \text{ i } B \text{ són iguals.}$$

108. a) Indica un vector de direcció i un altre de normal a la recta que té per equació explícita: $y = mx + n$

b) Indica un vector de direcció i un altre de normal de la recta que té per equació punt-pendent: $y - y_0 = m(x - x_0)$

a) Vector de direcció $\vec{u} = (1, m)$ Vector normal $\vec{n} = (m, -1)$

b) Vector de direcció $\vec{u} = (1, m)$ Vector normal $\vec{n} = (m, -1)$

109. Indica, raonadament, si les afirmacions següents són certes o falses.

a) Si la distància d'un punt a una recta és zero, aleshores, obligatòriament, el punt està contingut en la recta.

b) Si l'equació general d'una recta no té terme independent, aleshores l'origen de coordenades pertany a la recta.

c) L'expressió $Ax + By + C = 0$ representa sempre una recta independentment dels valors reals de A , B i C .

a) Certa, si la recta és $r: Ax + By + C = 0$ i el punt és $P(a, b)$, en ser $d(P, r) = 0$, es compleix que $|Aa + Bb + C| = 0 \Rightarrow Aa + Bb + C = 0$, la qual cosa significa que P compleix l'equació de r ; és a dir, P pertany a la recta.

b) Certa, si la recta és $r: Ax + By = 0$, clarament l'origen de coordenades $O(0, 0)$ compleix l'equació de r , és a dir, pertany a r .

c) Falsa. Si $A = B = 0$ l'expressió no representa cap recta.

PROBLEMES

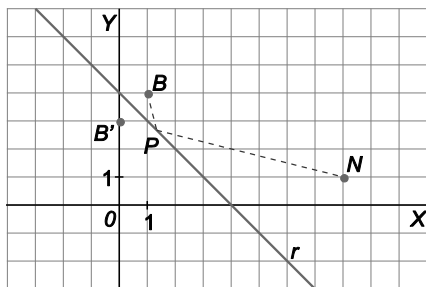
110. Al paral·lelogram de vèrtexs $ABCD$, es coneixen les coordenades dels punts $A(0, 3)$, $B(1, 0)$ i $C(6, 1)$. Calcula la mida de les seves diagonals i l'angle que formen.

$$\text{Si } D(a, b) \text{ tenim: } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1, -3) = (6 - a, 1 - b) \Rightarrow a = 5, b = 4 \Rightarrow D(5, 4)$$

$$\text{Les diagonals mesuren: } d(A, C) = \sqrt{36 + 4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ u i } d(B, D) = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} \text{ u}$$

$$\text{L'angle que formen és: } \cos \alpha = \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}) = \frac{|24 - 8|}{2\sqrt{10}4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \alpha = 63,43^\circ$$

111. Construeix el camí que ha de seguir la bola $B(1, 4)$ per arribar al punt $N(8, 1)$ després de xocar a la banda r : $x + y - 4 = 0$.



El simètric de B respecte de r és $B'(0, 3)$.

El punt de xoc M és el punt d'intersecció de les rectes $B'N$ i r :

$$B'N: \frac{x}{8} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow -x = 4y - 12 \Rightarrow x + 4y - 12 = 0$$

$$\begin{cases} x + 4y - 12 = 0 \\ x + y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{3}, y = \frac{8}{3} \Rightarrow P\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right).$$

Camí: $\overline{BP} - \overline{PN}$

112. Calcula les rectes que passen pel punt $P(1, 2)$ i que determinen amb els eixos coordenats un triangle d'àrea $4,5 \text{ u}^2$.

Les rectes que passen per P són de la forma $y - 2 = m(x - 1) \Rightarrow y = mx + 2 - m$. Tallen els eixos en els punts

$$(0, 2 - m) \text{ i } \left(\frac{m - 2}{m}, 0\right).$$

Tenim:

$$\frac{(2 - m) \cdot \frac{m - 2}{m}}{2} = \frac{9}{2} \Rightarrow -m^2 + 4m - 4 = 9m \Rightarrow m^2 + 5m + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = -4 \Rightarrow y = -4x + 6 \\ m = -1 \Rightarrow y = -x + 3 \end{cases}$$

Així doncs, hi ha dues solucions.

