

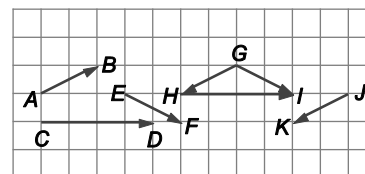
4. Vectors en el pla

EXERCICIS PROPOSATS

1. Exercici resolt.

2. a) Indica tres parelles de vectors equipol·lents.

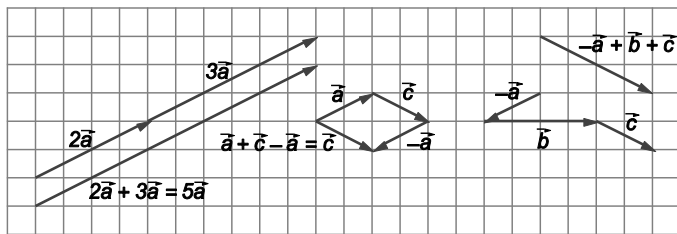
b) Representa: $-2\overrightarrow{JK} + 3\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{JK}$ i $\overrightarrow{JK} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GI}$



a) Són equipol·lents les parelles: $\overrightarrow{EF}$ i $\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{GH}$ i $\overrightarrow{JK}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{HI}$

b) Siguin $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ els vectors lliures els representants dels quals són $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{CD}$ i $\overrightarrow{EF}$ respectivament. Tenim

$$-2\overrightarrow{JK} + 3\overrightarrow{AB} = 2\vec{a} + 3\vec{a} = 5\vec{a}, \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{JK} = \vec{a} + \vec{c} - \vec{a} = \vec{c} \quad \text{i} \quad \overrightarrow{JK} - \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{GI} = -\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$$

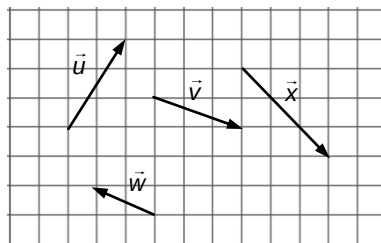


3. Fes les operacions indicades:

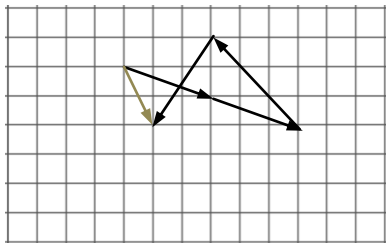
a) $2\vec{v} - \vec{x} - \vec{u}$

b) $-3\vec{w} - 2\vec{v} + \vec{x}$

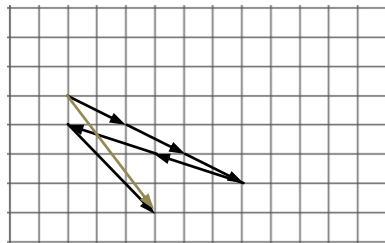
c) $2\vec{u} + \vec{v} + \vec{x} + 2\vec{w}$



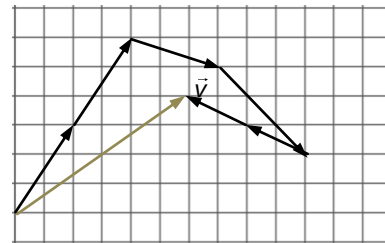
a)



b)



c)



4. Exercici resolt.

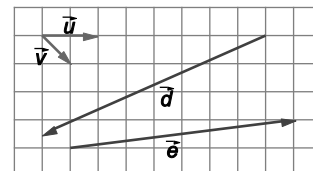
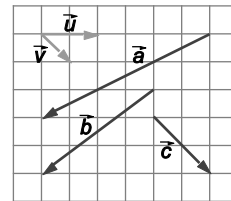
5. a) Troba les coordenades de $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ respecte de la base $B = \{\vec{u}, \vec{v}\}$.

b) Representa i calcula les coordenades dels vectors $\vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b}$ i $\vec{e} = \vec{c} - \vec{a}$.

$$\text{a) } \vec{a} = -\frac{9}{2}\vec{u} + 3\vec{v} \quad \vec{b} = -\frac{7}{2}\vec{u} + 3\vec{v} \quad \vec{c} = 2\vec{v}$$

$$\text{b) } \vec{d} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{b} = \frac{1}{2}\left(-\frac{9}{2}\vec{u} + 3\vec{v}\right) + \left(-\frac{7}{2}\vec{u} + 3\vec{v}\right) = -\frac{23}{4}\vec{u} + \frac{7}{2}\vec{v} = \left(-\frac{23}{4}, \frac{7}{2}\right)$$

$$\vec{e} = \vec{c} - \vec{a} = 2\vec{v} - \left(-\frac{9}{2}\vec{u} + 3\vec{v}\right) = \frac{9}{2}\vec{u} - \vec{v} = \left(\frac{9}{2}, -1\right)$$



6. Comprova que els vectors $\vec{u} = (2, -3)$ i $\vec{v} = (3, 6)$ formen una base de V^2 .

$$\frac{2}{3} \neq \frac{-3}{6} \Rightarrow \vec{u} \text{ i } \vec{v} \text{ són linealment independents i, per tant, formen una base de } V^2.$$

7. Determina el mòdul i l'argument d'aquests vectors:

$$\text{a) } \vec{u} = (3, 7) \quad \text{b) } \vec{v} = (6, 5)$$

$$\text{a) Mòdul: } |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{58} \approx 7,62$$

$$\text{Argument: } \alpha = \arctg \frac{7}{3} \approx 66,80^\circ \approx 66^\circ 48' 5''$$

$$\text{b) Mòdul: } |\vec{v}| = \sqrt{6^2 + 5^2} = \sqrt{61} \approx 7,81$$

$$\text{Argument: } \alpha = \arctg \frac{5}{6} \approx 39,81^\circ \approx 39^\circ 48' 20''$$

8 a 11. Exercicis resolta.

12. Troba el punt mitjà del segment comprès entre els punts $A(7, 12)$ i $B(33, -10)$.

$$M\left(\frac{7+33}{2}, \frac{12-10}{2}\right) = M(20, 1)$$

13. Comprova si els punts P , Q i R estan alineats o formen triangle en els casos següents:

$$\text{a) } P(0, 3), Q(1, 1) \text{ i } R(2, -1) \quad \text{b) } P(-3, 0), Q(2, 1) \text{ i } R(6, 2) \quad \text{c) } P(-1, 0), Q\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) \text{ i } R\left(0, \frac{3}{2}\right)$$

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (1, 1) - (0, 3) = (1, -2) \\ \overrightarrow{PR} = (2, -1) - (0, 3) = (2, -4) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{-2}{-4} \Rightarrow P, Q \text{ i } R \text{ estan alineats}$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = (2, 1) - (-3, 0) = (5, 1) \\ \overrightarrow{PR} = (6, 2) - (-3, 0) = (9, 2) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{5}{9} \neq \frac{1}{2} \Rightarrow P, Q \text{ i } R \text{ no estan alineats; formen un triangle}$$

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right) - (-1, 0) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \\ \overrightarrow{PR} = \left(0, \frac{3}{2}\right) - (-1, 0) = \left(1, \frac{3}{2}\right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\frac{1}{3}}{1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} \Rightarrow P, Q \text{ i } R \text{ estan alineats}$$

14. Calcula els valors de a i b perquè els vectors $\overrightarrow{PQ}$ i $\overrightarrow{RS}$ siguin equipol·lents sabent que:

$P(a+4, -b)$, $Q(a+1, b)$, $R(4, -1)$ i $S(a, b)$.

$$\overrightarrow{PQ} \approx \overrightarrow{RS} \Rightarrow (a+1-a-4, b+b) = (a-4, b+1) \Rightarrow \begin{cases} -3 = a-4 \\ 2b = b+1 \end{cases} \Rightarrow a=1, b=1$$

15. Calcula el valor de k perquè els punts $A(4, -1)$, $B(-1, 2)$ i $C(k, k+1)$ estiguin alineats.

$$\left. \begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= (-1-4, 2+1) = (-5, 3) \\ \overrightarrow{AC} &= (k-4, k+1+1) = (k-4, k+2) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{-5}{k-4} = \frac{3}{k+2} \Rightarrow -5k-10 = 3k-12 \Rightarrow k = \frac{1}{4}$$

16. Troba el vèrtex D del paral·lelogram $ABCD$ si $A(2, 3)$, $B(1, -1)$ i $C(-3, 0)$.

Perquè $ABCD$ sigui un paral·lelogram n'hi prou que $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DC}$ siguin equipol·lents, per tant, si $D(d_1, d_2)$ tenim:

$$\overrightarrow{AB} \approx \overrightarrow{DC} \Rightarrow (-1, -4) = (-3-d_1, -d_2) \Rightarrow \begin{cases} -1 = -3-d_1 \\ -4 = -d_2 \end{cases} \Rightarrow d_1 = -2, d_2 = 4 \Rightarrow D(-2, 4)$$

17. Exercici resolt.

18. Si $\vec{u} = (-4, 3)$ i $\vec{v} = (2, -1)$, troba: $|\vec{u}|$, $|\vec{v}|$ i $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5 \qquad |\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{5}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 = -4 \cdot 2 + 3(-1) = -11$$

19. Calcula, en funció de k , el mòdul de $\vec{v} = (k, -k)$ i $\vec{w} = (k+1, k-1)$ i el producte escalar.

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{k^2 + (-k)^2} = \sqrt{2k^2} = |k|\sqrt{2} \qquad |\vec{w}| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} = \sqrt{(k+1)^2 + (k-1)^2} = \sqrt{2k^2 + 2}$$

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 = k(k+1) - k(k-1) = 2k$$

20. Calcula els valors de k perquè l'angle format per $\vec{v} = (k, -k)$ i $\vec{w} = (k+1, k-1)$ sigui de 45° .

$$\cos 45^\circ = \frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{|\vec{v}| |\vec{w}|} \Rightarrow \frac{2k}{2} = \frac{2k}{|k|\sqrt{2} \cdot \sqrt{2k^2+2}} = \frac{2k}{|2k|\sqrt{k^2+1}} = \frac{\pm 1}{\sqrt{k^2+1}} \Rightarrow \sqrt{2k^2+2} = \pm 2 \Rightarrow 2k^2+2 = 4 \Rightarrow k=1, k=-1$$

Si $k=1$, $\alpha = 45^\circ$; si $k=-1$, $\alpha = 135^\circ$

21. Exercici interactiu.

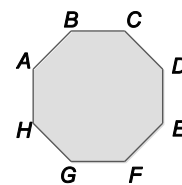
- 22 a 35. Exercicis resolts.

