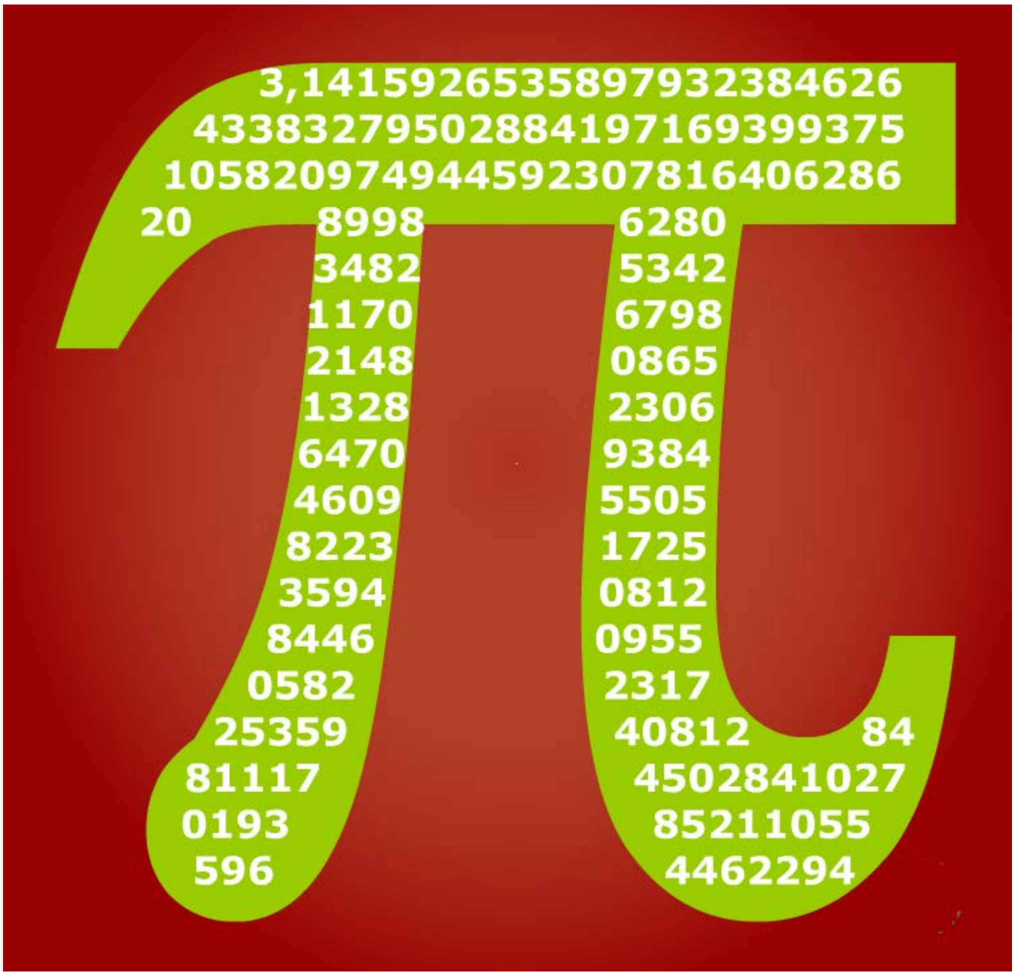
2 Els nombres reals

Objectius

En aquesta quinzena aprendràs a:

- Classificar els nombres reals en racionals i irracionals.
- Aproximar nombres reals per truncament i arrodoniment.
- Representar gràficament nombres reals.
- Comparar nombres reals.
- Realitzar operacions senzilles amb radicals.

Abans de començar



Investiga

Segurament hagis realitzat alguna vegada algun càlcul amb el nombre pi: calcular la longitud d'alguna circumferència o l'àrea d'un cercle. En aquests càlculs hauràs utilitzat valors com 3,14, 3,1416, 3,141592... També és possible que hagis llegit en algun diari que s'ha descobert una altra xifra del nombre pi. Tot l'anterior resulta una mica confús. Quina de les quantitats anteriors és l'autèntic nombre pi? Com és possible que cridem pi a totes elles si és evident que són diferents? Com és possible que s'estiguin descobrint encara xifres de pi si l'estem usant des de fa un munt d'anys?

Intenta donar una resposta a aquestes preguntes. Si no ho aconsegueixes ara torna a intentar-ho després de veure aquest tema en profunditat. Per finalitzar la proposta, aquí tens una altra pregunta: Quin és o quina podria ser l'última xifra del nombre pi?

1. Els nombres reals

Nombres irracionals

A la quinzena anterior hem vist que els nombres racionals es poden escriure en forma decimal, resultant sempre un nombre decimal exacte o periòdic. També hem vist que qualsevol decimal periòdic es pot escriure en forma de fracció.

És fàcil comprovar que hi ha nombres l'expressió decimal dels quals no és periòdica, per exemple:

0,1234567891011121314.....

Aquests nombres no es poden escriure en forma de fracció: ***no són racionals***.

Anomenem **irracionals** als nombres la part decimal dels quals no és periòdica ni exacta.

REPRESENTACIÓ DE NOMBRES IRRACIONALS

El fet que els nombre irracionals tinguin infinites xifres decimals que no es repeteixen de forma periòdica planteja el problema de com representar aquests nombres de forma exacta.

Alguns d'aquests nombres poden representar-se de forma exacta, per exemple:

$$\sqrt{2}\ ,\quad \frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ,\quad \sqrt[3]{5}$$

són representacions exactes dels nombres 1,41421356...; 1,61803398...; 1,709975947... respectivament (els punts suspensius indiquen que no hi ha un final).