113. Calcula el valor de k perquè l'àrea del triangle de vèrtexs $A(4, 3)$, $B(6, -3)$ i $C(6, k)$ sigui 20 u^2 .

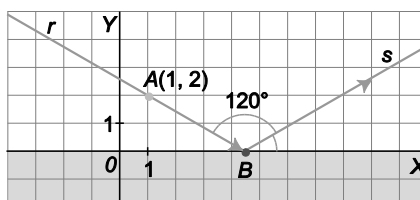
La recta que passa per A i per B té d'equació: $\frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 3}{3} \Rightarrow 3x - 12 = -y + 3 \Rightarrow 3x + y - 15 = 0$.

L'altura per C mesura $h = d(C, AB) = \frac{|18 + k - 15|}{\sqrt{10}} = \frac{|3 + k|}{\sqrt{10}}$ u i la base mesura $d(A, B) = \sqrt{4 + 36} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$ u,

$$\text{per tant, tenim: } S = \pm \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{10} \cdot \frac{3 + k}{\sqrt{10}} = \pm(3 + k) = 20 \Rightarrow \begin{cases} 3 + k = 20 \Rightarrow k = 17 \\ -3 - k = 20 \Rightarrow k = -23 \end{cases}$$

114. Un raig de llum r , que passa pel punt $A(1, 2)$, incideix sobre l'eix d'abscisses i es reflecteix formant amb l'eix un angle de 30° .

Troba les equacions dels raigs incident i reflectit.



El raig incident passa per A i forma amb l'eix d'abscisses un angle de 150° , per tant el pendent és

$$m = \operatorname{tg} 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ i l'equació és de la forma } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + n.$$

Com que ha de passar per A , tenim: $2 = -\frac{\sqrt{3}}{3} + n \Rightarrow n = \frac{6 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x + \frac{6 + \sqrt{3}}{3}$

Per calcular l'equació del raig reflectit observem que el raig incident talla l'eix d'abscisses a $B(1 + 2\sqrt{3}, 0)$, per tant, el raig reflectit passa per B i forma amb l'eix d'abscisses un angle de 30° , amb la qual cosa el seu pendent és

$$m = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ i l'equació és de la forma } y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + n.$$

Com que ha de passar per B , tenim: $0 = \frac{\sqrt{3}}{3}(1 + 2\sqrt{3}) + n \Rightarrow n = -\frac{6 + \sqrt{3}}{3} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{6 + \sqrt{3}}{3}$

115. Els vèrtexs oposats d'un quadrat són els punts $A(0, 3)$ i $C(4, 0)$.

a) Quines són les coordenades dels altres dos vèrtexs?

b) Quina és l'àrea del quadrat?

a) La diagonal del quadrat es troba sobre la recta AC : $3x + 4y - 12 = 0$.

La diagonal mesura $d(A, C) = \sqrt{25} = 5$ u i el seu punt mitjà és $M\left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Sigui $P(a, b)$ un dels vèrtexs, MP és perpendicular a AC , per tant, és de la forma $(3\lambda, 4\lambda)$.

A més, $d(M, P) = \frac{5}{2} \Rightarrow \sqrt{(3\lambda)^2 + (4\lambda)^2} = \frac{5}{2} \Rightarrow 5|\lambda| = \frac{5}{2} \Rightarrow \lambda = \pm \frac{1}{2}$

Obtenim així els dos vèrtexs que falten:

$$\overline{MP} = \left(a - 2, b - \frac{3}{2}\right) = (3\lambda, 4\lambda) \Rightarrow \begin{cases} \lambda = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{7}{2}, b = \frac{7}{2} \Rightarrow B\left(\frac{7}{2}, \frac{7}{2}\right) \\ \lambda = -\frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{2} \Rightarrow D\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

b) Aplicant el teorema de Pitàgores es calcula la longitud del costat del quadrat: $2l^2 = 5^2 \Rightarrow l = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ u.

Per tant, l'àrea del quadrat és $S = l^2 = \frac{25}{2}$ u²

116. Determina les equacions dels costats d'un triangle que compleixi aquestes condicions:

I. Té un vèrtex a $A(2, -7)$.

II. La recta $3x + y + 11 = 0$ és l'altura relativa al vèrtex B .

III. La recta $x + 2y + 7 = 0$ és la mitjana corresponent al vèrtex C .

La recta AC és perpendicular a $3x + y + 11 = 0$, per tant, és de la forma $x - 3y + k = 0$.