EXERCICIS

Vectors fixos i vectors lliures en el pla

36. La figura següent representa un octàgon regular.

- Indica dos vectors equipol·lents tals que els seus orígens i extrems siguin vèrtexs diferents de l'octàgon.
- Indica dos vectors equipol·lents tals que els seus orígens i extrems siguin vèrtexs no consecutius de l'octàgon.
- Indica dos vectors tals que els seus orígens i extrems siguin vèrtexs diferents de l'octàgon i tinguin el mateix mòdul i la mateixa direcció però diferent sentit.
- Indica dos vectors tals que els seus orígens i extrems siguin vèrtexs de l'octàgon i tinguin el mateix mòdul i diferent direcció.
- Indica dos vectors tals que els seus orígens i extrems siguin vèrtexs de l'octàgon i tinguin diferent mòdul, igual direcció i diferent sentit.



- a) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{FE}$ b) $\overrightarrow{AC}$ i $\overrightarrow{GE}$ c) $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{EH}$ d) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{BC}$ e) $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{DG}$

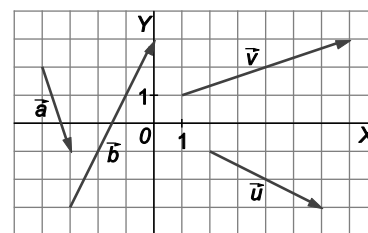
Dependència lineal

 37. Expressa els vectors $\vec{a}$ i $\vec{b}$ en funció dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

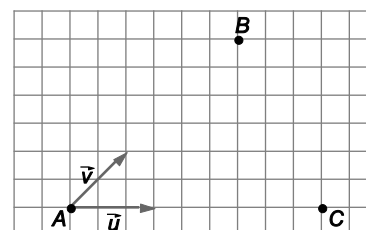
 Respecte de la base canònica tenim: $\vec{a} = (1, -3)$, $\vec{b} = (3, 6)$, $\vec{u} = (4, -2)$ i $\vec{v} = (6, 2)$

$$\vec{a} = a_1 \cdot \vec{u} + a_2 \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 1 = 4a_1 + 6a_2 \\ -3 = -2a_1 + 2a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \vec{a} = \vec{u} - \frac{1}{2}\vec{v}$$

$$\vec{b} = b_1 \cdot \vec{u} + b_2 \cdot \vec{v} \Rightarrow \begin{cases} 3 = 4b_1 + 6b_2 \\ 6 = -2b_1 + 2b_2 \end{cases} \Rightarrow b_1 = -\frac{3}{2}, b_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \vec{b} = -\frac{3}{2}\vec{u} + \frac{3}{2}\vec{v}$$


 38. Expressa els vectors $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CB}$ com a combinació lineal de $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = 3\vec{u} - 3\vec{v} \text{ i } \overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{BC} = -3\vec{u} + 3\vec{v}$$


 39. Decideix si les parelles de vectors següents $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents o linealment dependents.

- a) $\vec{u} = (-4, 2)$ i $\vec{v} = \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ b) $\vec{u} = (16, 32)$ i $\vec{v} = \left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right)$ c) $\vec{u} = (2, -16)$ i $\vec{v} = (-1, -8)$

a) $\frac{-4}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{-\frac{1}{3}} = -6 \Rightarrow \vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents.

b) $\frac{16}{-\frac{1}{4}} = \frac{32}{-\frac{1}{2}} = -64 \Rightarrow \vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents.

c) $\frac{2}{-1} \neq \frac{-16}{-8} \Rightarrow \vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment independents.

40. Expressa, en cada cas, el vector $\vec{a}$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

a) $\vec{a} = (-12, -2)$, $\vec{u} = (4, -3)$ i $\vec{v} = (-1, -2)$ c) $\vec{a} = \left(\frac{3}{4}, -\frac{7}{6}\right)$, $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ i $\vec{v} = \left(\frac{1}{4}, -\frac{5}{6}\right)$

b) $\vec{a} = \left(-\frac{1}{2}, -5\right)$, $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -3\right)$ i $\vec{v} = (1, -2)$

a) $\vec{a} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} -12 = 4a_1 - a_2 \\ -2 = -3a_1 - 2a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = 4 \Rightarrow \vec{a} = -2\vec{u} + 4\vec{v}$

b) $\vec{a} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{1}{2} = \frac{1}{2}a_1 + a_2 \\ -5 = -3a_1 - 2a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 3, a_2 = -2 \Rightarrow \vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$

c) $\vec{a} = a_1\vec{u} + a_2\vec{v} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} = \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{4}a_2 \\ -\frac{7}{6} = -\frac{1}{3}a_1 - \frac{5}{6}a_2 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 1, a_2 = 1 \Rightarrow \vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$

Operacions amb coordenades

41. Fes les operacions següents amb coordenades de vectors.

a) $2[2(-1, 3) - 3[(-2, 0) - 3(4, -3)]] - 3(1, -2)$ c) $2\left(2 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}\right) - 2(2, -3) - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right)$

b) $2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3}\left(2, -\frac{3}{4}\right)$

a) $2[2(-1, 3) - 3[(-2, 0) - 3(4, -3)]] - 3(1, -2) = 2(40, -21) - (3, -6) = (77, -36)$

b) $2\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{5}\right) - \frac{1}{3}\left(2, -\frac{3}{4}\right) = \left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{5}\right) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}\right) = \left(0, -\frac{11}{20}\right)$

c) $2\left(2 - \frac{1}{3}, 1 - \frac{1}{4}\right) - 2(2, -3) - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{3}{2}\right) - (4, -6) - \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right) = \left(-\frac{7}{6}, \frac{69}{10}\right)$

42. En la figura següent:

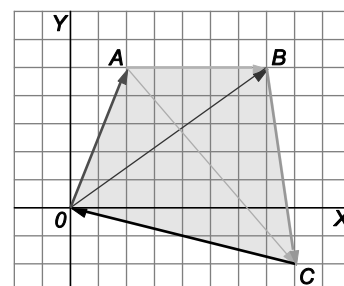
- Calcula les coordenades dels vectors lliures de representants: $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CO}$, $\overrightarrow{OB}$ i $\overrightarrow{AC}$.
- Comprova que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO}$ és el vector nul.
- Calcula les coordenades de $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC}$.

$A(2, 5)$, $B(7, 5)$, $C(8, -2)$ i $O(0, 0)$, per tant:

a) $\overrightarrow{OA} = (2, 5)$, $\overrightarrow{AB} = (5, 0)$, $\overrightarrow{BC} = (1, -7)$, $\overrightarrow{CO} = (-8, 2)$, $\overrightarrow{OB} = (7, 5)$ i $\overrightarrow{AC} = (6, -7)$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CO} = (2, 5) + (5, 0) + (1, -7) + (-8, 2) = (0, 0)$

c) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = (2, 5) + (5, 0) = (7, 5)$ i $\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} = (2, 5) + 2(5, 0) - 3(1, -7) = (9, 26)$



43. Calcula les coordenades de l'origen A d'un vector d'extrem $B(-2, 4)$ i que és equipol·lent al vector $\overrightarrow{CD}$, sent $C(5, -1)$ i $D(-2, -2)$.

$$\overrightarrow{CD} = (-7, -1), \text{ si } A(a_1, a_2): \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (-2 - a_1, 4 - a_2) = (-7, -1) \Rightarrow \begin{cases} -2 - a_1 = -7 \\ 4 - a_2 = -1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = 5, a_2 = 5 \Rightarrow A(5, 5)$$

44. Donats els punts $A(-1, 4)$, $B(2, 2)$ i $C(-3, 5)$, calcula:

- a) Les coordenades del punt D tal que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ c) Les coordenades del punt D tal que $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD}$
 b) Les coordenades del punt D tal que $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC}$ d) Les coordenades del punt D tal que $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{AC}$

a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Rightarrow (3, -2) = (d_1 + 3, d_2 - 5) \Rightarrow \begin{cases} d_1 + 3 = 3 \\ d_2 - 5 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 0 \\ d_2 = 3 \end{cases} \Rightarrow D(0, 3)$

b) $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{AC} \Rightarrow (2 - d_1, 2 - d_2) = (-2, 1) \Rightarrow \begin{cases} 2 - d_1 = -2 \\ 2 - d_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = 4 \\ d_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow D(4, 1)$

c) $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{CD} \Rightarrow (3, -2) = (3d_1 + 9, 3d_2 - 15) \Rightarrow \begin{cases} 3d_1 + 9 = 3 \\ 3d_2 - 15 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = -2 \\ d_2 = \frac{13}{3} \end{cases} \Rightarrow D\left(-2, \frac{13}{3}\right)$

d) $\overrightarrow{DB} = -2\overrightarrow{AC} \Rightarrow (2 - d_1, 2 - d_2) = (4, -2) \Rightarrow \begin{cases} 2 - d_1 = 4 \\ 2 - d_2 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1 = -2 \\ d_2 = 4 \end{cases} \Rightarrow D(-2, 4)$

45. Donats els punts $A(2, -3)$, $B(1, -4)$ i $C(-1, -2)$, calcula les coordenades dels vectors:

- a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC}$ c) $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}$
 b) $\vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{CB}$ d) $\vec{x} = 3(\vec{u} - \vec{v}) + 5\vec{v}$

a) $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} = (-2, -2) + (-9, 3) + (-2, 2) = (-13, 3)$

b) $\vec{v} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{6}\overrightarrow{CB} = \left(2, -\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{5}{3}, -\frac{5}{3}\right) = (4, -2)$

c) $\vec{w} = 2\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v} = (-26, 6) + (2, -1) = (-24, 5)$

d) $\vec{x} = 3(\vec{u} - \vec{v}) + 5\vec{v} = 3\vec{u} + 2\vec{v} = (-39, 9) + (8, -4) = (-31, 5)$

46. Calcula, si és que existeix, el valor de k perquè es compleixin les igualtats següents.

a) $(2, -3 + k) = 3(3, -1) + 7(-1, -3)$

b) $(1, -6) = 4(k, 2) - 3(1, 3 - k)$

c) $\left(\frac{2}{3} + k, \frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}, k\right) + k(2, -3)$

a) $(2, -3 + k) = 3(3, -1) + 7(-1, -3) \Rightarrow (2, -3 + k) = (2, -24) \Rightarrow -3 + k = -24 \Rightarrow k = -21$

b) $(1, -6) = 4(k, 2) - 3(1, 3 - k) \Rightarrow (1, -6) = (4k - 3, -1 + 3k) \Rightarrow \begin{cases} 4k - 3 = 1 \Rightarrow k = 1 \\ -1 + 3k = -6 \Rightarrow k = -\frac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow \text{No existeix cap valor de } k$
 perquè es compleixi la igualtat.

$$c) \left(\frac{2}{3} + k, \frac{k}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{3}, k\right) + k(2, -3) \Rightarrow \left(\frac{2}{3} + k, \frac{k}{2}\right) = \left(\frac{2}{3} + 2k, 2k - 3k\right) \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3} + k = \frac{2}{3} + 2k \\ \frac{k}{2} = -k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 0 \end{cases} \Rightarrow k = 0$$