En canvi, altres nombres irracionals no poden expressar-se en forma exacta., per exemple: el quocient entre la longitud d'una circumferència i el seu diàmetre és una quantitat constant que és irracional però no pot ser descrit en una forma senzilla com els nombres anteriors.

Per representar aquests nombres de manera exacta els posem un nom. En aquest cas es tracta del nombre pi: π. Per fer càlculs amb aquests nombres fem servir un valor aproximat.

El nombre $\sqrt{2}$ és irracional *(ampliació)*

Com es pot saber si un nombre és irracional? No hi ha una tècnica general, però en alguns casos es pot utilitzar una tècnica de demostració anomenada ***reducció al absurd*** que consisteix en suposar que és cert el contrari del que volem provar i arribar, a partir d'aquesta suposició, a una contradicció. Això implica que el fet inicial no pot ser fals.

El que volem provar és que $\sqrt{2}$ no és un nombre racional. *Per això començarem suposant que ho és*.

Per tant, es pot escriure en forma de fracció que, simplificant, podem convertir en irreductible. És a dir, existirien dos nombres enters, **m** i **n**, sense factors primers comuns, de forma que

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m} = \frac{p1 \cdot p2 \cdot \ldots \cdot pr}{q1 \cdot q2 \cdot \ldots \cdot qs}$$

essent p1, p2,...,pr els factors primers de n i q1, q2,...,qs els factors primers de m i totes les p són diferents de totes les q. Elevant al quadrat queda:

$$2 = \frac{n^2}{m^2} = \frac{p1^2 \cdot p2^2 \cdot \ldots \cdot pr^2}{q1^2 \cdot q2^2 \cdot \ldots \cdot qs^2}$$

I n^2 y m^2 segueixen sense tenir factors primers comuns. Per tant, $n^2=2m^2$, d'on es dedueix que n és divisible per 2. És a dir, n/2 és un nombre enter. Si anomenem t a aquest nombre, n=2, resulta que:

$$\sqrt{2} = \frac{2t}{m}$$

I t i m no tenen factors primers comuns. Elevant novament al quadrat, queda:

$$2 = \frac{4t^2}{m^2} \Rightarrow 2m^2 = 4t^2 \Rightarrow m^2 = 2t^2$$

D'on deduïm que m també és divisible per 2. Partint de que n i m no tenen factors primers comuns hem arribat a la conclusió que ambdós són múltiples de 2. Hem arribat a una **contradicció**. Per tant la suposició de que aquest nombre és racional és falsa i **deduïm que** $\sqrt{2}$ **és irracional**.

Nombres reals

IR El conjunt dels nombres reals, simbolitzat per la lletra R amb la forma que veus a l'esquerra, està format per tots els nombres racionals i tots els nombres irracionals. És a dir, tots els nombres que poden escriure's en forma decimal, sigui aquesta exacta, periòdica o no periòdica.

Això inclou a tots els tipus de nombres que coneixem fins el moment.

- $\mathbb{R}$ Reals
  - $\mathbb{Q}$ Racionals
    - $\mathbb{Z}$ Enters
      - $\mathbb{N}$ Naturals
      - Zero
      - Enters negatius
    - Fraccionaris
  - Irracionals

Aproximacions

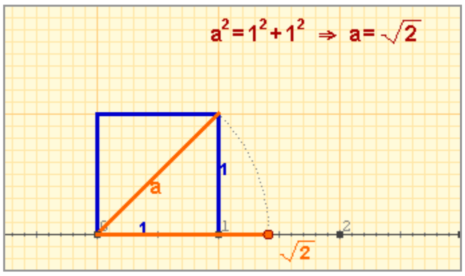
Com has comprovat, hi ha nombres reals que tenen infinites xifres decimals, per la qual cosa, en general, no és possible donar el seu valor exacte. En alguns casos, com els racionals (amb la fracció generatriu) i els radicals, sí que és possible representar-los de manera exacta. Però, en infinitat d'altres nombres (com el nombre π) això no és possible.

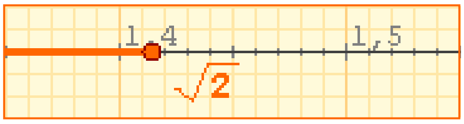
Quan en un problema necessitem utilitzar un nombre amb infinites xifres decimals, en la pràctica fem servir un valor aproximat que ens permeti obtenir un resultat acceptable encara que no sigui exacte.

Una aproximació és **per defecte** si és menor que el nombre exacte i **per excés** si és major.

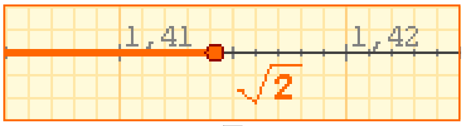
- ✓ Quan d'un decimal amb moltes xifres decimals ens quedem amb les n primeres xifres, diem que hem realitzat un **truncament** amb **n** xifres decimals.
- ✓ Fem un **arrodoniment** d'un nombre decimal a la n-èsima xifra decimal, si trunquem amb n xifres, deixant igual la xifra n-èsima si la següent és menor que 5, i augmentant-la en una unitat en cas contrari.

Observa els exemples que hi ha a l'esquerra, on es prenen diferents aproximacions de $\sqrt{2}$.

