

6. Programació lineal

EXERCICIS PROPOSATS

- Exercici resolt.
- Considera la regió S definida per:

$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x + y \leq 6 \\ 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 4 \end{cases}$$

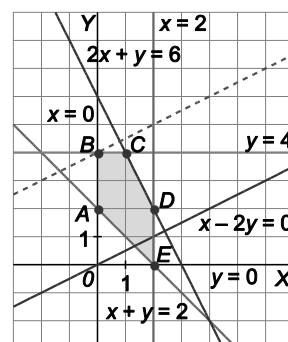
- Calcula gràficament, si existeixen, els punts que donen el valor mínim a la funció $f(x,y) = x - 2y$ a la regió S .
- Obtén de forma gràfica els màxims i els mínims de la funció $g(x,y) = 3x + 3y$ a la regió S .

- Representem la regió factible S i la recta $x - 2y = 0$.

Com que el coeficient x de la funció objectiu és positiu i coeficient de la y és negatiu, el mínim es trobarà a l'últim punt de S que toqui la recta $x - 2y = 0$ quan es desplaci de forma paral·lela en el sentit positiu de l'eix Y .

Per tant, el mínim és al vèrtex $B(0, 4)$ i el seu valor és $f(0, 4) = -8$.

Nota: El màxim es trobaria desplaçant la recta $x - 2y = 0$ de forma paral·lela en el sentit negatiu de l'eix Y , sent l'últim punt de S que toca el vèrtex $E(2, 0)$. En aquest vèrtex hi haurà el màxim, de valor $f(2, 0) = 2$.

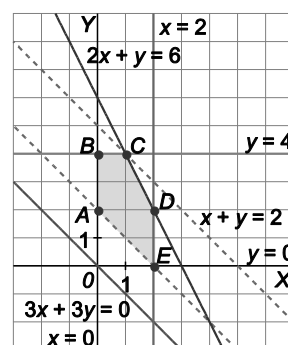


- En aquest cas, la funció objectiu té coeficients de la x , i de la y , positius, per la qual cosa el màxim es trobarà a l'últim punt de S que toqui la recta $x - 2y = 0$ quan es desplaci de forma paral·lela en el sentit positiu de l'eix Y i el mínim, a l'últim punt de S que toqui quan es desplaci en sentit negatiu.

Per tant:

El màxim es troba al vèrtex $C(1, 4)$ i el seu valor $g(1, 4) = 15$.

Per al mínim existeixen infinites solucions, qualsevol punt del segment d'extremes els vèrtexs $A(0, 2)$ i $E(2, 0)$. El seu valor en qualsevol d'aquests punts és $g(0, 2) = 6$.



- Considera la regió S del pla definida per les restriccions següents:

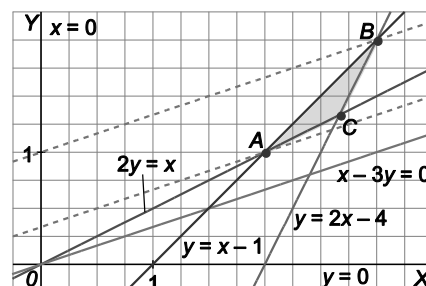
$$\begin{cases} y \geq 2x - 4 \\ y \leq x - 1 \\ 2y \geq x \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

Obtén, de forma gràfica, els valors màxims i els mínims de la funció $z = x - 3y$.

Representem la regió factible S i la recta $x - 2y = 0$. Com que la funció objectiu té coeficient de la x positiu, i coeficient de la y negatiu, el màxim es trobarà a l'últim punt de S que toqui la recta $x - 3y = 0$ quan es desplaça de forma paral·lela en el sentit negatiu de l'eix Y i el mínim, a l'últim punt de S que toqui quan es desplaça en sentit positiu. Per tant:

El màxim es troba al vèrtex $A: \begin{cases} y = x - 1 \\ 2y = x \end{cases} \Rightarrow A(2, 1)$ i el seu valor és $z_A = -1$.

El mínim es troba al vèrtex $B: \begin{cases} y = 2x - 4 \\ y = x - 1 \end{cases} \Rightarrow B(3, 2)$ i el seu valor és $z_B = -3$.