Com que passa per A , ha de ser $k = -23$ i, per tant, AC : $x - 3y - 23 = 0$.

Per conèixer C n'hi ha prou amb calcular el punt d'intersecció de $x - 3y - 23 = 0$ i l'altura $x + 2y + 7 = 0$. Així s'obté:

$$\begin{cases} x - 3y - 23 = 0 \\ x + 2y + 7 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 5, y = -6 \Rightarrow C(5, -6)$$

El vèrtex $B(a, b)$ pertany a l'altura $3x + y + 11 = 0$, per la qual cosa s'ha de complir $3a + b + 11 = 0$.

D'altra banda, el punt mitjà del costat AB , $M\left(\frac{a+2}{2}, \frac{b-7}{2}\right)$, pertany a la mitjana $x + 2y + 7 = 0$, per la qual cosa es complirà l'equació $\frac{a+2}{2} + 2 \cdot \frac{b-7}{2} + 7 = 0 \Rightarrow a + 2b + 2 = 0$.

Resolem el sistema format per les dues equacions obtingudes per a i b , i trobem les coordenades del punt B :

$$\begin{cases} 3a + b + 11 = 0 \\ a + 2b + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -4, b = 1 \Rightarrow B(-4, 1)$$

Les equacions dels altres dos costats ara es calculen de forma immediata, i s'obté:

$$AB: 4x + 3y + 13 = 0 \text{ i } BC: 7x + 9y + 19 = 0.$$

PER APROFUNDIR

117. Donades les rectes $r: x - y = 0$ i $s: x + y - 7 = 0$ i el segment d'extrems

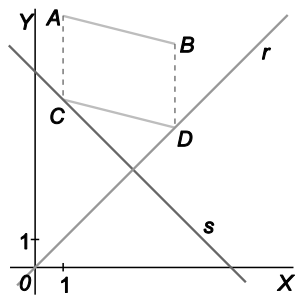
$A(1, 9)$ i $B(5, 8)$, calcula les coordenades dels extrems d'un segment $\overline{CD}$ de la mateixa longitud que $\overline{AB}$, paral·lel a aquest i de tal manera que el punt C pertanyi a la recta s i el punt D a la r .

Els punts de r són de la forma $D(d, d)$ i els punts de s són de la forma $C(c, 7-c)$.

Els vectors $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ poden ser iguals o oposats, per tant:

$$\begin{cases} d - c = 4 \\ d - 7 + c = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - c = 4 \\ d + c = 6 \end{cases} \Rightarrow c = 1, d = 5 \Rightarrow C(1, 6) \text{ i } D(5, 5)$$

$$\begin{cases} d - c = -4 \\ d - 7 + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d - c = -4 \\ d + c = 8 \end{cases} \Rightarrow c = 6, d = 2 \Rightarrow C(6, 1) \text{ i } D(2, 2)$$



118. Donat el triangle $A(2, 1)$, $B(1, -2)$ i $C(-1, 3)$

a) Calcula el punt P , intersecció de la bisectriu de l'angle C amb el costat oposat $\overline{AB}$.

b) Demostra que $\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB}$.

$$a) \quad AB: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-1}{-3} \Rightarrow 3x - y - 5 = 0 \quad AC: \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} \Rightarrow 2x + 3y - 7 = 0$$

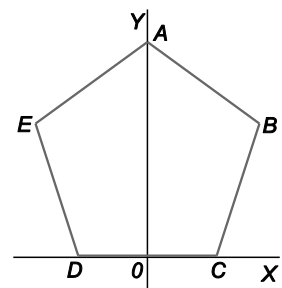
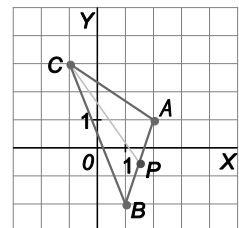
$$BC: \frac{x+1}{-2} = \frac{y-3}{5} \Rightarrow 5x + 2y - 1 = 0$$

Bisectriu interior de l'angle C :

$$\frac{2x + 3y - 7}{\sqrt{13}} = -\frac{5x + 2y - 1}{\sqrt{29}} \Rightarrow (2\sqrt{29} + 5\sqrt{13})x + (3\sqrt{29} + 2\sqrt{13})y - 7\sqrt{29} - \sqrt{13} = 0$$

Resolem el sistema format per les rectes bisectriu i AB i obtenim el punt: $P\left(\frac{45 - \sqrt{377}}{16}, \frac{55 - 3\sqrt{377}}{16}\right)$

b) En efecte, quan es fa el càlcul s'obté $\frac{PA}{PB} = \frac{CA}{CB} = \frac{\sqrt{377}}{29}$.