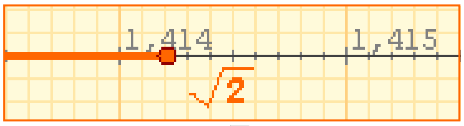




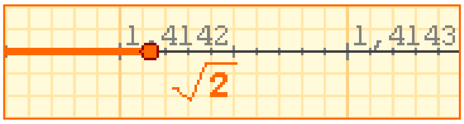
$1{,}4 < \sqrt{2} < 1{,}5$



$1{,}41 < \sqrt{2} < 1{,}42$



$1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$



$1{,}4142 < \sqrt{2} < 1{,}4143$

TRUNCAMENT	ARRODONIMENT
1,4	1,4
1,41	1,41
1,414	1,414
1,4142	1,4142
1,41421	1,41421
1,414213	1,414214
1,4142135	1,4142136
1,41421356	1,41421356

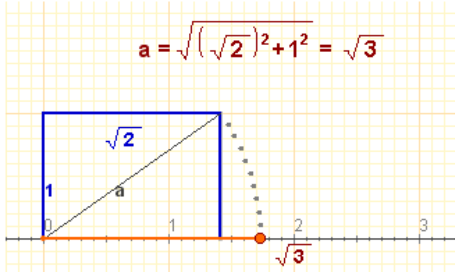
Un truncament sempre és una aproximació per defecte; l'arrodoniment pot ser per defecte o per excés.

Representació gràfica de nombres irracionals

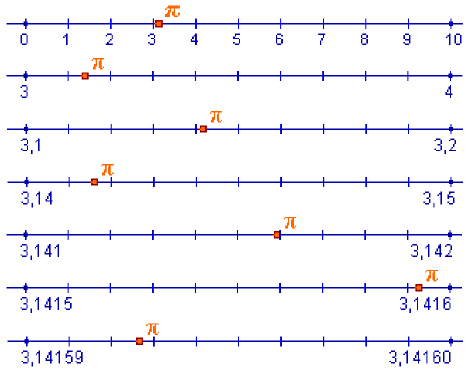
En aquest tema hem vist ja les dificultats de representar de forma exacta els nombres irracionals, dificultats que es traslladen a la seva representació gràfica.

A la dreta pots veure diferents tècniques per representar en forma gràfica nombres irracionals. En algun cas es poden utilitzar mètodes geomètrics de gran exactitud, però en la majoria dels casos només podem realitzar una representació aproximada, això sí, amb el nivell de precisió que vulguem.

Aquests mètodes garanteixen que pot associar-se de manera única un punt de la recta a cada nombre real i, recíprocament, un nombre real a cada punt de la recta. Per aquest motiu, sol identificar-se al conjunt **R** amb una recta, a la qual s'anomena **recta real**.



π = 3,141592353589793...

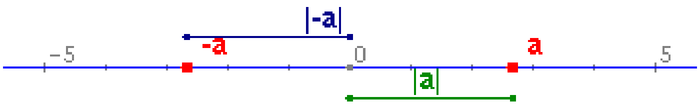


D'aquesta manera podem acotar π entre dos nombres racionals, que ja sabem representar, i que estan cada cop més propers.

Valor absolut

L'equivalència entre punts i nombres permet aplicar conceptes geomètrics al càlcul, en particular la idea de distància mitjançant el valor absolut d'un nombre.

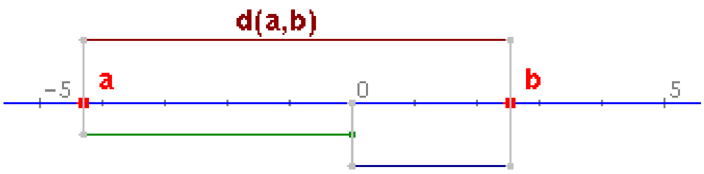
- ✓ Anomenem **valor absolut** d'un nombre real, **a**, al més gran dels nombres **a** i **-a**. El valor absolut de **a** es representa així: **|a|**.

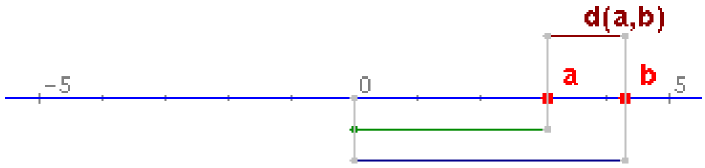


El valor absolut d'un nombre representa la distància d'aquest al zero. Podem generalitzar aquesta idea:

- ✓ Anomenem **distància** entre dos nombres reals, **a** i **b**, al valor absolut de la seva diferència:

$$d(a,b)=|b-a|=|a-b|$$





Propietats del valor absolut

1) $|a| \geq 0$
2) $|a| = |-a|$
3) $|a+b| \leq |a|+|b|$
4) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$

a=2,6828 **|a|=2,6828**
-a=-2,6828 **|-a|=2,6828**

Si a i b tenen el mateix signe la distància entre a i b és la diferència dels valors absoluts i si el signe és diferent, la suma.

a=-4,2946 **|a|=4,2946**
b=2,5447 **|b|=2,5447**
d(a,b)=6,8393

a=3,0054 **|a|=3,0054**
b=4,2861 **|b|=4,2461**
d(a,b)=1,2807

Intervals: segments i semirectes

El concepte d'interval està lligat als conceptes geomètrics de segment i semirecta: un interval acotat equival a un segment i un interval no acotat equival a una semirecta.