4. Exercici resolt.

5. Resol analíticament el problema de programació lineal següent:

$$\text{Màx i Min } z = x + 2y \text{ subjecte a: } \begin{cases} 3x + 2y \geq 6 \\ 3x - 4y \leq 6 \\ 3x + 4y \leq 30 \\ 3x - 2y \geq -6 \end{cases}$$

Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$A: \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow A(0, 3) \quad B: \begin{cases} 3x + 4y = 30 \\ 3x - 2y = -6 \end{cases} \Rightarrow B(2, 6)$$

$$C: \begin{cases} 3x - 4y = 6 \\ 3x + 4y = 30 \end{cases} \Rightarrow C(6, 3) \quad D: \begin{cases} 3x + 2y = 6 \\ 3x - 4y = 6 \end{cases} \Rightarrow D(2, 0)$$

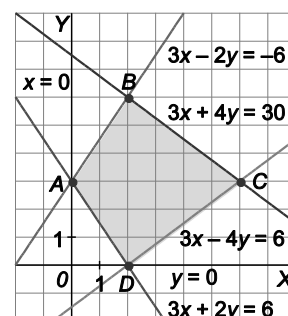
Avaluem la funció objectiu en els vèrtexs:

$$z_A = 6 \quad z_B = 14 \quad z_C = 12 \quad z_D = 2$$

Per tant:

El màxim s'assoleix per a $x = 2$, $y = 6$ (vèrtex B), i val $z_B = 14$.

El mínim s'assoleix per a $x = 2$, $y = 0$ (vèrtex D), i val $z_D = 2$.



6. Troba el valor màxim de les funcions $F(x, y) = 6x + 5y$ i $G(x, y) = 2x + 4y$ a la regió del pla definida per les inequacions: $0 \leq x$; $0 \leq y$; $3x + y \leq 60$ i $x + 2y \leq 40$.

Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$O(0, 0) \quad A(0, 20) \quad B: \begin{cases} 3x + y = 60 \\ x + 2y = 40 \end{cases} \Rightarrow B(16, 12) \quad C(20, 0)$$

Avaluem les funcions objectiu en els vèrtexs:

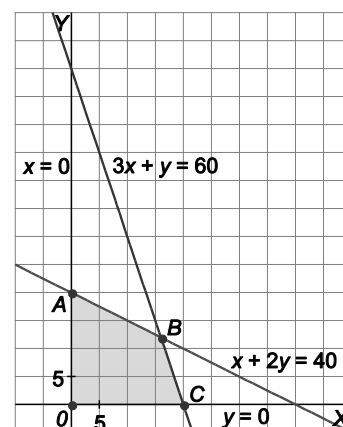
$$F_O = 0 \quad F_A = 100 \quad F_B = 156 \quad F_C = 120$$

$$G_O = 0 \quad G_A = 80 \quad G_B = 80 \quad G_C = 40$$

Per tant:

El màxim de F s'assoleix per a $x = 16$, $y = 12$ (vèrtex B), i val $F_B = 156$.

El màxim de G s'assoleix en qualsevol punt del segment d'extremes A i B i val $G_B = 80$.



7. Exercici interactiu.

8. Una empresa, que subministra els lots de perfumeria d'un supermercat, disposa al magatzem de 240 pots de gel, 95 de xampú i 270 de crema per a les mans. Els lots són de dos tipus: A i B, de forma que el lot A està format per 2 pots de gel, 1 de xampú i 3 de crema per a les mans, mentre que el lot B està format per 3 pots de gel, 1 de xampú i 2 de crema per a les mans. Cada lot de tipus A dona un benefici de 25 €, i cada lot de tipus B, de 22 €. Quants lots de cada tipus ha de preparar per maximitzar el benefici? Quin és aquest benefici màxim?