119. Calcula, de forma exacta, les coordenades dels vèrtexs del pentàgon regular de la figura sabent que el seu costat mesura 2 unitats.

Comprova que el quocient entre la distància de D a B i la distància de D a C és el nombre auri $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

L'angle interior d'un pentàgon regular val $\frac{3 \cdot 180^\circ}{5} = 108^\circ$.

$C(1, 0)$, $D(-1, 0)$

Pel teorema del cosinus: $DB = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \cos 108^\circ} = \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ}$

Tenint en compte que les longituds de DA i DB són iguals, tenim: $A(0, \sqrt{DA^2 - 1^2}) = (0, \sqrt{7 + 8 \cos 72^\circ})$

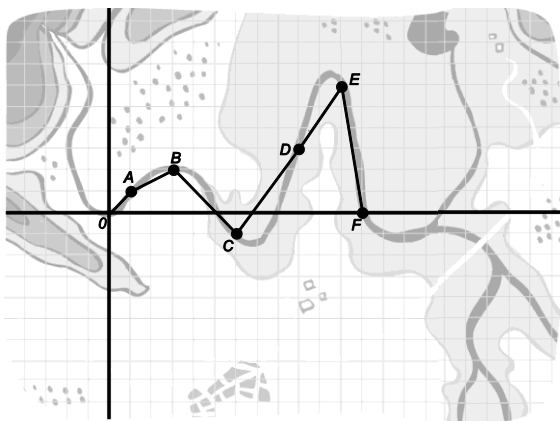
$B(-1 + \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ, \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \sin 36^\circ)$ $E(1 - \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \cos 36^\circ, \sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ} \cdot \sin 36^\circ)$

$$\frac{DB}{DC} = \frac{\sqrt{8 + 8 \cos 72^\circ}}{2} = \sqrt{2 + 2 \cos 72^\circ} = 1,618033989... = \Phi$$

ENTORN MATEMÀTIC

Donant voltes al riu

D'aquí a uns quants dies, la classe de l'Antoni i la Joana anirà d'excursió al camp. Aprofitant aquesta ocasió i amb la intenció de fer la classe de matemàtiques més animada, la professora proposa fer un concurs per equips: qui pot donar la millor aproximació a la longitud que separa els dos punts O i F per la llera d'un riu?



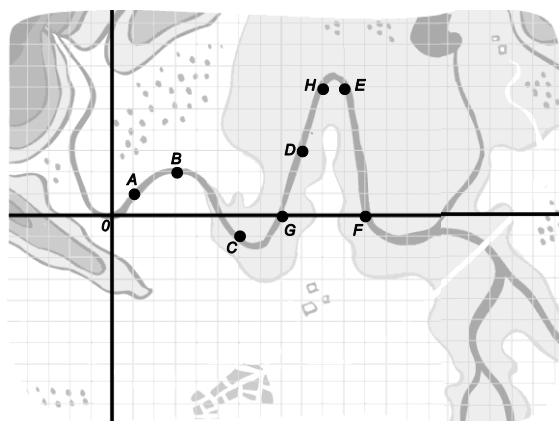
Per aconseguir-ho, proporciona un esbós del riu de la zona d'acampada, calcat d'un plànol a escala obtingut en una pàgina de mapes d'Internet. Per facilitar la tasca, hi afegeix un parell d'eixos coordenats de manera que l'origen de coordenades és el punt O . La quadrícula està formada per quadrats de 20 m de costat.

Ben de pressa i amb la intenció de demostrar que són els més ràpids a l'hora de resoldre problemes i, per tant, mereixen guanyar el concurs, l'equip de l'Antoni inventa aquest mètode:

Triarà cinc punts de la llera que juntament amb O i F formaran una línia poligonal $OA-AB-BC-CD-DE-EF$. La longitud d'aquesta poligonal s'aproximarà a la longitud de la llera del riu.

Després d'exposar la seva idea a la classe, la professora confirma que el mètode sembla adequat, però indica que creu que l'aproximació, potser per culpa de la rapidesa amb què s'ha fet, no és gaire bona i s'hauria de millorar..