- ✓ Donats dos nombres reals **a** i **b**, anomenem **interval d'extrems a i b** al conjunt de nombres reals compresos entre ambdós.
- ✓ La longitud de l'interval és la distància(a,b) = **|b-a|**

En els **intervals acotats** depenent de si els extrems hi pertanyen o no, es distingeixen els intervals tancats, oberts i semioberts (per l'esquerra o per la dreta).

Si es construeix un interval obert al voltant d'un punt **a** s'obté un **entorn simètric de a i de radi r,** conjunt de nombres reals la distància dels quals a "**a**" és menor que r.

Un **interval no acotat** és el conjunt format per tots els nombres majors (o ≥), o menors (o ≤) que un donat, **a**, que n'és la cota inferior o superior respectivament. Es representen mitjançant una semirecta i la seva longitud és infinita.

Interval tancat:
Els extrem pertanyen a l'interval.

$$\textbf{[a,b]} = \{x \in R \,/\, a \le x \le b\}$$

Interval obert:
Els extrems no pertanyen a l'interval.

$$\textbf{(a,b)} = \{x \in R \,/\, a < x < b\}$$

Interval semiobert: Un extrem pertany a l'interval i l'altre no.

$$\textbf{(a,b]} = \{x \in R \,/\, a < x \le b\}$$

Entorn simètric de a:

$$\textbf{(a-r,a+r)} = \{x \in R \,/\, a - r < x < a + r\}$$

Semirecta acotada superiorment

$$\textbf{(-}\infty\textbf{,b]} = \{x \in R \,/\, x \le b\}$$

Semirecta acotada inferiorment

$$\textbf{(a,+}\infty\textbf{)} = \{x \in R \,/\, a < x\}$$

EXERCICIS resolts

1. Indica el menor dels conjunts numèrics als que pertanyen els números:

$$\text{a) } 5{,}97509\ldots \quad \text{b) } 6{,}10\widehat{3} \quad \text{c) } \frac{2}{3} \quad \text{d) } -\frac{6}{2} \quad \text{e) } \sqrt{5} \quad \text{f) } \sqrt{16}$$

***a) R** (decimal no periòdic)* ***b) Q** (decimal periòdic)* ***c) Q** (fracció no exacta)*

***d) Z** (fracció exacta negativa)* ***e) R** (radical no exacte)* ***f) N** (radical exacte)*

2. El radi d'una circumferència és de 4 m. Calcula la seva longitud.

2.1. Truncant el resultat primer a cm i després a m.

$$\boldsymbol{L = 2\cdot\pi\cdot r = 24{,}88141381\ldots m = 2488\ cm = 24\ m}$$

2.2. Arrodonint el resultat primer a cm i després a m.

$$\boldsymbol{L = 2\cdot\pi\cdot r = 24{,}88141381\ldots m = 2488\ cm = 25\ m}$$

3. Calcula el valor absolut dels números a=-3 i b=5, i la distància entre ells.

$$\boldsymbol{|a|=3,\ |b|=5,\ dist(a,b)=|b-a|=|5-(-3)|=|8|=8}$$

4. Calcula |a+b| |a-b| |a·b| i |a/b|.

$$\boldsymbol{|a+b|=|-3+5|=|2|=2;\ |a-b|=|-3-5|=|-8|=8;\ |a\cdot b|=|-3\cdot 5|=|-15|=15;}$$
$$\boldsymbol{|a/b|=|-3/5|=3/5}$$

5. Indica quins punts pertanyen a l'interval en cada cas:

5.1. Interval (-74,-52]. Punts: a) –53 b) –74 c) 11 ***Resposta: a***

5.2. Interval (-∞,75]. Punts: a) 32 b) 75 c) 76 ***Resposta: a i b.***

2. Radicals

Forma exponencial

Anomenem **arrel n-èsima** d'un nombre donat **a**, al nombre **b** que elevat a **n** ens dóna **a**.

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Un **radical** és equivalent a una **potència d'exponent fraccionari** en la qual el **denominador** de la fracció és l'**índex** del radical i el **numerador** de la fracció és l'**exponent** del radicand.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

$\sqrt[3]{8} = 2$ por ser $2^3 = 8$

$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$

$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$

Radicals equivalents

Dos o més radicals es diuen **equivalents** si les fraccions dels exponents de les potències associades són equivalents.

Donat un radical, es poden obtenir infinits radicals equivalents, **multiplicant** o **dividint** l'exponent del radicand i l'índex de l'arrel per un mateix nombre. Si es multiplica s'anomena **amplificar** i si es divideix s'anomena **simplificar** el radical.

Un radical és **irreductible**, quan la fracció de la potència associada és irreductible.

$\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[6]{x^4}$

són equivalents per ser: $\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$

Amplificar: $\sqrt[3]{x^2} = \sqrt[3\cdot2]{x^{2\cdot2}} = \sqrt[6]{x^4}$

Simplificar: $\sqrt[6]{x^4} = \sqrt[6:2]{x^{4:2}} = \sqrt[3]{x^2}$

$\sqrt[3]{x^2}$

Irreductible per ser mcd(3,2)=1

EXERCICIS resolts

6. Escriu els següents radicals com potència d'exponent fraccionari:

a) $\sqrt[5]{3}$ $\qquad \sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$ $\qquad$ b) $\sqrt[5]{x^3}$ $\qquad \sqrt[5]{x^3}$

7. Escriu les següents potències com radicals:

a) $7^{\frac{1}{2}}$ $\qquad 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ $\qquad$ b) $5^{\frac{2}{3}}$ $\qquad 5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$