Les variables de decisió són:

x lots de tipus A y lots de tipus B

Volem trobar el màxim de $z = 25x + 22y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 2x + 3y \leq 240 & \text{debido al total de gel disponible} \\ x + y \leq 95 & \text{debido al total de champú disponible} \\ 3x + 2y \leq 270 & \text{debido al total de crema disponible} \\ x \geq 0, y \geq 0 & \text{condicions de no negativitat} \end{cases}$$

Representem la regió factible i en calculem els vèrtexs:

$$O(0, 0) \quad A(80, 0) \quad B: \begin{cases} 2x + 3y = 240 \\ x + y = 95 \end{cases} \Rightarrow B(45, 50)$$

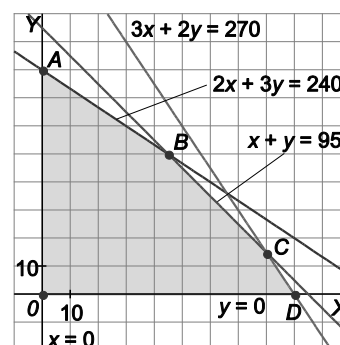
$$C: \begin{cases} x + y = 95 \\ 3x + 2y = 270 \end{cases} \Rightarrow C(80, 15) \quad D(90, 0)$$

Avaluem la funció objectiu en els vèrtexs:

$$z_O = 0 \quad z_A = 2000 \quad z_B = 2225 \quad z_C = 2330 \quad z_D = 2250$$

Per tant, el màxim s'assolirà al vèrtex C, és a dir, per obtenir els màxims beneficis s'han de preparar $x = 80$ lots de tipus A i $y = 15$ lots de tipus B, i el benefici màxim serà $z_C = 2330$ €.

	Gel	Xampú	Crema	Benefici
A (x lots)	2	1	3	25 €
B (y lots)	3	1	2	22 €
Quantitats màximes	240	95	270	



9. El terreny dedicat a una plantació d'hortalisses necessita setmanalment un mínim de 16 kg d'adob mineral i un mínim de 18 kg d'adob vegetal. Al mercat hi ha dos paquets d'adobs P_1 i P_2 . El paquet P_1 conté 2 kg d'adob mineral i 5 kg d'adob vegetal i cada paquet de tipus P_2 conté 3 kg d'adob mineral i 2 kg d'adob vegetal. Cada paquet de tipus P_1 costa 15 € i cada paquet de tipus P_2 costa 10 €. Calcula la quantitat de paquets de cada tipus que s'han d'adquirir perquè el cost sigui mínim.

Les variables de decisió són:

x paquets P_1 y paquets P_2

Volem trobar el mínim de $z = 15x + 10y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 16 & \text{necessitat d'adob mineral} \\ 5x + 2y \geq 18 & \text{necessitat d'adob vegetal} \\ x \geq 0, y \geq 0 & \text{condicions de no negativitat} \end{cases}$$

	Mineral	Vegetal	Cost
P_1 (x paquets)	2	5	15 €
P_2 (y paquets)	3	2	10 €
Quantitats mínimes	16	18	

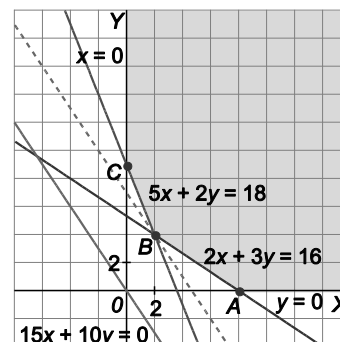
Representem la regió factible i, com que no és fitada, la recta $15x + 10y = 0$.

Com que la funció objectiu té coeficients de la x i de la y , positius, el mínim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $15x + 10y = 0$ quan es desplaci de forma paral·lela en el sentit negatiu de l'eix Y.

Per tant, el mínim es troba al vèrtex B:

$$B: \begin{cases} 2x + 3y = 16 \\ 5x + 2y = 18 \end{cases} \Rightarrow B(2, 4)$$

És a dir, per obtenir el cost mínim s'han d'adquirir $x = 2$ paquets P_1 i $y = 4$ paquets P_2 , amb un cost de $z_B = 70$ €.



10. S'han de transportar taronges de les ciutats de Gandia i Cullera a les ciutats de Burgos, Oviedo i La Corunya.

Les quantitats ofertes són 500 kg de Gandia i 750 kg de Cullera. Les quantitats demanades són 250 kg per Burgos, 500 kg per Oviedo i 500 kg per La Corunya. Els costos, en cèntims per quilogram, de transportar-les d'una ciutat a l'altra són:

	Burgos	Oviedo	La Corunya
Gandia	1	2	2
Cullera	2	2	3

Estableix la millor manera de fer el transport perquè el cost total sigui mínim. Hi ha una solució única?