Basant-se en la mateixa idea, l'equip de la Joana, després de pensar-hi una mica més, proposa col·locar dos punts més G i H de manera que la nova poligonal s'ajusti millor a la línia de la llera.



- Calcula l'aproximació que obté l'equip de l'Antoni.
- Calcula l'aproximació que obté l'equip de la Joana.
- Afegeix-hi algun punt més i obtén una altra aproximació.

- $O(0, 0)$, $A(1, 1)$, $B(3, 2)$, $C(6, -1)$, $D(9, 3)$, $E(11, 6)$ i $F(12, 0)$

La poligonal mesura $\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{18} + \sqrt{25} + \sqrt{13} + \sqrt{37} \approx 22,58$ u, per tant, l'equip de l'Antoni obté 451,6 m.

- Si s'hi afegeixen els punts $G(8, 0)$ i $H(10, 6)$ la poligonal mesura

$\sqrt{2} + \sqrt{5} + \sqrt{18} + \sqrt{5} + \sqrt{10} + \sqrt{10} + \sqrt{1} + \sqrt{37} \approx 23,54$ u, per la qual cosa l'equip de la Joana obté 470,8 m.

- Si s'hi afegeixen, per exemple, $I(4, 5)$ i $J(7, 5)$ s'obté com a aproximació $20 \cdot 23,98 = 479,6$ m.

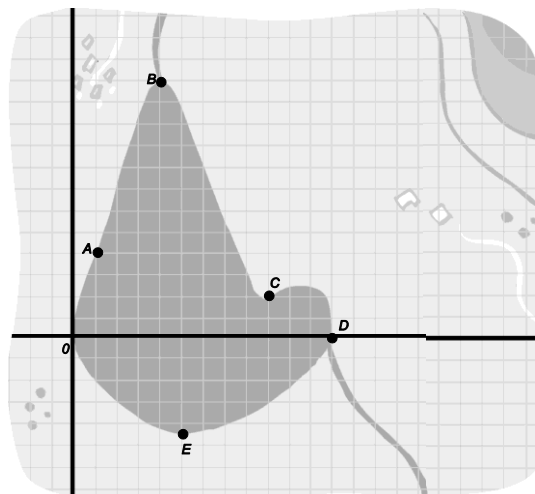
Piragües a la llacuna?

A la zona on acamparan, el riu desemboca en una llacuna i els professors de l'escola estan pensant si llogar unes piragües o no per practicar piragüisme. Com que l'activitat, a més de ser cara, suposa riscos (no només el d'algun alumne en remull), només ho faran si la llacuna és prou gran perquè l'experiència valgui la pena i no ho faran si només és una bassa on poder fer un parell de palades.

La professora proposa un altre repte als equips: calcular aproximacions de la superfície de la llacuna.

Un altre cop proporciona a tots dos equips un esquema amb els límits de la superfície que es vol calcular. Els quadrats de la quadrícula en aquest cas tenen 4 m per costat.

En aquest cas, és més ràpid l'equip de la Joana, que proposa considerar els punts O , A , B , C , D i E del perímetre del llac i calcular l'àrea del polígon format per aquests punts mitjançant triangulació.



- a) Calcula l'àrea dels triangles ABC , OAC , OCD i ODE de la figura utilitzant els mètodes de la geometria analítica.
- b) Utilitza alguna aplicació de geometria dinàmica per obtenir l'àrea dels triangles anteriors i afegeix-hi alguns punts més per millorar l'aproximació.

- a) $O(0, 0)$, $A(1, 4)$, $B(4, 12)$, $C(9, 2)$, $D(12, 0)$ i $E(5; -4,5)$

$$ABC: \begin{cases} \text{base: } d(A,C) = \sqrt{64+3} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17} \text{ u} \\ \text{AC: } x+4y-17=0 \\ \text{altura: } h = d(B,AC) = \frac{|4+4\cdot 12-17|}{\sqrt{17}} = \frac{35}{\sqrt{17}} = \frac{35\sqrt{17}}{17} \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_1 = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot \frac{35\sqrt{17}}{17} = 35 \text{ u}^2$$

$$OAC: \begin{cases} \text{base: } d(O,A) = \sqrt{17} \text{ u} \\ \text{OA: } 4x-y=0 \\ \text{altura: } h = d(C,OA) = \frac{|36-2|}{\sqrt{17}} = \frac{34}{\sqrt{17}} = 2\sqrt{17} \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_2 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{17} \cdot 2 = 17 \text{ u}^2$$

$$OCD: \begin{cases} \text{base: } d(O,D) = 12 \text{ u} \\ \text{altura: } h = 2 \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_3 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 2 = 12 \text{ u}^2 \quad \triangle ODE: \begin{cases} \text{base: } d(O,D) = 12 \text{ u} \\ \text{altura: } h = 4,5 \text{ u} \end{cases} \Rightarrow S_4 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 4,5 = 27 \text{ u}^2$$