8. Escriu un radical equivalent en cada cas, amplificant:

a) $\sqrt[3]{5}$ $\qquad \sqrt[3]{5} = \sqrt[3\cdot2]{5^{1\cdot2}} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$ $\qquad$ b) $\sqrt[5]{x^4}$ $\qquad \sqrt[5]{x^4} = \sqrt[5\cdot3]{x^{4\cdot3}} = \sqrt[15]{x^{12}}$

9. Escriu un radical equivalent en cada cas, simplificant:

a) $\sqrt[6]{49}$ $\qquad \sqrt[6]{49} = \sqrt[6]{7^2} = \sqrt[6:2]{7^{2:2}} = \sqrt[3]{7}$

b) $\sqrt[35]{x^{28}}$ $\qquad \sqrt[35]{x^{28}} = \sqrt[35:7]{x^{28:7}} = \sqrt[5]{x^4}$

3. Propietats de les arrels

Arrel d'un producte

$$\sqrt[3]{2\cdot 5} = \sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[7]{a^2\cdot b^4} = \sqrt[7]{a^2}\cdot\sqrt[7]{b^4}$$

L'arrel n-èsima d'un producte és igual al producte de les arrels n-èsimes dels factors.

$$\boxed{\sqrt[n]{a\cdot b} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}}$$

Demostració: $\sqrt[n]{a\cdot b} = (a\cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}}\cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$

Arrel d'un quocient

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

L'arrel n-èsima d'un quocient és igual al quocient de les arrels n-èsimes del dividend i del divisor.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Demostració: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

Arrel d'una potència

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{x^7} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^7$$

Per trobar l'arrel d'una potència, es calcula l'arrel de la base i després s'eleva el resultat a la potència donada.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p}$$

Demostració: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

Arrel d'una arrel

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

L'**arrel n-èsima** de l'**arrel m-èsima** d'un nombre és igual a l'arrel **n·m-èsima** del mateix nombre.

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}}$$

Demostració: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

EXERCICIS resolts

10. Escriu amb una única arrel:

a) $\sqrt[5]{\sqrt{3}}$ $\qquad \sqrt[5]{\sqrt{3}} = \sqrt[10]{3}$

b) $\sqrt[7]{x^4\sqrt{x}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^4\sqrt{x}} = \sqrt[7]{\sqrt{x^8 \cdot x}} = \sqrt[14]{x^9}$

11. Escriu amb una única arrel:

a) $\sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27}$ $\qquad \sqrt[4]{3}\cdot\sqrt[4]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[4]{3^4} = 3$

b) $\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2}$ $\qquad \sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{x^2} = \sqrt[5]{x^3}$

12. Escriu amb una única arrel:

a) $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2$

b) $\dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[5]{x^4}}{\sqrt[5]{x^3}} = \sqrt[5]{\dfrac{x^4}{x^3}} = \sqrt[5]{x}$

4. Operacions amb arrels

Introduir i Extreure factors d'un radical

Per **introduir** un factor dins d'un radical s'eleva el factor a la potència que indica l'índex i s'escriu dins el radicand.

Si algun factor del radicand té com exponent un nombre més gran o igual que l'índex, es pot **extreure** fora del radical dividint l'exponent del radicand entre l'índex. El quocient és l'exponent del factor que surt fora i el residu és l'exponent del factor que es queda dins.

Introduir:

$$x\sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{x^3\cdot x} = \sqrt[3]{x^4}$$

$$2\sqrt[3]{3} = \sqrt[3]{2^3\cdot 3} = \sqrt[3]{8\cdot 3} = \sqrt[3]{24}$$

Extreure:

$$\sqrt[5]{x^{13}} = x^2\sqrt[5]{x^3} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 3 & 2 \end{array}$$

Calcular arrels

Per calcular l'arrel n-èsima d'un nombre, primer en lloc es factoritza i s'escriu el nombre en forma de producte de potències i després s'extreuen tots els factors que sigui possible.

Si tots els exponents del radicand són múltiples de l'índex, l'arrel és exacta.

Aquesta tècnica és molt útil per trobar arrels exactes. Quan l'arrel no és exacta aquesta tècnica transforma el radical en una expressió *més manejable*, més comprensible.

$$\begin{array}{r|l} 1728 & 2 \\ 864 & 2 \\ 432 & 2 \\ 216 & 2 \\ 108 & 2 \\ 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$\sqrt[3]{1728} = \sqrt[3]{2^6\cdot 3^3} = $$
$$= 2^2\cdot 3 = 12$$

Sumes i Restes

Dues expressions radicals són **semblants** si tenen el mateix índex i el mateix radicand. Per exemple:

$$\frac{1}{8}\sqrt[12]{31} \qquad 2\sqrt[12]{31}$$

Només es poden ***sumar*** o ***restar*** radicals semblants. Per fer-ho, traiem factor comú el radical corresponent i se sumen o resten els coeficients.

De vegades, podem sumar radicals, en principi no semblants, extraient algun factor per convertir-los en semblants.

$$-\frac{1}{2}\sqrt{20}-\frac{3}{2}\sqrt{20}+\frac{7}{2}\sqrt{20}=$$
$$=\left(-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}+\frac{7}{2}\right)\sqrt{20}=\frac{3}{2}\sqrt{20}$$

$$-\frac{1}{8}\sqrt{45}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=-\frac{1}{8}\sqrt{3^2\cdot 5}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=-\frac{3}{8}\sqrt{5}+\frac{3}{4}\sqrt{5}=$$
$$=\left(-\frac{3}{8}+\frac{3}{4}\right)\sqrt{5}=\frac{3}{8}\sqrt{5}$$

Productes

Dues expressions radicals només es poden multiplicar si tenen el mateix índex. En tal cas, el producte s'efectua de la següent manera:

$$\left(a\cdot\sqrt[n]{b}\right)\cdot\left(c\cdot\sqrt[n]{d}\right)=ac\cdot\sqrt[n]{bd}$$

comprovant al final si es pot extreure algun factor del radical.