La taula de variables següent indica els quilos de taronges que es transporten d'un lloc a l'altre.

	Burgos	Oviedo	La Corunya	Total
Gandia	x	y	$500 - x - y$	500
Cullera	$250 - x$	$500 - y$	$x + y$	750
Total	250	500	500	1250

Volem trobar el cost mínim:

$$z = x + 2y + 2(500 - x - y) + 2(250 - x) + 2(500 - y) + 3(x + y) = y + 2500.$$

Les restriccions del problema són les que resulten d'obligar que les variables de la taula anterior no siguin negatives, és a dir, volem resoldre el problema de programació lineal:

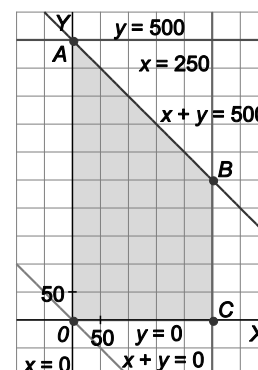
$$\text{Min } z = y + 2500$$

Subjecte a:

$$\begin{cases} x + y \leq 500 \\ x + y \geq 0 \\ 0 \leq x \leq 250 \\ 0 \leq y \leq 500 \end{cases}$$

Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$O(0, 0) \quad A(0, 500) \quad B: \begin{cases} x + y = 500 \\ x = 250 \end{cases} \Rightarrow B(250, 250) \quad C(250, 0)$$



Avaluem la funció objectiu en els vèrtexs:

$$z_O = 2500 \quad z_A = 3000 \quad z_B = 2750 \quad z_C = 2500$$

Per tant, el mínim s'assoleix en qualsevol punt del segment d'extrems O i C, és a dir, $y = 0$ kg, però x pot variar entre 0 i 250 kg. En totes aquestes solucions el cost serà de 2500 €.

Les solucions es mostren a la taula següent, en què $0 \leq x \leq 250$.

	Burgos	Oviedo	La Corunya
Gandia	x	0	$500 - x$
Cullera	$250 - x$	500	x

Per tant, els únics enviaments fixos són de Gandia a Oviedo, en què no s'envia res, i de Cullera a Oviedo, en què s'envien 500 kg.

Dos possibles transports amb cost mínim són:

	Burgos	Oviedo	La Corunya
Gandia	0	0	500
Cullera	250	500	0

	Burgos	Oviedo	La Corunya
Gandia	100	0	400
Cullera	150	500	100

11. Una persona ha d'alimentar un animal. A la botiga de mascotes hi ha dos tipus de pinso, A i B, per aquest animal, amb les composicions i el preu per paquet següents:

	Proteïnes	Hidrats de carboni	Greixos	Preu
A	1 g	5 g	3 g	2 €
B	2 g	2 g	2 g	1,7 €

Aquest animal ha de menjar diàriament, almenys, 8 g de proteïnes, 20 g d'hidrats de carboni i 16 g de greixos. Determina quants paquets de cada tipus ha de menjar l'animal perquè la dieta tingui un cost mínim.

Les variables de decisió són:

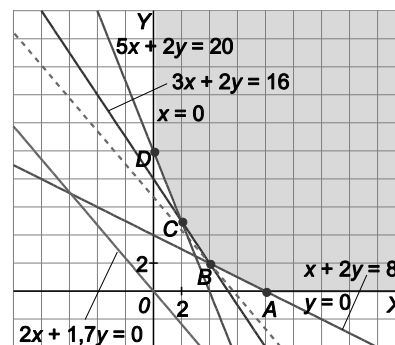
x paquets A y paquets B

Volem trobar el mínim cost:

$$z = 2x + 1,7y$$

subjecte a:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 8 & \text{necessitat de proteïnes} \\ 5x + 2y \geq 20 & \text{necessitat d'hidrats} \\ 3x + 2y \geq 16 & \text{necessitat de greixos} \\ x \geq 0, y \geq 0 & \text{condicions de no negativitat} \end{cases}$$



Representem la regió factible i, com que no és fitada, la recta $2x + 1,7y = 0$.

Com que la funció objectiu té coeficients de la x , i de la y , positius, el mínim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $2x + 1,7y = 0$ quan es desplaça de forma paral·lela en el sentit negatiu de l'eix Y.