L'equip de la Joana obté $S \approx S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 35 + 17 + 12 + 27 = 91 \text{ u}^2 \Rightarrow 91 \cdot 4^2 = 1456 \text{ m}^2$

- b) La superfície s'aproxima a $103 \text{ u}^2 \Rightarrow 103 \cdot 16 = 1648 \text{ m}^2$

AUTOAVALUACIÓ

Comprova el que has après

1. Calcula en cada cas l'equació de la recta.

- a) Paral·lela a la recta $s: 2x + 3y = 5$ i que passa per $P(0, -3)$.
- b) Perpendicular a la recta $s: 4x - 3y + 5 = 0$ i que passa pel punt $P(1, 1)$.
- c) De direcció la del vector $\overrightarrow{AB}$ amb $A(2, 4)$ i $B(-1, 3)$ i que passa pel punt d'intersecció de les rectes $5x + y - 20 = 0$ i $y = x + 2$.

- a) Les rectes paral·leles a s són de la forma $2x + 3y + K = 0$, la que passa per P és:

$$-9 + K = 0 \Rightarrow K = 9 \Rightarrow 2x + 3y + 9 = 0$$

- b) Les rectes perpendiculars a s són de la forma $3x + 4y + K = 0$, la que passa per P és:

$$3 + 4 + K = 0 \Rightarrow K = -7 \Rightarrow 3x + 4y - 7 = 0$$

- c) Calculem el punt d'intersecció:

$$\begin{cases} 5x + y - 20 = 0 \\ y = x + 2 \end{cases} \Rightarrow x = 3, y = 5 \Rightarrow P(3, 5)$$

Com que $\overrightarrow{AB} = (-3, -1)$, la recta buscada té equació: $\frac{x-3}{-3} = \frac{y-5}{-1} \Rightarrow x - 3y + 12 = 0$

2. Calcula el pendent i l'ordenada a l'origen de les rectes r , s i t que apareixen a la figura. Indica un vector de direcció de cadascuna d'aquestes.

La recta r passa pels punts $(3, 0)$ i $(1, 7)$, per tant, un vector director és

$\overrightarrow{u}_r = (-2, 7)$, la seva equació és $r: 7x + 2y - 21 = 0$, el seu pendent és $m_r = -\frac{7}{2}$

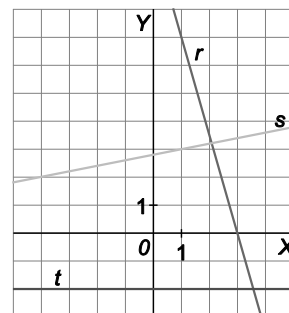
i l'ordenada a l'origen és $n_r = \frac{21}{2}$.

La recta s passa pels punts $(1, 3)$ i $(-4, 2)$, per tant, un vector director és

$\overrightarrow{u}_s = (5, 1)$, la seva equació és $s: x - 5y + 14 = 0$, el seu pendent és $m_s = \frac{1}{5}$ i

l'ordenada a l'origen és $n_s = \frac{14}{5}$.

La recta t és la recta horitzontal $t: y = -2$, amb vector director $\overrightarrow{u}_t = (1, 0)$, pendent $m_t = 0$ i ordenada a l'origen $n_t = -2$.

3. Calcula l'equació de la recta paral·lela a $x + y = 0$ i que forma amb els eixos coordenats un triangle de 30 u^2 . Hi ha una única solució?

La recta ha de tenir com a equació $x + y = k$, per la qual cosa talla els eixos en els punts $A(k, 0)$ i $B(0, k)$.