Si els radicals no tenen el mateix índex, primer es transformen en radicals equivalents que tinguin el mateix índex i després es multipliquen. Exemple:

$$\left(2\cdot\sqrt[3]{x}\right)\cdot\left(7\cdot\sqrt{x}\right)=14\cdot\sqrt[6]{x^2}\cdot\sqrt[6]{x^3}=14\cdot\sqrt[6]{x^5}$$

Aquí només veurem radicals quadràtics.

$$\left(-\frac{1}{4}\sqrt{6300}\right)\cdot\left(\frac{1}{5}\sqrt{196}\right)=$$
$$=-\frac{1}{20}\sqrt{2^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7}\cdot\sqrt{2^2\cdot 7^2}=$$
$$=-\frac{1}{20}\sqrt{2^4\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot 7^3}=$$
$$=-\frac{1}{20}\cdot 2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\sqrt{7}=$$
$$=-21\sqrt{7}$$

Quocients

Dues expressions radicals es poden dividir només si tenen el mateix índex. En tal cas, el quocient s'efectua tal com es pot veure en la imatge:

$$\frac{a\cdot\sqrt[n]{b}}{c\cdot\sqrt[n]{d}}=\frac{a}{c}\cdot\sqrt[n]{\frac{b}{d}}$$

Si els radicals no tenen el mateix índex, primer, cal transformar-los en radicals equivalents que tinguin el mateix índex i després es divideixen.

En la pràctica, no s'han de deixar radicals en el denominador i, en lloc de realitzar la divisió d'aquesta manera, s'utilitza un altre mètode anomenat **racionalització**, que consisteix en trobar una fracció equivalent que no tingui radicals en el denominador.

En el quadre adjunt s descriu aquest mètode quan apareixen arrels quadrades.

$$\frac{\frac{2}{3}\sqrt{6}}{9\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{6}}{27\sqrt{18}}=$$
$$=\frac{2\sqrt{6}\sqrt{18}}{27\sqrt{18}\sqrt{18}}=\frac{2\sqrt{108}}{27\cdot 18}=$$
$$=\frac{\sqrt{108}}{243}=\frac{\sqrt{2^2 3^3}}{243}=$$
$$=\frac{2\cdot 3\sqrt{3}}{243}=\frac{2\sqrt{3}}{81}$$

EXERCICIS resolts

13. Introdueix els factors dintre del radical:

a) $2\sqrt[4]{3}$ $\qquad 2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{16 \cdot 3} = \sqrt[4]{48}$

b) $x^2\sqrt[7]{x^3}$ $\qquad x^2\sqrt[7]{x^3} = \sqrt[7]{(x^2)^7 \cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{14} \cdot x^3} = \sqrt[7]{x^{17}}$

14. Extreu factors del radical:

a) $\sqrt[4]{128}$ $\qquad \sqrt[4]{128} = \sqrt[4]{2^7} = 2\sqrt[4]{2^3} = 2\sqrt[4]{8}$

b) $\sqrt[7]{x^{30}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^{30}} = \sqrt[7]{x^{28+2}} = \sqrt[7]{x^{28} \cdot x^2} = x^4\sqrt[7]{x^2}$

15. Calcula les arrels següents:

a) $\sqrt[5]{1024}$ $\qquad \sqrt[5]{1024} = \sqrt[5]{2^{10}} = 2^2 = 4$

b) $\sqrt[7]{x^{84}}$ $\qquad \sqrt[7]{x^{84}} = \sqrt[7]{x^{12 \cdot 7}} = \sqrt[7]{(x^{12})^7} = x^7$

16. Indica quins radicals són semblants:

a) $\sqrt[4]{3}$; $5\sqrt[4]{3}$ $\qquad \sqrt[4]{3}$ i $5\sqrt[4]{3}$ Són semblants

b) $\sqrt[4]{x}$; $\sqrt[3]{x}$ $\qquad \sqrt[4]{x}$ i $\sqrt[3]{x}$ No són semblants, tenen diferent índex

17. Calcula les següents sumes:

a) $\sqrt{40} + \sqrt{90}$ $\qquad \sqrt{40} + \sqrt{90} = \sqrt{4 \cdot 10} + \sqrt{9 \cdot 10} = 2\sqrt{10} + 3\sqrt{10} = 5\sqrt{10}$

b) $2\sqrt{32} - \sqrt{8}$ $\qquad 2\sqrt{32} - \sqrt{8} = 2\sqrt{2^5} - \sqrt{2^3} = 2 \cdot 2^2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$