Per tant, el mínim es troba al vèrtex B:

$$B: \begin{cases} x + 2y = 8 \\ 3x + 2y = 16 \end{cases} \Rightarrow B(4, 2)$$

És a dir, per seguir aquesta dieta, l'animal ha de menjar diàriament $x = 4$ paquets A i $y = 2$ paquets B, sent el cost $z_B = 11,4$ €.

12 a 17. Exercicis resolts.

EXERCICIS

Inequacions

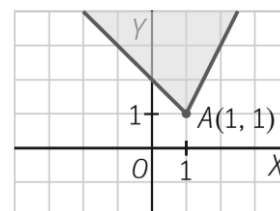
18. Considera la regió factible no fitada R determinada pel sistema d'inequacions:

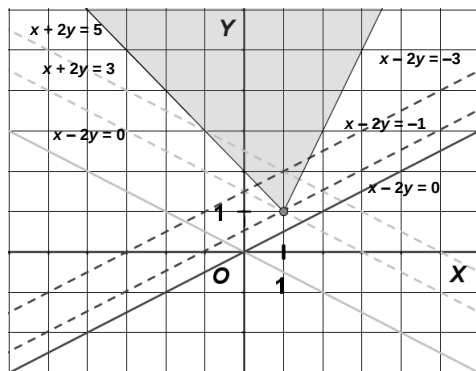
$$\begin{cases} x + y \geq 2 \\ 2x - y \leq 1 \end{cases}$$

El vèrtex de la regió és A(1, 1).

a) Sigui la funció $z = x + 2y$. Comprova que a A el valor de la funció z és mínim.

b) Sigui la funció $z = x - 2y$. Comprova que a A el valor de la funció z és màxim.





a) Tal com es veu a la gràfica, la funció $z = x + 2y$ pren un valor mínim a A, que és l'últim punt de la regió que toca. Per tant, $z = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.

b) Per altra banda, la funció $z = x - 2y$ té un màxim a A, ja que z pren el valor més gran possible. Llavors, $z = 1 - 2 \cdot 1 = -1$.

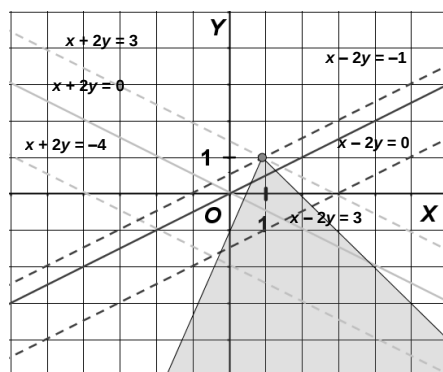
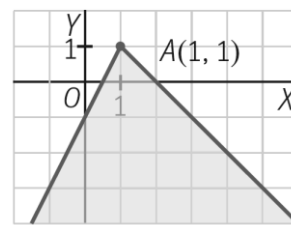
19. Considera la regió factible no fitada R determinada pel sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} x + y \leq 2 \\ 2x - y \geq 1 \end{cases}$$

El vèrtex de la regió és A(1, 1).

a) Sigui la funció $z = x + 2y$. Comprova que a A el valor de la funció z és màxim.

b) Sigui la funció $z = x - 2y$. Comprova que a A el valor de la funció z és mínim.



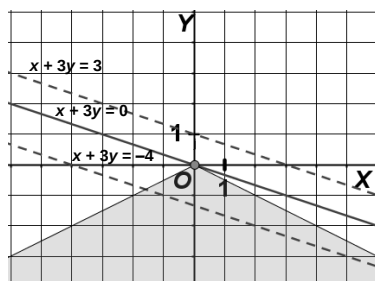
a) L'últim punt de la regió que toca la recta $z = x + 2y$ és A, i en aquest punt z pren el valor més gran possible. Així doncs, assoleix un màxim a A i $z = 1 + 2 \cdot 1 = 3$.

b) En canvi, la funció $z = x - 2y$ pren el valor més petit possible a A, i és $z = 1 - 2 \cdot 1 = -1$.