47. Calcula els valors de x i de y perquè es compleixin les igualtats següents.

a) $(13, -8) = 5(x, -1) + 3(1, y)$

b) $(x, y) = -2(-1, -1-x) + 4(-y, 3)$

c) $\left(x, \frac{y}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(2, -\frac{1}{2}\right) + 3(x, y)$

a) $(13, -8) = 5(x, -1) + 3(1, y) \Rightarrow \begin{cases} 13 = 5x + 3 \\ -8 = -5 + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$

b) $(x, y) = -2(-1, -1-x) + 4(-y, 3) \Rightarrow \begin{cases} x = 2 - 4y \\ y = 2 + 2x + 12 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 4y = 2 \\ -2x + y = 14 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 2 \end{cases}$

c) $\left(x, \frac{y}{4}\right) = \frac{x}{2}\left(2, -\frac{1}{2}\right) + 3(x, y) \Rightarrow \begin{cases} x = x + 3x \\ \frac{y}{4} = -\frac{x}{4} + 3y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

48. Calcula el mòdul i l'argument dels vectors següents.

a) $\vec{u} = (3, 3)$

c) $\vec{u} = (-20, -21)$

e) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -4\right)$

b) $\vec{u} = (12, -5)$

d) $\vec{u} = (3, -\sqrt{3})$

f) $\vec{u} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

a) $\vec{u} = (3, 3) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ \arg(\vec{u}) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$ perquè pertany al primer quadrant.

b) $\vec{u} = (12, -5) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = \sqrt{169} = 13 \\ \arg(\vec{u}) = \arctg\left(-\frac{5}{12}\right) = 5,89 \text{ rad} \end{cases}$ perquè pertany al quart quadrant.

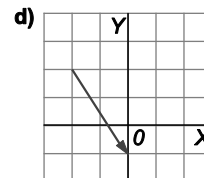
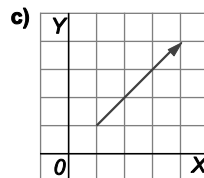
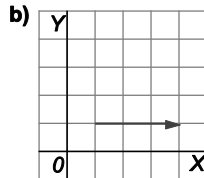
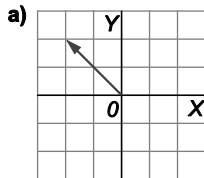
c) $\vec{u} = (-20, -21) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(-20)^2 + (-21)^2} = \sqrt{841} = 29 \\ \arg(\vec{u}) = \arctg\left(\frac{21}{20}\right) = 3,95 \text{ rad} \end{cases}$ perquè pertany al tercer quadrant.

d) $\vec{u} = (3, -\sqrt{3}) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{3^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \\ \arg(\vec{u}) = \arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{11\pi}{6} \text{ rad} \end{cases}$ perquè pertany al quart quadrant.

e) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -4\right) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (-4)^2} = \sqrt{\frac{65}{4}} = \frac{\sqrt{65}}{2} \\ \arg(\vec{u}) = \arctg(-8) = 4,84 \text{ rad} \end{cases}$ perquè pertany al quart quadrant.

$$f) \vec{u} = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{u}| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2 \\ \arg(\vec{u}) = \arctg 1 = \frac{5\pi}{4} \text{ rad} \end{cases} \quad \text{perquè pertany al tercer quadrant.}$$

49. Calcula el mòdul i l'argument dels vectors següents.



$$a) \vec{a} = (-2, 2) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \\ \arg(\vec{a}) = \arctg(-1) = \frac{3\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$$

$$c) \vec{c} = (3, 3) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{c}| = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ \arg(\vec{c}) = \arctg 1 = \frac{\pi}{4} \text{ rad} \end{cases}$$

$$b) \vec{b} = (3, 0) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{b}| = \sqrt{3^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3 \\ \arg(\vec{b}) = \arctg 0 = 0 \text{ rad} \end{cases}$$

$$d) \vec{d} = (2, -3) \Rightarrow \begin{cases} |\vec{d}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13} \\ \arg(\vec{d}) = \arctg\left(-\frac{3}{2}\right) = 5,3 \text{ rad} \end{cases}$$

50. Calcula els costats dels triangles ABC en cada cas.

a) $A(2, -1), B(-1, 5)$ i $C(-1, -1)$

$A(3, -1), B(-2, 3)$ i $C(5, 5)$

a) $\overline{AB} = (-3, 6), \overline{AC} = (-3, 0)$ y $\overline{BC} = (0, -6)$

$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6, b = |\overline{AC}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = 3 \text{ i } c = |\overline{AB}| = \sqrt{(-3)^2 + 6^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

b) $\overline{AB} = (-5, 4), \overline{AC} = (2, 6)$ i $\overline{BC} = (7, 2)$

$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{7^2 + 2^2} = \sqrt{53}, b = |\overline{AC}| = \sqrt{2^2 + 6^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} \text{ i } c = |\overline{AB}| = \sqrt{(-5)^2 + 4^2} = \sqrt{41}$$

51. Classifica els triangles següents, dels quals coneixem els vèrtexs, segons els seus costats.

a) $A(-3, 0), B(0, 1)$ i $C(1, -2)$

b) $A(1, 2), B(2, 4)$ i $C(4, 1)$

c) $A(0, 0), B(3, -1)$ i $C\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2}\right)$

a) $\overline{AB} = (3, 1), \overline{AC} = (4, -2)$ i $\overline{BC} = (1, -3)$

$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{10}, b = |\overline{AC}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ i } c = |\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

És un triangle isòsceles.

b) $\overline{AB} = (1, 2), \overline{AC} = (3, -1)$ i $\overline{BC} = (2, -3)$

$$a = |\overline{BC}| = \sqrt{2^2 + (-3)^2} = \sqrt{13}, b = |\overline{AC}| = \sqrt{3^2 + (-1)^2} = \sqrt{10} = 2\sqrt{5} \text{ i } c = |\overline{AB}| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

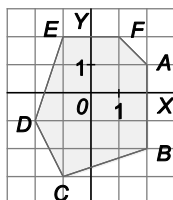
És un triangle escalè.

$$c) \overrightarrow{AB} = (3, -1), \overrightarrow{AC} = \left(\frac{3+\sqrt{3}}{2}, \frac{3\sqrt{3}-1}{2} \right) \text{ i } \overrightarrow{BC} = \left(\frac{\sqrt{3}-3}{2}, \frac{3\sqrt{3}+1}{2} \right)$$

$$a = |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}-3}{2} \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}+1}{2} \right)^2} = \sqrt{10}, b = |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2} \right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{3}-1}{2} \right)^2} = \sqrt{10} \text{ i } c = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{10}$$

És un triangle equilàter.

52. Calcula la mesura dels costats de l'hexàgon de la figura.



$A(2, 1), B(2, -2), C(-1, -3), D(-2, -1), E(-1, 2)$ i $F(1, 2)$, per tant:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{0+9} = 3 \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{9+1} = \sqrt{10} \quad |\overrightarrow{CD}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{DE}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \quad |\overrightarrow{EF}| = \sqrt{4+0} = 2 \quad |\overrightarrow{FA}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Producte escalar

53. Calcula el producte escalar de:

$$a) \vec{u} = (3, 4) \text{ i } \vec{v} = (2, 5) \quad b) \vec{u} = (-2, 4) \text{ i } \vec{v} = (2, -1) \quad c) \vec{u} = (-3, -4) \text{ i } \vec{v} = (2, 0) \quad d) \vec{u} = (-1, -3) \text{ i } \vec{v} = (1, 3)$$

$$a) \vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 20 = 26 \quad b) \vec{u} \cdot \vec{v} = -6 - 4 = -10 \quad c) \vec{u} \cdot \vec{v} = -6 + 0 = -6 \quad d) \vec{u} \cdot \vec{v} = -1 - 9 = -10$$

54. Troba el mòdul de la projecció ortogonal del vector $\vec{u} = (2, -1)$ sobre el vector $\vec{v} = (1, -4)$.

$$|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{6}{\sqrt{17}} = \frac{6\sqrt{17}}{17}$$

55. Calcula els productes escalars que s'indiquen, si els vectors estan determinats per la figura.

$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$$

$$c) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA}$$

$$b) \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA}$$

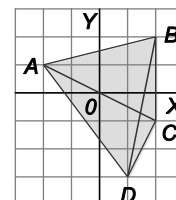
$$d) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB}$$

$$a) \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = (4, 1) \cdot (0, -3) = 0 - 3 = -3$$

$$c) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DA} = (4, -2) \cdot (-3, 4) = -12 - 8 = -20$$

$$b) \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{BA} = (-1, -2) \cdot (-4, -1) = 4 + 2 = 6$$

$$d) \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (4, -2) \cdot (1, 5) = 4 - 10 = -6$$



56. Calcula el valor o els valors de k perquè es compleixin les igualtats següents.

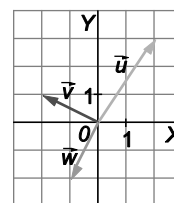
$$a) (2, k) \cdot (-1, 3) = -2 \quad b) (3, -k) \cdot (2, -1) = 4k \quad c) \left(5, -\frac{k}{2} \right) \cdot (k, -k) = 6k$$

$$a) (2, k) \cdot (-1, 3) = -2 \Rightarrow -2 + 3k = -2 \Rightarrow k = 0$$

$$b) (3, -k) \cdot (2, -1) = 4k \Rightarrow 6 + k = 4k \Rightarrow k = 2$$

$$c) \left(5, -\frac{k}{2} \right) \cdot (k, -k) = 6k \Rightarrow 5k + \frac{k^2}{2} = 6k \Rightarrow k^2 - 2k = 0 \Rightarrow k(k - 2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} k = 0 \\ k = 2 \end{cases}$$

57. Donats els vectors de la figura, resol les operacions que s'indiquen.



a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$

c) $\vec{v} \cdot (2\vec{u} - 3\vec{w}) + (-3\vec{w} + 2\vec{u}) \cdot \vec{v}$

$\vec{u} = (2, 3), \vec{v} = (-2, 1) \text{ i } \vec{w} = (-1, -2)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} = -1 - 8 = -9$

b) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) + (\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = (2, 3) \cdot (-3, -1) + (0, 4) \cdot (-1, -2) = -9 - 8 = -17$

c) $\vec{v} \cdot (2\vec{u} - 3\vec{w}) + (-3\vec{w} + 2\vec{u}) \cdot \vec{v} = (-2, 1) \cdot (7, 12) + (7, 12) \cdot (-2, 1) = -2 - 2 = -4$

Vectors paral·lels i vectors perpendiculars

58. a) Escriu tots els vectors paral·lels al vector lliure de coordenades $\vec{u} = (2, -3)$.

b) Escriu tots els vectors perpendiculars al vector lliure de coordenades $\vec{u} = (2, -3)$.