L'àrea del triangle OAB serà $S = \frac{k^2}{2} = 30 \Rightarrow k^2 = 60 \Rightarrow k = \pm\sqrt{60} = \pm 2\sqrt{15}$

Per tant, hi ha dues solucions: $\begin{cases} x + y = \sqrt{60} \\ x + y = -\sqrt{60} \end{cases}$

4. Indica el pendent de totes les rectes paral·leles a la recta que passa pels punts $P(1, 2)$ i $Q(-1, -7)$.

Les rectes tenen vector director $\vec{u} = \overrightarrow{PQ} = (-2, -9)$, per tant, tenen pendent $m = \frac{9}{2}$.

5. Troba per quin valor de b , la recta $x - by = -4b - 1$ és coincident amb la recta que passa pels punts $P(-1, 4)$ i $Q(2, 3)$.

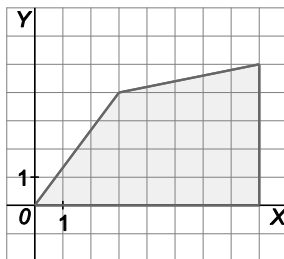
La recta donada ha de passar per P i Q , per tant $\begin{cases} -1 - 4b = -4b - 1 \\ 2 - 3b = -4b - 1 \end{cases} \Rightarrow b = -3$, així, la recta és $x + 3y - 11 = 0$.

6. Calcula el punt simètric de $P(5, -2)$ respecte del punt d'intersecció de les rectes $\begin{cases} 2x + y = 5 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$.

El punt d'intersecció de les rectes és $Q(2, 1)$, per tant, si $P'(a, b)$ és el simètric de P , tenim que Q ha de ser el punt

mitjà de PP' , amb la qual cosa: $\begin{cases} \frac{5+a}{2} = 2 \\ \frac{-2+b}{2} = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 4 \Rightarrow P' = (-1, 4)$

7. Calcula l'àrea del quadrilàter de la figura.



Els vèrtexs del quadrilàter són $O(0, 0)$, $A(3, 4)$, $B(8, 5)$ i $C(8, 0)$.

$$\text{Àrea del triangle } OAC: S_1 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{d(A, C) \cdot d(A, OC)}{2} = \frac{8 \cdot 4}{2} = 16 \text{ u}^2$$

$$\text{Àrea del triangle } ACB: S_2 = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{d(B, C) \cdot d(A, BC)}{2} = \frac{5 \cdot 5}{2} = \frac{25}{2} \text{ u}^2$$

$$\text{Àrea del quadrilàter: } S = S_1 + S_2 = \frac{57}{2} \text{ u}^2$$

8. Calcula les coordenades dels vèrtexs i el perímetre del triangle determinat per les rectes:

$$r: x - 3y + 1 = 0$$

$$s: 3x - 2y - 4 = 0$$

$$t: 2x + y + 2 = 0$$

Els vèrtexs del triangle són:

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 3x - 2y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2, y = 1 \Rightarrow A(2, 1)$$

$$\begin{cases} x - 3y + 1 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -1, y = 0 \Rightarrow B(-1, 0)$$

$$\begin{cases} 3x - 2y - 4 = 0 \\ 2x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 0, y = -2 \Rightarrow C(0, -2)$$

$$\text{Per tant, el perímetre és } P = d(A, B) + d(B, C) + d(C, A) = \sqrt{9+1} + \sqrt{1+4} + \sqrt{4+9} = \sqrt{10} + \sqrt{5} + \sqrt{13} \text{ u}$$

RELACIONA I CONTESTA

Tria l'única resposta correcta en cada cas

1. Les rectes $r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases}$ i $s: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases}$:

A. Són paral·leles.

C. Són secants i es tallen al punt $R(1, 1)$.B. Són secants i es tallen al punt $Q(2, 3)$.

D. Són la mateixa recta.

$$r: \begin{cases} x = 2 - \lambda \\ y = 3 - 2\lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-1} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow 2x - y - 1 = 0 \quad s: \begin{cases} x = 1 + \frac{1}{2}\lambda \\ y = 1 + \lambda \end{cases} \Rightarrow \frac{x-1}{\frac{1}{2}} = \frac{y-1}{1} \Rightarrow 2x - y - 1 = 0$$

La resposta correcta és la D.

2. La distància del punt $(0, -1)$ a la recta $x - y = 1$ és:

A. 2 u

B. $2\sqrt{2}$ uC. $\sqrt{2}$ u

D. Cap de les anteriors.

Es pot observar que el punt donat forma part de la recta. Per tant, la distància del punt a la recta és nul·la. La resposta correcta és la D.