18. Calcula els següents productes:

a) $\left(\frac{6}{7}\sqrt{14}\right) \cdot \left(-\frac{7}{3}\sqrt{252}\right)$

$$\left(\frac{6}{7}\sqrt{14}\right) \cdot \left(-\frac{7}{3}\sqrt{252}\right) = -\frac{6 \cdot 7}{7 \cdot 3}\sqrt{2 \cdot 7} \cdot \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 7} = -2\sqrt{2^3 \cdot 3^2 \cdot 7^2} = -2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 7\sqrt{2} = -84\sqrt{2}$$

b) $\left(-\frac{5}{3}\sqrt{175}\right) \cdot \left(-2\sqrt{45}\right)$

$$\left(-\frac{5}{3}\sqrt{175}\right) \cdot \left(-2\sqrt{45}\right) = \frac{10}{3}\sqrt{5^2 \cdot 7}\sqrt{3^2 \cdot 5} = \frac{10}{3}\sqrt{3^2 \cdot 5^3 \cdot 7} = \frac{10}{3} \cdot 3 \cdot 5\sqrt{5 \cdot 7} = 50\sqrt{35}$$

19. Calcula el quocient:

$$\frac{\frac{9}{2}\sqrt{24}}{4\sqrt{108}}$$

$$\frac{\frac{9}{2}\sqrt{24}}{4\sqrt{108}} = \frac{9\sqrt{24}}{\sqrt{1088}} = \frac{9\sqrt{24}\sqrt{108}}{8\sqrt{108}\sqrt{108}} = \frac{9\sqrt{2592}}{8 \cdot 108} = \frac{\sqrt{2^5 \cdot 3^4}}{96} = \frac{2^2 \cdot 3^2\sqrt{2}}{96} = \frac{3\sqrt{2}}{8}$$

Per practicar

1. Considerant 7,4833147735.... com el valor exacte de $\sqrt{56}$, escriu les aproximacions per defecte, per excés i els arrodoniments de primer i segon ordre (dècimes i centèsimes, respectivament).

2. La cinta mètrica que apareix a sota té divisions fins a mig cm. La utilitzem per mesurar una vareta i obtenim el valor que es mostra. Entre quins valors exactes es troba la longitud real, suposant que aquest valor és: a) per defecte; b) per excés; c) per arrodoniment a cm.

Les aproximacions també es poden utilitzar amb nombres enters. Per generalitzar aquesta idea farem servir el concepte de xifres significatives: "*Si un nombre N és un valor aproximat d'un altre nombre P, direm que N té n xifres significatives si les primeres n xifres de N coincideixen amb les n primeres xifres de P. (No es consideren xifres significatives els zeros que tenen per única finalitat situar la coma decimal)*". La definició anterior és força intuïtiva, però no sempre és correcta del tot, per això hem de precisar una mica més: "*Direm que N té n xifres significatives si el nombre format amb les n primeres xifres de N difereix del nombre format amb les n primeres xifres de P (eliminant les comes decimals si en té) en menys de 0,5*".

3. Ens diuen que la població d'una ciutat és de 1579000 habitants i que les 4 primeres xifres d'aquesta quantitat són significatives. Entre quins valors es troba realment la població de la ciutat?

4. Determina els conjunts $A\cap B$, AUB, A-B i -A en els casos següents:
   1. A = [-11,-9] B = (-1,6)
   2. A = [-5,5] B = (3,4)
   3. A = [-2,7] B = (-2,6)

5. Escriu com potència d'exponent fraccionari:

   a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$ c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$

6. Escriu com un radical:

   a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$ c) $x^{\frac{1}{5}}$ d) $x^{\frac{5}{3}}$

7. Extreu tots els factors possibles dels radicals següents

   a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{16}$

   c) $\sqrt{9a^3}$ d) $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

8. Introdueix dintre del radical tots els factors que hi ha fora.

   a) $3\cdot\sqrt{5}$ b) $2\cdot\sqrt{a}$

   c) $3a\cdot\sqrt{2a^2}$ d) $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$

9. Calcula les sumes de radicals següents:

   a) $\sqrt{45}-\sqrt{125}-\sqrt{20}$

   b) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{675}-\sqrt{12}$

   c) $\sqrt{175}+\sqrt{63}-2\sqrt{28}$

   d) $\sqrt{20}+\frac{1}{3}\sqrt{45}+2\sqrt{125}$

10. Realitza les operacions següents:

    a) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt{2}$

    b) $(7\sqrt{5}+5\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}$

    c) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\sqrt{2})\cdot 4\sqrt{2}$

    d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

11. Realitza les divisions de radicals següents :

    a) $\dfrac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$

Per saber-ne més

Qüestions sobre pi

A la presentació de la unitat s'esmentava que el valor de pi era 3,14, 3,1416, ... i es plantejaven una sèrie de preguntes al respecte:

Quin dels nombres anteriors és l'autèntic nombre pi?

Segons has vist al llarg de la unitat, en realitat cap dels nombres anteriors són el valor exacte de pi, es tracta d'aproximacions al nombre, i posar més o menys decimals depèn de la precisió que necessitem en la mesura.

Com és possible que anomenem pi a totes si és obvi que són diferents?

El fet que anomenem pi a qualsevol dels nombres anteriors és degut a què és impossible utilitzar el valor exacte de la majoria dels nombres irracionals, per la qual cosa hem de donar aproximacions al seu valor. Com ja s'ha dit abans, el nombre de xifres decimals amb què escrivim aquest nombre dependrà de la precisió de mesura desitjada, i el fet que, per exemple, la quarta xifra decimal sigui un 6 en 3,1416 i un 5 en 3,14159 és degut a que l'aproximació es fa en cada cas per arrodoniment i, amb quatre xifres decimals, 3,1416 està més proper al valor exacte que 3,1415.

Alguns nombres irracionals, com l'arrel quadrada de 2, sí es poden representar en forma exacta, però si aquesta quantitat la volem mesurar a la pràctica, no ens quedarà més remei que donar un valor aproximat amb la precisió que desitgem.