c) Troba un vector paral·lel a $\vec{u} = (2, -3)$ i unitari.

d) Troba un vector perpendicular a $\vec{u} = (2, -3)$ i unitari.

a) $(2t, -3t)$ amb $t \in \mathbb{R}$

c) $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}} \right) = \left(\frac{2\sqrt{13}}{13}, \frac{-3\sqrt{13}}{13} \right)$

b) $(3t, 2t)$ amb $t \in \mathbb{R}$

d) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}} \right) = \left(\frac{3\sqrt{13}}{13}, \frac{2\sqrt{13}}{13} \right)$

59. Per a cada cas, calcula tots els vectors unitaris que tenen la mateixa direcció que el vector $\vec{u}$. Quins d'aquests també tenen el mateix sentit?

a) $\vec{u} = (10, -24)$

b) $\vec{u} = (-2, 7; -3, 6)$

c) $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 4 \right)$

a) $\vec{u} = (10, -24) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{10}{\sqrt{10^2 + (-24)^2}}, \frac{-24}{\sqrt{10^2 + (-24)^2}} \right) = \left(\frac{10}{26}, \frac{-24}{26} \right) = \left(\frac{5}{13}, \frac{-12}{13} \right) \\ \left(\frac{-10}{\sqrt{10^2 + (-24)^2}}, \frac{24}{\sqrt{10^2 + (-24)^2}} \right) = \left(\frac{-10}{26}, \frac{24}{26} \right) = \left(\frac{-5}{13}, \frac{12}{13} \right) \end{cases}$

El primer té el mateix sentit que $\vec{u}$.

b) $\vec{u} = (-2, 7; -3, 6) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{-2,7}{4,5}, \frac{-3,6}{4,5} \right) = (-0,6; -0,8) \\ \left(\frac{2,7}{4,5}, \frac{3,6}{4,5} \right) = (0,6; 0,8) \end{cases}$. El primer té el mateix sentit que $\vec{u}$.

$$\text{c) } \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, 4\right) \Rightarrow \begin{cases} \left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}}, \frac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{65}}, \frac{8}{\sqrt{65}}\right) \\ \left(-\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{65}}{2}}, -\frac{4}{\frac{\sqrt{65}}{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{65}}, -\frac{8}{\sqrt{65}}\right) \end{cases} \quad \text{El primer té el mateix sentit que } \vec{u}.$$

60. Calcula les coordenades d'un vector paral·lel a $\overrightarrow{AF}$ i de mòdul 10, sent $A(-1, 3)$ i $F(-4, 7)$.

$\overrightarrow{AF} = (-3, 4)$, els vectors paral·lels a $\overrightarrow{AF}$ són de la forma $(-3t, 4t)$ amb $t \in \mathbb{R}$. Així: $|(-3t, 4t)| = 10 \Rightarrow \Rightarrow \sqrt{9t^2 + 16t^2} = 10 \Rightarrow 5|t| = 10 \Rightarrow t = \pm 2$. Per tant, hi ha dues possibles solucions: $(-6, 8)$ i $(6, -8)$.

61. Determina un vector perpendicular a $\vec{u} = (-5, 12)$ i que tingui el mateix mòdul que $\vec{u}$. Quantes solucions hi ha?

Hi ha dos vectors perpendiculars a $\vec{u}$ i amb el mateix mòdul: $(12, 5)$ i $(-12, -5)$.

Angle de dos vectors

62. Calcula l'angle que formen en cada cas els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

a) $\vec{u} = (3, 4)$ i $\vec{v} = (5, 12)$ c) $\vec{u} = (-1, 2)$ i $\vec{v} = (1, -2)$

e) $\vec{u} = (2, -1)$ i $\vec{v} = (1, 2)$

b) $\vec{u} = (20, -21)$ i $\vec{v} = (-1, 1)$ d) $\vec{u} = (1, -1)$ i $\vec{v} = (2, 2)$

f) $\vec{u} = (0, 2)$ i $\vec{v} = (3, -1)$

a) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{63}{\sqrt{25} \sqrt{169}} = \frac{63}{65} \Rightarrow \alpha = 14,25^\circ$

b) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-41}{\sqrt{841} \sqrt{2}} = -\frac{41}{29\sqrt{2}} = -\frac{41\sqrt{2}}{58} \Rightarrow \alpha = 178,6^\circ$

c) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-5}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = -1 \Rightarrow \alpha = 180^\circ$

d) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{0}{\sqrt{2} \sqrt{8}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

e) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{0}{\sqrt{5} \sqrt{5}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90^\circ$

f) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-2}{\sqrt{4} \sqrt{10}} = -\frac{2}{2\sqrt{10}} = -\frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \alpha = 108,43^\circ$

63. Troba el vector de m perquè els vectors $\vec{u} = (m, 1)$ i $\vec{v} = (-2, 3)$ formin un angle de:

- a) 30° b) 135° c) 90° d) 0°

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{-2m+3}{\sqrt{m^2+1}\sqrt{13}} = \frac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}}$$

a) $\frac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow -4m+6 = \sqrt{39m+39} \Rightarrow 16m^2+36-48m = 39m+39 \Rightarrow 16m^2-87m-3=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m = \frac{87+\sqrt{7761}}{32} \text{ (Falsa), } m = \frac{87-\sqrt{7761}}{32}$$

b) $\frac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow 4m-6 = \sqrt{26m+26} \Rightarrow 16m^2+36-48m = 26m+26 \Rightarrow 16m^2-74m+10=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m = \frac{37+\sqrt{1209}}{16}, m = \frac{37-\sqrt{1209}}{16} \text{ (Falsa)}$$

c) $\frac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}} = 0 \Rightarrow -2m+3=0 \Rightarrow m = \frac{3}{2}$

d) $\frac{-2m+3}{\sqrt{13m^2+13}} = 1 \Rightarrow -2m+3 = \sqrt{13m+13} \Rightarrow 4m^2+9-12m = 13m+13 \Rightarrow 4m^2-25m-4=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow m = \frac{25+\sqrt{689}}{8} \text{ (Falsa), } m = \frac{25-\sqrt{689}}{8}$$

64. Calcula els angles del triangle de vèrtexs ABC .

- a) $A(1, 3), B(2, 1)$ i $C(4, 1)$ b) $A(3, 1), B(0, 5)$ i $C(4, 3)$

a) $\overrightarrow{AB} = (1, -2)$ i $\overrightarrow{AC} = (3, -2) \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{7}{\sqrt{5} \sqrt{13}} = \frac{7\sqrt{65}}{65} \Rightarrow \hat{A} = 29,74^\circ$

$$\overrightarrow{BA} = (-1, 2) \text{ i } \overrightarrow{BC} = (2, 0) \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{-2}{2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{B} = 116,57^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} = (-3, 2) \text{ i } \overrightarrow{CB} = (-2, 0) \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13} \Rightarrow \hat{C} = 33,69^\circ$$

b) $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$ i $\overrightarrow{AC} = (1, 2) \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = \frac{5}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{A} = 63,43^\circ$

$$\overrightarrow{BA} = (3, -4) \text{ i } \overrightarrow{BC} = (4, -2) \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{20}{10\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \hat{B} = 26,57^\circ$$

$$\overrightarrow{CA} = (-1, -2) \text{ i } \overrightarrow{CB} = (-4, 2) \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} = 0 \Rightarrow \hat{C} = 90^\circ$$

65. Classifica els triangles següents segons els angles.

- a) $A(1, 3)$, $B(3, 0)$ i $C(-2, 1)$ b) $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$ i $C(2, -1)$ c) $A(1, 3)$, $B(-2, 1)$ i $C(4, 0)$

a) $\overrightarrow{AB} = (2, -3)$ i $\overrightarrow{AC} = (-3, -2) \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$. Triangle rectangle a A .

b) $\overrightarrow{AB} = (-3, -2)$ i $\overrightarrow{AC} = (1, -4) \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{5}{\sqrt{221}} = \frac{5\sqrt{221}}{221} \Rightarrow \hat{A} = 70,35^\circ$

$\overrightarrow{BA} = (3, 2)$ i $\overrightarrow{BC} = (4, -2) \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \frac{8}{2\sqrt{65}} = \frac{4\sqrt{65}}{65} \Rightarrow \hat{B} = 60,26^\circ$

$\overrightarrow{CA} = (-1, 4)$ i $\overrightarrow{CB} = (-4, 2) \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{12}{2\sqrt{85}} = \frac{6\sqrt{85}}{85} \Rightarrow \hat{C} = 49,4^\circ$

Triangle acutangle.

c) $\overrightarrow{AB} = (-3, -2)$ i $\overrightarrow{AC} = (3, -3) \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{-3}{3\sqrt{26}} = -\frac{\sqrt{26}}{26} \Rightarrow \hat{A} = 101,31^\circ$. Triangle obtusangle.

66. Calcula els angles del quadrilàter que té com a vèrtexs $A(2, 2)$, $B(2, 4)$, $C(-1, 1)$ i $D(-1, -1)$.

Observem que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = (0, 2)$, per tant, es tracta d'un paral·lelogram, amb la qual cosa $\hat{A} = \hat{C}$ i $\hat{B} = \hat{D} = 180^\circ - \hat{A}$.

Així doncs: $\cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AD}|} = \frac{-6}{6\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A} = \hat{C} = 135^\circ$ i $\hat{B} = \hat{D} = 45^\circ$.

Síntesi

67. Donats els vectors $\vec{u} = 6\vec{i} - 8\vec{j}$ i $\vec{v} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$, calcula:

- a) Els mòduls de tots dos vectors. e) Compara els quocients $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|}$ i $\frac{|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}|}{|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}|}$.
- b) El producte escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$. f) Troba l'angle que formen $\vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{u}$.
- c) L'angle que formen els dos vectors. g) Troba les coordenades de $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ i $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$.
- d) Troba el mòdul de la projecció de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$ i la de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

a) $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2} = \sqrt{6^2 + (-8)^2} = \sqrt{100} = 10$

$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 6 \cdot (-4) + (-8) \cdot 3 = -48$

c) $\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = -\frac{24}{25} \Rightarrow \alpha = 163,74^\circ$

d) $|\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{48}{5} = 9,6$

$|\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{48}{10} = 4,8$

e) Són iguals: $\frac{|\vec{v}|}{|\vec{u}|} = \frac{\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}}{\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}} = 0,5$

f) $\vec{u} + \vec{v} = 2\vec{i} - 5\vec{j} \Rightarrow \cos \beta = \frac{52}{10\sqrt{29}} = \frac{26\sqrt{29}}{145} \Rightarrow \beta = 15,07^\circ$

g) Com que α és obtús, $\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}$ té sentit oposat a $\vec{v}$ i $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ té sentit oposat a $\vec{u}$. Així:

$$\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u} = |\text{proj}_{\vec{v}} \vec{u}| \cdot \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|} = \left(\frac{192}{25}, -\frac{144}{25} \right) \quad \text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = |\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}| \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \left(-\frac{288}{100}, \frac{384}{100} \right)$$

68. Troba un vector $\vec{v}$ de mòdul 5 sabent que $\vec{u} \cdot \vec{v} = -14$, sent $\vec{u} = (6, 8)$.

Si $\vec{v} = (a, b)$, tenim:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 25 \\ 6a + 8b = -14 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{-7-4b}{3} \Rightarrow \left(\frac{-7-4b}{3} \right)^2 + b^2 = 25 \Rightarrow 25b^2 + 56b - 176 = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{44}{25}, a = -\frac{117}{25} \\ b = -4, a = 3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{v} = \left(-\frac{117}{25}, \frac{44}{25} \right) \\ \vec{v} = (3, -4) \end{cases}$$

69. Calcula el vèrtex D del paral·lelogram $ABCD$, sent $A(-3, 4)$, $B(-2, -4)$ i $C(3, -2)$. Calcula el punt en què es tallen les diagonals del paral·lelogram.