3. L'àrea del triangle determinat per l'origen de coordenades i les interseccions de la recta $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ amb els eixos coordenats és:

A. $A = ab$ B. $A = \frac{ab}{2}$ C. $A = 2ab$ D. $A = \frac{a}{2} \cdot \frac{b}{2}$

Els punts d'intersecció són $(a, 0)$ i $(0, b)$, per tant, l'àrea del triangle és $A = \frac{ab}{2}$, la resposta B.

Assenyala, en cada cas, les respostes correctes

4. Es consideren els punts del pla $A(a, 1)$, $B(a-1, 4)$ i $C(-1, a)$.A. Per a $a = -2$ els punts estan alineats.B. Per a $a = \frac{1}{2}$, ABC és un triangle rectangle a A .C. Per a $a = 2$, ABC és un triangle isòsceles.D. Per a $a = -2$, B és el punt mitjà del segment AC .

S'observa que $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$, $\overrightarrow{AC} = (-1-a, a-1)$, $\overrightarrow{BC} = (-a, a-4)$ i el punt mitjà de AC és $\left(\frac{a-1}{2}, \frac{1+a}{2}\right)$.

Si $a = -2$ tenim que $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ i $\overrightarrow{AC} = (1, -3)$ són proporcionals, per la qual cosa la resposta A és correcta, però el punt mitjà de AC , $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ no coincideix amb B , per la qual cosa la resposta D és incorrecta.

Si $a = \frac{1}{2}$ tenim que $\overrightarrow{AB} = (-1, 3)$ i $\overrightarrow{AC} = \left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ són perpendiculars, per la qual cosa la resposta B és correcta.

Si $a = 2$ tenim que $\overline{AB} = (-1, 3)$ i $\overline{AC} = (-3, -1)$ tenen la mateixa longitud, però és diferent que la longitud de $\overline{BC} = (-2, -2)$, per la qual cosa la resposta C també és correcta.

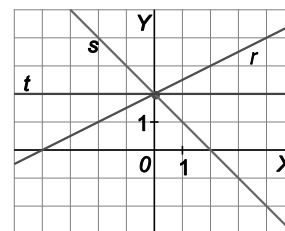
5. Per a r, s i t , siguin m_r, m_s i m_t els pendents i n_r, n_s i n_t les ordenades a l'origen.

A. $m_r = 2, m_s = -2$ y $m_t = 0$

C. $m_t = 1$ y $n_t = 2$

B. $m_r = \frac{1}{2}, m_s = -1$ y $m_t = 0$

D. $m_r = \frac{1}{2}$ y $n_r = 2$



$m_r = \frac{1}{2}, m_s = -1, m_t = 0$ y $n_r = n_s = n_t = 2$, per tant, les respostes correctes són B i D.

Tria la relació correcta entre les dues afirmacions donades

6. Es considera el feix de rectes $2x - y + \lambda(x + y - 3) = 0$ de vèrtex el punt $(1, 2)$ i es consideren les afirmacions:

1. L'equació de la recta r s'obté en substituir algun valor real de λ a l'expressió del feix.

2. La recta r passa pel punt $(1, 2)$.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

C. $2 \Rightarrow 1$ però $1 \not\Rightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ però $2 \not\Rightarrow 1$

D. Cap de les anteriors.

L'equació del feix representa totes les rectes que passen per $(1, 2)$ excepte la recta $x + y - 3 = 0$, per tant, la relació correcta és la B.

Assenyala la dada necessària per respondre

7. Per calcular l'equació d'una única recta s paral·lela a la recta r i que disti d'aquesta k u es donen les dades següents:

1. L'equació general de r és $3x - 4y + 3 = 0$.

2. $k = 3$ u

3. L'ordenada a l'origen de r és més gran que la de s .

A. La dada 1 és innecessària.

C. La dada 2 és innecessària.

B. La dada 2 és innecessària.

D. Cap dada no és innecessària.

Òbviament necessitem les dades 1 i 2, però amb aquestes dades només podem trobar dues rectes paral·leles a r que distin d'aquesta k u, una a cada costat de r . Perquè hi hagi una única solució també necessitem la dada 3, per tant, la resposta correcta és la D.