Com és possible que encara s'estiguin descobrint xifres de pi si l'estem fent servir des de fa una pila d'anys?

Els nombres irracionals tenen infinites xifres decimals que no es repeteixen de manera periòdica. Per trobar aquestes xifres existeixen diferents procediments o algoritmes. Alguns d'aquests algoritmes són relativament senzills, com el que s'utilitza per obtenir les xifres decimals de l'arrel quadrada de 2 (que antigament s'ensenyava a l'escola primària); altres, en canvi, són molt llargs i complexos. El nombre pi està en aquest segon grup. Actualment els algoritmes per el càlcul de xifres decimals de pi s'executen amb potents ordinadors.

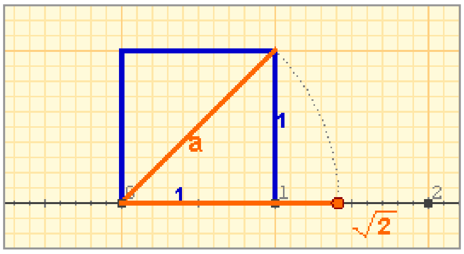
Quina és o quina podria ser l'última xifra del nombre pi?

Com s'ha dit abans, els nombres irracionals tenen infinites xifres decimals, per tant no existeix l'última xifra del nombre pi. Com, a més a més, les seves xifres no es repeteixen de manera periòdica, no es pot predir per endavant quina xifra serà la que ocupi un lloc determinat fins que s'aconsegueixi calcular.

Recorda el més important

Els nombres reals

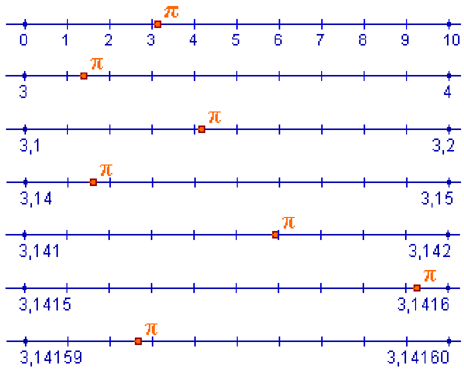
Els nombres **irracionals** són els decimals no periòdics. El conjunt **R** dels nombres **reals** està format per tots els nombres racionals i irracionals.



Tots els nombres reals, o sigui els racionals i els irracionals, es poden representar mitjançant un punt de la recta i a l'inrevés, a cada punt de la recta li correspon un nombre real.

Aproximacions

Per representar decimals infinits utilitzarem aproximacions **per defecte** i **per excés**, **truncaments** i **arrodoniments**.



Propietats dels radicals

$$\sqrt[n]{A\cdot B}=\sqrt[n]{A}\cdot\sqrt[n]{B} \qquad \sqrt[n]{\frac{A}{B}}=\frac{\sqrt[n]{A}}{\sqrt[n]{B}}$$

$$\sqrt[n]{A^p}=\left(\sqrt[n]{A}\right)^p \qquad \sqrt[p]{\sqrt[n]{A}}=\sqrt[np]{A}$$

Arrel n-èsima

$$\sqrt[n]{a}=b\Leftrightarrow b^n=a$$

Exponent fraccionari

$$\sqrt[n]{A^p}=A^{\frac{p}{n}}$$

Radicals equivalents

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[np]{a^{mp}}$$

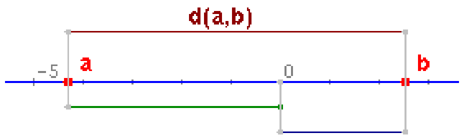
Radicals semblants

Són radicals amb el mateix índex i el mateix radicand; només poden ser diferents en el seu coeficient.

La recta real

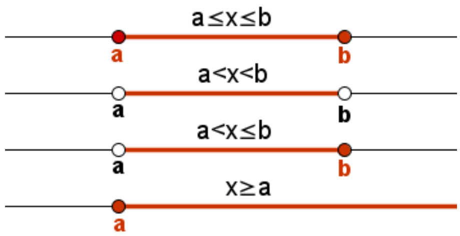
El **valor absolut** d'un nombre a, **|a|** és el nombre prescindint del signe.

La **distància** entre dos punts a i b és el valor absolut de la seva diferència **|a-b|=|b-a|**



Intervals: segments i semirectes

- Interval tancat **[a,b]**
- Interval obert **(a,b)**
- Interval semiobert **(a,b]** ó **[a,b)**
- Interval no acotat, com **[a,+∞)** o **(-∞,a)**



Autoavaluació

1. Indica el menor conjunt numèric al qual pertany el nombre

$$12,\,80\overset{\frown}{965}$$

2. Una milla anglesa mesura 1609,34 m. Arrodoneix a km 27 milles.

3. Amb la calculadora, escriu l'arrodoniment i el truncament a les mil·lèsimes de $\sqrt{21}$

4. Escriu l'interval $[-3,\ 5] \cap (3,\ 8)$.

5. Calcula el valor de l'arrel: $\sqrt[7]{78125}$

6. Escriu en forma de potència d'exponent fraccionari: $\sqrt[10]{x^3}$

7. Introdueix el factor en el radical: $6\sqrt[4]{5}$

8. Extreu factors del radical: $\sqrt[4]{243}$

9. Calcula: $\sqrt{18} - \sqrt{98}$

10. Calcula i simplifica: $\sqrt{x^{10} \cdot y^9} \cdot \sqrt{x^4 \cdot y^5}$