Les diagonals d'un paral·lelogram es tallen en el seu punt mitjà. Aquest punt de tall serà, per tant, el punt mitjà segment AC :

$$M\left(\frac{-3+3}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = M(0, 1)$$

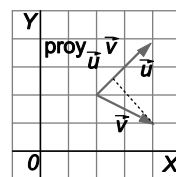
Si $D(d_1, d_2)$ és el quart vèrtex del paral·lelogram, s'haurà de complir que el punt mitjà del segment BD és M :

$$\left(\frac{-2+d_1}{2}, \frac{-4+d_2}{2}\right) = (0, 1) \Rightarrow d_1 = 2, d_2 = 6 \Rightarrow D(2, 6)$$

70. Donats els vectors de la figura:

a) Calcula les coordenades del vector de projecció de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$.

b) Descompon $\vec{v}$ com a suma de dos vectors: un d'igual direcció que $\vec{u}$ i un altre perpendicular a $\vec{u}$.



$$\vec{u} = (2, 2) \text{ i } \vec{v} = (3, 1)$$

a) $\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}$ té el mateix sentit que $\vec{u}$, per tant:

$$\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v} = |\text{proj}_{\vec{u}} \vec{v}| \cdot \frac{\vec{u}}{|\vec{u}|} = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}|^2} \vec{u} = \frac{2}{8} \vec{u} = \frac{1}{4} \vec{u} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

- b) Tots els vectors que tenen la direcció de $\vec{u}$ són de la forma (t, t) amb $t \in \mathbb{R}$ i tots els vectors que tenen la direcció perpendicular a $\vec{u}$ són de la forma $(-s, s)$ amb $s \in \mathbb{R}$, per tant, tenim:

$$\vec{v} = (t, t) + (-s, s) \Rightarrow \begin{cases} t-s=2 \\ t+s=-1 \end{cases} \Rightarrow t = \frac{1}{2}, s = -\frac{3}{2} \Rightarrow \vec{v} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right)$$

71. Calcula el valor de m perquè els punts del pla $A(1, 2)$, $B(-2, m-2)$ i $C(3, -m)$ estiguin alineats.

$$\overline{AB} = (-3, m-4) \text{ i } \overline{AC} = (2, -m-2) \Rightarrow \frac{2}{-3} = \frac{-m-2}{m-4} \Rightarrow 2m-8 = 3m+6 \Rightarrow m = -14$$

72. Calcula les coordenades de l'extrem B d'un vector que té com a origen $A(2, 3)$ i que és equipol·lent al vector $\overline{CD}$, sent $C(-2, 3)$ i $D(0, -4)$.

$$\text{Si } B(b_1, b_2) \text{ tenim: } \overline{AB} = \overline{CD} \Rightarrow (b_1-2, b_2-3) = (2, -7) \Rightarrow b_1 = 4, b_2 = -4 \Rightarrow B(4, -4)$$

73. El baricentre d'un triangle és el punt en què es tallen les seves tres medianes i està situat a doble distància del vèrtex que del punt mitjà del costat oposat. Calcula les coordenades del baricentre del triangle $A(-3, 3)$, $B(2, 1)$, $C(-2, -1)$.

$$\text{El punt mitjà del costat } CB \text{ és l'origen: } \left(\frac{2-2}{2}, \frac{1-1}{2}\right) = O(0, 0), \text{ per tant, si el baricentre és } G(g_1, g_2), \text{ tenim:}$$

$$\overline{AG} = 2\overline{GO} \Rightarrow (g_1+3, g_2-3) = 2 \cdot (-g_1, -g_2) \Rightarrow \begin{cases} g_1+3 = -2g_1 \\ g_2-3 = -2g_2 \end{cases} \Rightarrow g_1 = -1, g_2 = 1 \Rightarrow G(-1, 1)$$

74. Dels vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ se sap que $|\vec{u}|^2 = 13$, $|\vec{v}| = 10$ i $\vec{u} \cdot \vec{v} = -9$.

a) Troba l'angle que formen $\vec{u}$ i $\vec{v}$.

b) Troba l'angle que formen $\vec{u} + \vec{v}$ i $\vec{u} - \vec{v}$.

$$\text{a) } \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-9}{10\sqrt{13}} \Rightarrow \alpha = 104,45^\circ$$

$$\text{b) } (\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{u} - \vec{v} \cdot \vec{v} = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} - |\vec{v}|^2 = -105$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 95$$

$$|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 131$$

$$\cos \beta = \frac{(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v})}{|\vec{u} + \vec{v}| |\vec{u} - \vec{v}|} = \frac{-105}{\sqrt{12445}} \Rightarrow \beta = 160,26^\circ$$

75. Siguin els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tals que $\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v} = 31$ i $|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 37$. Troba el producte escalar $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

$$\vec{u} \cdot (\vec{u} + \vec{v}) - (\vec{u} - \vec{v}) \cdot \vec{v} = 31 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} + \vec{u} \cdot \vec{v} - \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v} = 31 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 = 31$$

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = 37 \Rightarrow |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 = 37. \text{ Per tant, } 31 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} = 37 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 3$$

QÜESTIONS

76. Indica, raonadament, si les afirmacions següents són veritables o falses.

- a) El vector nul és linealment dependent amb qualsevol altre vector del pla.
- b) Si dos vectors no nuls tenen la mateixa direcció, aleshores el seu producte escalar coincideix amb el producte dels seus mòduls.
- c) $|\vec{u} + \vec{v}| = |\vec{u}| + |\vec{v}|$
- d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \vec{0}$
- a) Vertader. El vector nul es pot escriure com el producte de qualsevol vector pel nombre 0.
- b) Fals. Només és vertader si tenen el mateix sentit; si tenen sentit diferent, el producte escalar és el producte dels mòduls multiplicat per -1.
- c) Fals. Si $\vec{u} = (1, 0)$ i $\vec{v} = (0, 1)$ aleshores $|\vec{u} + \vec{v}| = |(1, 1)| = \sqrt{2}$ i $|\vec{u}| + |\vec{v}| = 1 + 1 = 2$
- d) Vertader. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$

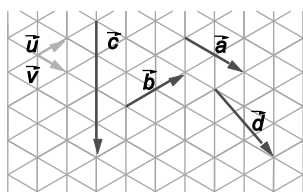
77. Dona un exemple de tres vectors no nuls $\vec{u}$, $\vec{v}$ i $\vec{w}$ tals que $\vec{u}$ i $\vec{v}$ siguin linealment independents, $\vec{u}$ i $\vec{w}$ també siguin linealment independents, però $\vec{v}$ i $\vec{w}$ siguin linealment dependents.

$$\vec{u} = (1, 0), \vec{v} = (0, 1) \text{ i } \vec{w} = (0, 2)$$

78. Demuestra que si $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$ aleshores els punts A i D són el mateix.

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CB} = \vec{0} \Rightarrow A \equiv D$$

79. Calcula les coordenades dels vectors $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ i $\vec{d}$ respecte de la base $\{\vec{u}, \vec{v}\}$.



$$\vec{a} = 2\vec{v} \quad \vec{b} = 2\vec{u} \quad \vec{c} = -4\vec{u} + 4\vec{v} \quad \vec{d} = -\vec{u} + 3\vec{v}$$

PROBLEMES

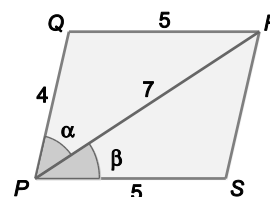
80. El paral·lelogram PQRS compleix que $PQ = 4$ cm, $PR = 7$ cm i $PS = 5$ cm.

- a) Calcula $\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PR}$, $\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{SP}$ i $\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{PR}$.
- b) Calcula els angles del paral·lelogram.

Aplicant el teorema del cosinus en els triangles PQR i PRS:

$$\cos \alpha = \frac{16 + 49 - 25}{56} = \frac{5}{7} \Rightarrow \alpha = 44,42^\circ$$

$$\cos \beta = \frac{25 + 49 - 16}{70} = \frac{29}{35} \Rightarrow \beta = 34,05^\circ$$



$$a) \overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PR} = 4 \cdot 7 \cdot \cos \alpha = 4 \cdot 7 \cdot \frac{5}{7} = 20$$

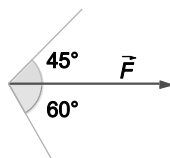
$$\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{SP} = 7 \cdot 4 \cdot \cos(\alpha + \beta) = 5,6$$

$$\overrightarrow{PS} \cdot \overrightarrow{PR} = 5 \cdot 7 \cdot \cos \beta = 5 \cdot 7 \cdot \frac{29}{35} = 29$$

$$\overrightarrow{QR} \cdot \overrightarrow{PR} = 5 \cdot 7 \cdot \cos \beta = 29$$

$$b) \alpha + \beta = 78,47^\circ \text{ i } 180^\circ - (\alpha + \beta) = 101,53^\circ$$

81. Descompon una força $\vec{F}$ newtons en dues més que formin amb aquesta angles de 45° i 60° .



$$\begin{cases} |\vec{F}_2|^2 = |\vec{F}_1|^2 + |\vec{F}|^2 - 2 \cdot |\vec{F}_1| \cdot |\vec{F}| \cdot \cos 45^\circ \\ |\vec{F}_1|^2 = |\vec{F}_2|^2 + |\vec{F}|^2 - 2 \cdot |\vec{F}_2| \cdot |\vec{F}| \cdot \cos 60^\circ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |\vec{F}_2|^2 = |\vec{F}_1|^2 + 225 - 15 \cdot \sqrt{2} \cdot |\vec{F}_1| \\ |\vec{F}_1|^2 = |\vec{F}_2|^2 + 225 - 15 \cdot |\vec{F}_2| \end{cases}$$

Substituint la segona equació a la primera:

$$|\vec{F}_2|^2 = |\vec{F}_2|^2 + 225 - 15 \cdot |\vec{F}_2| + 225 - 15\sqrt{2} \cdot |\vec{F}_1| \Rightarrow 15|\vec{F}_2| + 15\sqrt{2}|\vec{F}_1| = 450 \Rightarrow |\vec{F}_2| + \sqrt{2}|\vec{F}_1| = 30 \Rightarrow |\vec{F}_2| = 30 - \sqrt{2}|\vec{F}_1|$$

Substituint a la primera equació:

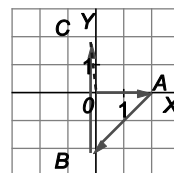
$$(30 - \sqrt{2}|\vec{F}_1|)^2 = |\vec{F}_1|^2 + 225 - 15 \cdot \sqrt{2} \cdot |\vec{F}_1| \Rightarrow 900 + 2|\vec{F}_1|^2 - 60\sqrt{2}|\vec{F}_1| = |\vec{F}_1|^2 + 225 - 15 \cdot \sqrt{2} \cdot |\vec{F}_1| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\vec{F}_1|^2 - 45\sqrt{2}|\vec{F}_1| + 675 = 0 \Rightarrow |\vec{F}_1| = \frac{45\sqrt{2} - 15\sqrt{6}}{2} = 13,45 \text{ N}, |\vec{F}_2| = 30 - \sqrt{2}|\vec{F}_1| = 10,98 \text{ N}$$

82. En Jordi fa una excursió en tres etapes. En la primera es dirigeix cap a l'est i camina 2 km. En la segona continua caminant 3 km però aquest cop en direcció sud-oest. Finalment, camina 4 km en direcció nord. Quina distància el separa del punt de partida quan acaba l'excursió? Fes, utilitzant vectors, un esquema del trajecte seguit.

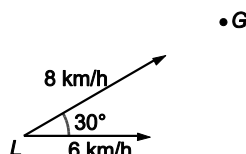
Considerant el sistema de referència de la figura, el trajecte d'en Jordi és $O \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C$:

$$O(0, 0), A(2, 0), B(2 + 3\cos 225^\circ, 2 + 3\sin 225^\circ) = \left(\frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2} \right) \text{ i } C \left(\frac{4 - 3\sqrt{2}}{2}, \frac{8 - 3\sqrt{2}}{2} \right)$$



$$\text{La distància del punt de sortida és, per tant: } |\overrightarrow{OC}| = \sqrt{\left(\frac{4 - 3\sqrt{2}}{2} \right)^2 + \left(\frac{8 - 3\sqrt{2}}{2} \right)^2} = \sqrt{29 - 18\sqrt{2}} = 1,88 \text{ km}$$

83. La Lola està passejant la seva gossa Lua. En un moment donat, en què són al punt L, la gossa veu un gat situat a G i va cap a ell amb una velocitat de 8 km/h i amb una direcció de 30° sobre la direcció de passeig, tal com mostra la figura. Per la seva banda, la Lola va amb una velocitat de 6 km/h en la direcció del seu passeig.



Calcula el vector velocitat resultant donant-ne el mòdul i direcció.

Agafant el sistema de referència centrat en L i amb eixos la direcció del passeig i la seva perpendicular, es poden escriure vectorialment les velocitats de la Lola i la Lua com $\vec{a} = (6, 0)$ i $\vec{b} = (8\cos 30^\circ, 8\sin 30^\circ) = (4\sqrt{3}, 4)$, respectivament.

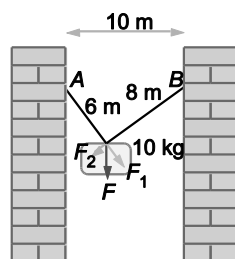
Per tant, la velocitat resultant és $\vec{a} + \vec{b} = (6 + 4\sqrt{3}, 4)$, MB amb mòdul $\sqrt{(6 + 4\sqrt{3})^2 + 16} = 13,53 \text{ km/h}$ i direcció $17,19^\circ$ respecte de l'horitzontal.

84. Els mòduls de dos vectors valen 15 i 12 unitats de longitud respectivament. El mòdul de la suma d'aquests vectors és 8 unitats de longitud. Calcula el producte escalar dels vectors i l'angle que formen.

$$|\vec{u} + \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2 \Rightarrow 64 = 225 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + 144 \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = -152,5$$

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| |\vec{v}|} = \frac{-152,5}{15 \cdot 12} = -0,8472 \Rightarrow \alpha = 147,91^\circ$$

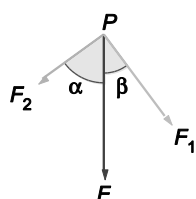
85. Un pes està suspès en una corda lligada a dos punts A i B d'igual altura i situats en dues parets que disten 10 m, tal com mostra la figura.



La corda té una longitud de 14 m i el pes està situat a 6 m de A i 8 m de B .

La massa del pes és de 10 kg i, per tant, la força que exerceix és $F = 98 \text{ N}$.

Calcula els valors de les forces F_1 i F_2 en els quals es descompon la força de F . Quina interpretació pots fer a aquestes forces? Calcula els angles que formen amb la força F .



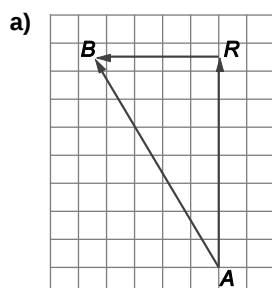
El triangle ABP és rectangle a P ja que $10^2 = 6^2 + 8^2$, per tant:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}, \operatorname{tg} \beta = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}, \sin \alpha = \cos \beta = \frac{4}{5} \text{ i } \cos \alpha = \sin \beta = \frac{3}{5}$$

$$|\vec{F}_1| = 98 \cdot \cos \beta = 98 \cdot \frac{4}{5} = 78,4 \text{ N}, |\vec{F}_2| = 98 \cdot \cos \alpha = 98 \cdot \frac{3}{5} = 58,8 \text{ N}, \alpha = 53,13^\circ \text{ i } \beta = 36,87^\circ$$

86. Un cotxe viatja a 100 km/h durant 45 minuts en direcció nord fins a arribar a una rotonda on fa un gir de 270° . A la nova carretera, circula durant 30 minuts a una velocitat de 90 km/h.

- a) Utilitzant vectors, dibuixa un esquema de la situació.
b) Indica quin és el mòdul, direcció i sentit del vector desplaçament total, sent el seu origen el punt en què comença el recorregut i el seu extrem el punt en què acaba.

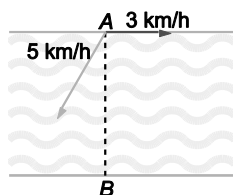


$$\text{b) } AR = 100 \cdot 0,75 = 75 \text{ km}, RB = 90 \cdot 0,5 = 45 \text{ km}$$

$$|\vec{AB}| = \sqrt{75^2 + 45^2} = 87,46 \text{ km}$$

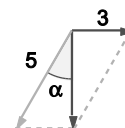
$$\angle BAR = \operatorname{arctg} \frac{45}{75} = 30,96^\circ$$

87. En Daniel vol travessar un riu d'una banda a l'altra i de manera perpendicular a totes dues. En Daniel aconsegueix nedar amb una velocitat de 5 km/h però el corrent del riu té una velocitat de 3 km/h.



- En quina direcció ha de nedar per aconseguir arribar al punt B situat just davant del punt de sortida A?
- Quina seria la velocitat resultant?
- Què passaria si la velocitat que aconsegueix en Daniel fos més baixa que la velocitat del corrent?

- a) $\alpha = \arcsin \frac{3}{5} \approx 36,87^\circ$, en Daniel ha de nedar amb $36,87^\circ$ respecte de la perpendicular al riu.

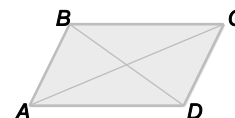


- b) La velocitat resultant serà $\sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ km/h.

- c) No existiria cap direcció amb la qual en Daniel pogués arribar al punt B situat just davant del punt de sortida A, ja que l'arcsin no estaria definit en aquest cas.

88. Donat el paral·lelogram ABCD, demostra que la suma dels quadrats de les dues diagonals és igual al doble de la suma dels quadrats de dos costats consecutius del paral·lelogram. Per fer-ho, ajuda't del càlcul vectorial i demostra que

$$|\vec{AB} - \vec{AD}|^2 + |\vec{AB} + \vec{AD}|^2 = 2|\vec{AB}|^2 + 2|\vec{AD}|^2.$$



Apliquem les fórmules de l'exercici resolt 27:

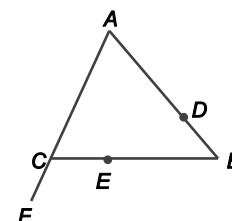
$$|\vec{AB} - \vec{AD}|^2 + |\vec{AB} + \vec{AD}|^2 = |\vec{AB}|^2 + |\vec{AD}|^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} + |\vec{AB}|^2 + |\vec{AD}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 2|\vec{AB}|^2 + 2|\vec{AD}|^2$$

PER APROFUNDIR

89. En la figura adjunta, del triangle ABC es consideren els punts D, E i F sobre les rectes que contenen els seus costats, de manera que $\vec{AC} = 3\vec{CF}$, $\vec{BC} = 3\vec{EC}$ i $3\vec{AD} = 2\vec{AB}$.

Demostra que D, E i F estan alineats. Per fer-ho:

- Tria una base convenient i escriu els vectors $\vec{FE}$ i $\vec{ED}$ com a combinació lineal dels vectors de la base
- Amb ajuda de l'apartat anterior, relaciona els vectors $\vec{FE}$ i $\vec{ED}$.



- a) S'agafa la base $\{\vec{CA}, \vec{CB}\}$, així:

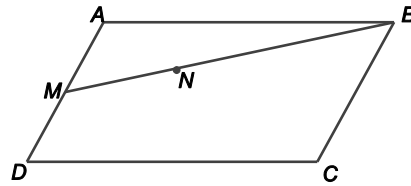
$$\vec{FE} = \vec{FC} + \vec{CE} = -\vec{CF} - \vec{EC} = -\frac{1}{3}\vec{AC} - \frac{1}{3}\vec{BC} = \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{CB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$\vec{ED} = \vec{EC} + \vec{CA} + \vec{AD} = \frac{1}{3}\vec{BC} + \vec{CA} + \frac{2}{3}\vec{AB} = -\frac{1}{3}\vec{CB} + \vec{CA} + \frac{2}{3}(\vec{CB} - \vec{CA}) = \frac{1}{3}\vec{CA} + \frac{1}{3}\vec{CB} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

- b) Els vectors $\vec{FE}$ i $\vec{ED}$ són iguals per la qual cosa D, E i F estan alineats.

90. En la figura:

- $ABCD$ és un paral·lelogram.
- M és el punt mitjà del segment AD .
- $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM}$



Demostra que els punts C , N i A estan alineats.

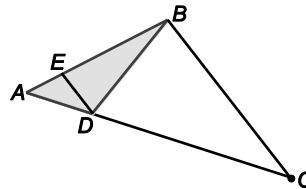
A la base $\{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\}$ tenim: $A(0, 1)$, $B(1, 1)$, $C(1, 0)$, $D(0, 0)$ i $M\left(0, \frac{1}{2}\right)$

Per tant, si $N(n_1, n_2)$: $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NM} \Rightarrow (n_1 - 1, n_2 - 1) = (-2n_1, 1 - 2n_2) \Rightarrow n_1 = \frac{1}{3}$, $n_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow N\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

D'aquesta manera, $\overrightarrow{CN} = \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$ i $\overrightarrow{CA} = (-1, 1)$ són proporcionals, per tant, C , N i A estan alineats.

91. En la figura:

- ABC és un triangle qualsevol.
- $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AD}$



Demostra que les rectes BC i ED són paral·leles.

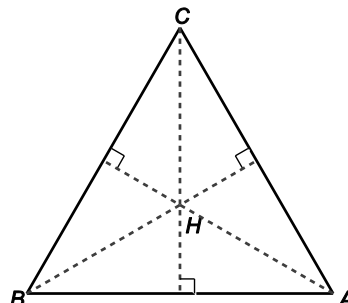
A la base $\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}\}$ tenim $A(0, 0)$, $B(0, 1)$, $C(4, 0)$, $D(1, 0)$ i $E\left(0, \frac{1}{4}\right)$. Per tant, $\overrightarrow{BC} = (4, -1)$ i $\overrightarrow{ED} = \left(1, -\frac{1}{4}\right)$ són proporcionals; és a dir, les rectes BC i ED són paral·leles.

92. Amb l'ajuda del càlcul vectorial, demostra el teorema del cosinus en un triangle ABC . Per fer-ho, utilitza l'operació del producte escalar.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) \cdot (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CB} \Rightarrow \\ &\Rightarrow |\overrightarrow{AB}|^2 = |\overrightarrow{AC}|^2 + 2|\overrightarrow{AC}||\overrightarrow{CB}|\cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) + |\overrightarrow{CB}|^2 \Rightarrow c^2 = b^2 + 2ba\cos(180^\circ - \hat{C}) + a^2 \Rightarrow c^2 = a^2 + b^2 - 2ba\cos\hat{C} \end{aligned}$$

93. Amb l'ajuda del càlcul vectorial, demostra que les tres altures d'un triangle es tallen en un mateix punt.

Considerem un triangle ABC i les seves altures traçades des de A i B , que es tallaran en un punt H . Volem provar que H també pertany a l'altura traçada des de C .

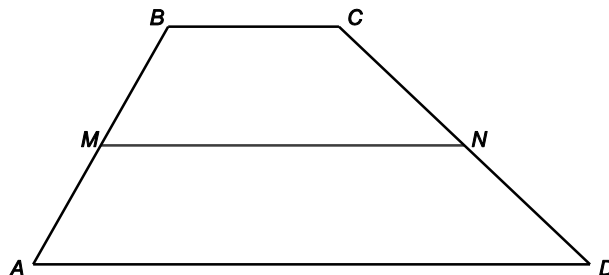


Per fer-ho, observem que $\overrightarrow{AH}$ i $\overrightarrow{BC}$ són perpendiculars, com ho són $\overrightarrow{BH}$ i $\overrightarrow{AC}$, i només cal demostrar que també ho són $\overrightarrow{CH}$ i $\overrightarrow{AB}$, és a dir, que $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AB} &= (\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BH}) \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BH} \cdot \overrightarrow{BC} + 0 = \\ &= \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} \cdot (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{HB}) = \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{HA} = 0 \end{aligned}$$

94. Demuestra que la recta que uneix els punts mitjans dels costats no paral·lels d'un trapezi és paral·lela a les bases.

Considerem un trapezi $ABCD$ amb costats no paral·lels AB i CD , i siguin M i N els respectius punts mitjans d'aquests costats.



Tenim:

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC})$$

I, com que $\overrightarrow{AD}$ i $\overrightarrow{BC}$ són paral·lels, es conclou que $\overrightarrow{MN}$ també és paral·lel a aquests dos vectors.

ENTORN MATEMÀTIC

Perdut al desert

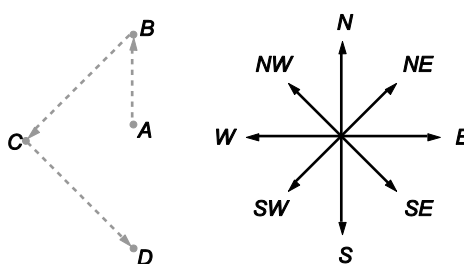
Durant les seves vacances i abans de començar la universitat, en Xavier ha decidit fer un viatge per Mongòlia.

Ara mateix està visitant el desert del Gobi, però com que és un despistat incorregible, ha perdut de vista el guia que acompanya el seu grup i està perdut.

La falta d'aigua i la calor l'estan consumint a poc a poc i, si no troba cap solució, no trigarà gaire a morir-se. De sobte, i mentre vaga sense cap criteri, troba un pal ancorat a la sorra amb una inscripció en àrab. Sort que en Xavier va fer cas de la mare que, ja fa temps, li va dir: "Fill: a més de l'anglès seria convenient que aprenguessis, com a mínim, una altra llengua. I seria millor que fos alguna dels països emergents: el xinès, l'hindi, el rus... Tampoc estaria malament que aprenguessis l'àrab". I va aprendre aquesta llengua.

- Partint d'aquest punt, camina 3 km cap al nord i hi trobaràs sorra.
- Després, camina 5 km més dirigint-te cap al sud-oest i hi continuaràs trobant sorra.
- Finalment, agafa una altra direcció fins que arribis a 4071 m just al sud del punt inicial del viatge, on continuaràs trobant sorra.
- Si tornes al punt inicial i recorres la mateixa distància i amb la mateixa direcció que la del tercer tram del camí indicat, hi trobaràs un OASI!

En Xavier aconsegueix traduir el missatge, que sembla cosa d'un bromista i en vista de l'alternativa de quedar-se a esperar que el trobin o intentar sortir pels seus propis mitjans, opta per això últim i elabora un esquema:



- Calcula el mòdul i l'angle amb la direcció oest-est que forma el tercer tram del camí.
- Tria una referència cartesiana convenient i estableix les coordenades dels punts del camí i del punt en què està situat l'oasi.

Si es considera el sistema de referència en què A és l'origen de coordenades i la direcció oest-est és l'eix d'abscisses, tenim $A(0, 0)$, $B(0, 3)$, $C(c_1, c_2)$ i $D(0; -4,071)$.

Les condicions del problema impliquen:

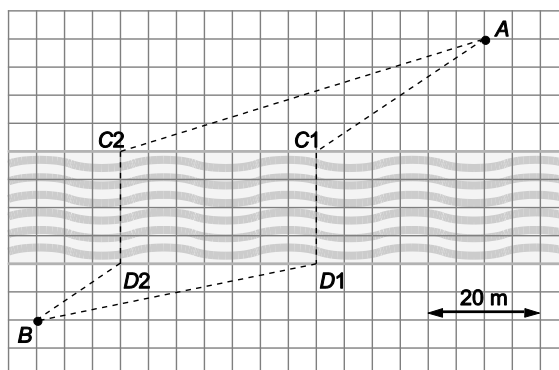
$$\begin{cases} |\overline{BC}| = 5 \\ \overline{BA} \cdot \overline{BC} = 15 \cos 45^\circ = \frac{15\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1^2 + (c_2 - 3)^2 = 25 \\ -3(c_2 - 3) = \frac{15\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow c_2 = \frac{6 - 5\sqrt{2}}{2}, c_1 = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow C\left(-\frac{5\sqrt{2}}{2}, \frac{6 - 5\sqrt{2}}{2}\right)$$

L'oasi es troba en el punt O tal que $\overline{AO} = \overline{CD}$, és a dir, $O\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}; -4,071 - \frac{6 - 5\sqrt{2}}{2}\right) \approx (3,5355; -4,6065)$.

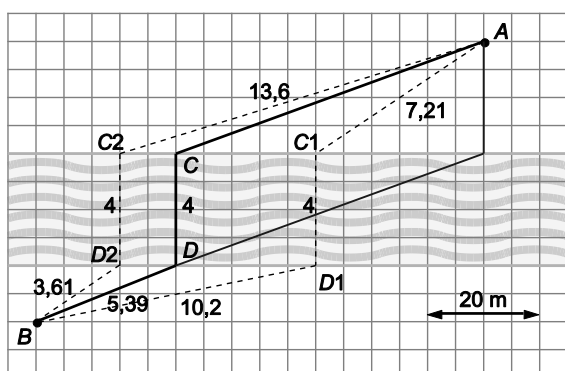
Per tant, la longitud del tercer tram és $|\overline{CD}| \approx \sqrt{3,5355^2 + (-4,6065)^2} \approx 5,8069$ km i l'angle que forma amb la direcció oest-est és $\arctg\left(\frac{-4,6065}{3,5355}\right) \approx 307,51^\circ$.

Aventura al Tuul

Dies més tard i després de l'aventura al desert, en Xavier, que encara no està prou cansat d'aventures, ha anat al parc nacional Khustain Nuruu. En un cert moment, es troba al punt A i es vol dirigir al punt B, però travessant el riu Tuul de manera perpendicular a les seves ribes.



- a) Amb l'ajuda de GeoGebra, dibuixa i calcula la distància recorreguda agafant els camins $A \rightarrow C1 \rightarrow D1 \rightarrow B$ i $A \rightarrow C2 \rightarrow D2 \rightarrow B$.
- b) També amb GeoGebra, mitjançant el templeig i calculant diversos camins, intenta aproximar el camí de mínima longitud per anar de A a B.



$$A \rightarrow C1 \rightarrow D1 \rightarrow B : 5 (7,21 + 4 + 10,2) = 107,05 \text{ m}$$

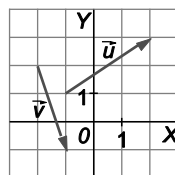
$$A \rightarrow C2 \rightarrow D2 \rightarrow B : 5 (13,6 + 4 + 3,61) = 106,05 \text{ m.}$$

El camí més curt és

$$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B : 5 (11,39 + 4 + 5,70) = 104,44 \text{ m}$$

AUTOAVALUACIÓ

Comprova el que has après

1. Donats els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ de la figura:a) Calcula les coordenades de $\vec{u} + \vec{v}$ i $2\vec{u} - 3\vec{v}$ b) Calcula l'angle que formen $\vec{u}$ i $\vec{v}$ a) $\vec{u} = (3, 2)$ i $\vec{v} = (1, -3)$, per tant, $\vec{u} + \vec{v} = (4, -1)$ i $2\vec{u} - 3\vec{v} = (6, 4) - (3, -9) = (3, 13)$ b) $\cos \alpha = \frac{-3}{\sqrt{13}\sqrt{10}} = -\frac{3\sqrt{130}}{130} \Rightarrow \alpha = 105,26^\circ$ 2. Donats els punts $A(2, 4)$, $B(-4, 2)$ i $C(-3, -1)$:a) Calcula el punt D perquè $ABCD$ sigui un paral·lelogram.

b) És l'anterior paral·lelogram un rectangle?

a) Si $D(d_1, d_2)$, tenim: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (-6, -2) = (-3 - d_1, -1 - d_2) \Rightarrow d_1 = 3, d_2 = 1 \Rightarrow D(3, 1)$ b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = (-6, -2) \cdot (1, -3) = -6 + 6 = 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AD}$ són perpendiculars i $ABCD$ sí que és un rectangle.3. a) Calcula l'extrem del vector $\overrightarrow{AB}$, sabent que $A(-3, 4)$ i que és equipol·lent $\vec{u} = (2, 2)$.b) Calcula l'origen del vector $\overrightarrow{AB}$, sabent que $B(5, -1)$ i que és equipol·lent $\vec{u} = (-2, 3)$.a) Si $B(b_1, b_2)$, tenim: $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Rightarrow (b_1 + 3, b_2 - 4) = (2, 2) \Rightarrow b_1 = -1, b_2 = 6 \Rightarrow B(-1, 6)$ b) Si $A(a_1, a_2)$, tenim: $\overrightarrow{AB} = \vec{u} \Rightarrow (5 - a_1, -1 - a_2) = (-2, 3) \Rightarrow a_1 = 7, a_2 = -4 \Rightarrow A(7, -4)$ 4. Calcula els angles del triangle $A(-3, 2)$, $B(3, 5)$ i $C(-2, 0)$, i comprova que es tracta d'un triangle rectangle. $\overrightarrow{AB} = (6, 3)$ y $\overrightarrow{AC} = (1, -2) \Rightarrow \cos \hat{A} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} = 0 \Rightarrow \hat{A} = 90^\circ$. El triangle és rectangle. $\overrightarrow{BA} = (-6, -3)$ i $\overrightarrow{BC} = (-5, -5) \Rightarrow \cos \hat{B} = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| |\overrightarrow{BC}|} = \frac{45}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \frac{3\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \hat{B} = 18,43^\circ$ $\overrightarrow{CA} = (-1, 2)$ i $\overrightarrow{CB} = (5, 5) \Rightarrow \cos \hat{C} = \frac{\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CB}|} = \frac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{50}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \Rightarrow \hat{C} = 71,57^\circ$ 5. a) Calcula tots els vectors que siguin paral·lels a $\vec{u} = (-9, 12)$ i que tinguin mòdul 5.b) Calcula tots els vectors que siguin perpendiculars a $\vec{u}(10, -24)$ i que tinguin mòdul 13.a) Tots els vectors paral·lels a $\vec{u}$ són de la forma $(-3t, 4t)$ amb $t \in \mathbb{R}$, cosa que obliga que tinguin mòdul 5: $5 = \sqrt{(-3t)^2 + (4t)^2} = \pm 5t \Rightarrow t = 1, t = -1$. Tenim, per tant, dues solucions, $\vec{v} = (-3, 4)$ i $\vec{w} = (3, -4)$

b) Els vectors perpendiculars a $\vec{u}$ són de la forma $(12t, 5t)$ amb $t \in \mathbb{R}$, cosa que obliga que tinguin mòdul 13:

$$13 = \sqrt{(12t)^2 + (5t)^2} = \pm 13t \Rightarrow t = 1, t = -1. \text{ Tenim, per tant, dues solucions, } \vec{v} = (12, 5) \text{ i } \vec{w} = (-12, -5)$$

6. Donats els vectors $\vec{u} = (-3, 5)$ i $\vec{v} = (10, 3)$ calcula la projecció de $\vec{u}$ sobre $\vec{v}$.

$$|\text{proy}_{\vec{v}} \vec{u}| = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{15}{\sqrt{109}} = \frac{15\sqrt{109}}{109}$$

7. Determina l'angle dels vector $\vec{u}$ i $\vec{v}$ sabent que $|\vec{u}| = 4$, $|\vec{v}| = 6$ i $|\vec{u} - \vec{v}| = 8$.

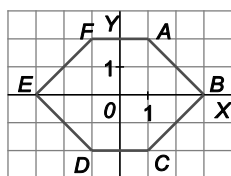
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{|\vec{u}|^2 + |\vec{v}|^2 - |\vec{u} - \vec{v}|^2}{2} = \frac{16 + 36 - 64}{2} = -6 \Rightarrow \cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = -\frac{6}{24} = -\frac{1}{4} \Rightarrow \alpha = 104,48^\circ$$

8. Escriu el vector $\vec{a} = (-10, 12)$ com a combinació lineal dels vectors $\vec{b} = (3, -4)$ i $\vec{c} = (1, -1)$. Formen $\vec{b}$ i $\vec{c}$ una base de V^2 ? Si és així, indica les coordenades de $\vec{a}$ en aquesta base.

$$\frac{1}{3} \neq \frac{-1}{-4} \Rightarrow \vec{b} \text{ i } \vec{c} \text{ formen una base de } V^2.$$

$$\vec{a} = a_1 \vec{b} + a_2 \vec{c} \Rightarrow \begin{cases} 3a_1 + a_2 = -10 \\ -4a_1 - a_2 = 12 \end{cases} \Rightarrow a_1 = -2, a_2 = -4 \Rightarrow \vec{a} = -2\vec{b} - 4\vec{c} = (-2, -4)$$

9. En l'hexàgon $ABCDEF$, calcula les coordenades de: $\vec{AF} - \vec{EF} + \vec{ED}$ i $2\vec{AB} - 3\vec{EF} + 4\vec{AF}$.



$$\vec{AF} - \vec{EF} + \vec{ED} = (-2, 0) - (2, 2) + (2, -2) = (-2, -4)$$

$$2\vec{AB} - 3\vec{EF} + 4\vec{AF} = 2(2, -2) - 3(2, 2) + 4(-2, 0) = (-10, -10)$$

Relaciona i contesta

Tria l'única resposta correcta en cada cas

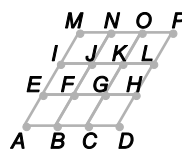
1. Es considera la figura següent.

A. $\vec{FN} + \vec{FH} = \vec{IC}$

C. $\vec{FN} - \vec{FH} = \vec{IC}$

B. $\vec{FN} + \vec{FH} = \vec{CI}$

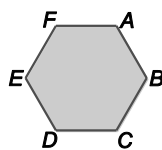
D. $\vec{FN} - \vec{FH} = \vec{CI}$



La resposta correcta és la D.

2. L'hexàgon de la figura és regular i el seu costat val 1. El producte escalar $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$ val:

- A. 1
B. 2
C. $\frac{3}{2}$
D. $\frac{\sqrt{3}}{2}$



L'angle que formen els dos vectors és 60° , i els seus mòduls valen $\sqrt{3}$, per tant, $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 60^\circ = \frac{3}{2}$, la resposta C.

3. El producte escalar de dos vectors no nuls és negatiu. L'angle que formen aquests vectors és:

- A. Més petit que 90° B. Més gran que 90° C. Més petit que 45° D. 360°

Tenint en compte que el cosinus de l'angle serà negatiu, la resposta correcta és la B.

Assenyala, en cada cas, les respostes correctes

4. Es consideren els vectors $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)$ i $\vec{v} = \frac{1}{4}(3, 2)$

- A. Els vectors tenen el mateix mòdul. C. Els vectors són linealment independents.
B. Els vectors són ortogonals. D. Els vectors són linealment dependents.

La A és correcta, ja que $|\vec{u}| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{9}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$ i $|\vec{v}| = \sqrt{\frac{9}{16} + \frac{4}{16}} = \frac{\sqrt{13}}{4}$.

La B és correcta, ja que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{3}{8} - \frac{6}{16} = 0$.

La C és correcta, per tant, la D no ho és, ja que les coordenades de $\vec{u}$ i $\vec{v}$ no són proporcionals.

5. Es consideren els punts $A(-2, 1)$ i $B(2, -1)$.

- A. L'origen de coordenades està alineat amb aquests.
B. El punt $C(4, 3)$ determina amb aquests un triangle rectangle.
C. El punt $C(4, 3)$ determina amb aquests un triangle isòsceles.
D. El producte escalar dels vectors de posició de A i B val 5.

La A és correcta, ja que $\overrightarrow{OA} = (-2, 1)$ i $\overrightarrow{OB} = (2, -1)$ són proporcionals.

La B és correcta, ja que $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = (-4, 2) \cdot (2, 4) = -8 + 8 = 0$.

La C és correcta, ja que $|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{16 + 4} = 2\sqrt{5}$ i $|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{4 + 16} = 2\sqrt{5}$.

La D no és correcta, ja que $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -4 - 1 = -5$.

Tria la relació correcta entre les dues afirmacions donades

6. Siguin $\vec{v}$ i $\vec{w}$ vectors de V^2 . Es consideren les afirmacions:

1. El vector $\vec{u} = (2, -3)$ es pot escriure com a combinació lineal de $\vec{v}$ i $\vec{w}$.

2. $\vec{v}$ i $\vec{w}$ són linealment independents.

A. $1 \Leftrightarrow 2$

C. $2 \Rightarrow 1$ però $1 \not\Rightarrow 2$

B. $1 \Rightarrow 2$ però $2 \not\Rightarrow 1$

D. 1 i 2 són excloents entre si.

Òbviament $2 \Rightarrow 1$, però el recíproc no és cert, n'hi ha prou amb agafar com a exemple $\vec{v} = \vec{u}$ i $\vec{w} = \vec{0}$, per tant, la resposta correcta és la C.

Assenyala la dada innecessària per contestar

7. Es vol calcular l'angle que formen els vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$. Per fer-ho es donen les dades següents:

1. $|\vec{u}| = 8$

2. $|\vec{v}| = 6$

3. $|\vec{u} - \vec{v}| = 5$

4. $\vec{u} \cdot \vec{v} = 37,5$

A. Únicament es pot eliminar la dada 1.

C. Únicament es pot eliminar la dada 3.

B. Únicament es pot eliminar la dada 2.

D. Es pot eliminar qualsevol de les quatre.

Com que $|\vec{u} - \vec{v}|^2 = |\vec{u}|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + |\vec{v}|^2$, es pot deduir qualsevol d'aquestes dades a partir de les altres tres, per tant, la resposta correcta és la D.