20. Considera la regió factible no fitada R determinada pel sistema d'inequacions següent:

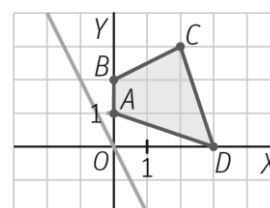
$$\begin{cases} x + 2y \geq 0 \\ x - 2y \leq 0 \end{cases}$$

Sigui la funció objectiu $z = x + 3y$, on els coeficients de x i y són positius. Aquesta funció, té màxim en la regió factible?



La funció té un màxim en el punt A, que és l'últim punt que toca de la regió. És clar que mentre la funció es desplaça cap amunt, z va augmentant fins a prendre el valor $z = 0 + 3 \cdot 0 = 0$ en el màxim. A partir d'aquí, la funció i la regió ja no tenen punts en comú.

21. Sigui la regió factible R de vèrtexs A, B, C i D i la funció objectiu $z = 2x + y$. A la figura hi ha representada la recta $2x + y = 0$, que correspon als punts on la funció objectiu val 0:



- Calcula el conjunt d'inequacions que determinen la regió donada.
- Calcula en quin punt s'assoleix el valor màxim i el valor mínim d'aquesta funció objectiu z . Quin serà el valor de z en cadascun dels casos?
- Per a quins valors de z la funció objectiu talla la regió factible? És $z = 8$ algun d'aquests valors?

a) Es calculen les rectes AB: $x = 0$, BD: $x - 2y = -4$, DC: $3x + y = 9$ i CA: $x + 3y = 3$.

El sistema d'inequacions és

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x - 2y \geq -4 \\ 3x + y \leq 9 \\ x + 3y \geq 3 \end{cases}$$

b) Atès que la regió és tancada, per buscar els extrems ho fem amb una taula de valors:

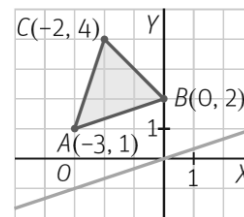
	A(0, 1)	B(0, 2)	C(3, 0)	D(2, 3)
$z = 2x + y$	$z = 2 \cdot 0 + 1 = 1$	$z = 2 \cdot 0 + 2 = 2$	$z = 2 \cdot 3 + 0 = 6$	$z = 2 \cdot 2 + 3 = 7$

Pren el valor màxim a D i el mínim a A. En el valor màxim $z = 7$, i en el valor mínim $z = 1$.

c) La funció talla la regió factible entre $z = 1$ i $z = 7$. Per tant, $z = 8$ no és cap d'aquests valors.

22. Considerem la funció objectiu $z = x - 3y$ i la regió R de la figura.

- Comprova que en el vèrtex $C(-2, 4)$ s'assoleix el valor mínim de la funció.
- Calcula en quin punt o en quins punts s'assoleix el màxim de la funció. Té una única solució?
- Si té infinites solucions òptimes, indica a la figura quines són.



- Es calcula el valor de la funció z en cadascun dels vèrtexs de la regió tancada:

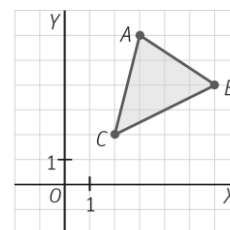
	$A(-3, 1)$	$B(0, 2)$	$C(-2, 4)$
$z = x - 3y$	$z = -3 - 3 \cdot 1 = -6$	$z = 0 - 3 \cdot 2 = -6$	$z = -2 - 3 \cdot 4 = -14$

Efectivament, $z = -14$ a C i és el valor mínim.

- El màxim s'assoleix a A i B ; per tant, té més d'una solució
- Si z assoleix un màxim en els vèrtexs A i B , llavors assoleix el mateix valor en qualsevol punt del segment AB que està situat sobre la recta $x - 3y = -6$; per exemple, un punt del segment és $\left(-1, \frac{5}{3}\right)$ i $z = -1 - 3 \cdot \frac{5}{3} = -1 - 5 = -6$.

23. Considera la regió factible R de la figura i la funció objectiu $z = 2x - y$.

- Determina el sistema d'inequacions que determina la regió donada.
- Calcula per a quins valors de x i y la funció arriba al màxim. Quant val aquest màxim?
- Calcula per a quins valors de x i y la funció arriba al mínim. Quant val aquest mínim?



- Les rectes $AB: 2x + 3y = 24$, $BC: x - 2y = -2$ i $CA: 4x - y = 6$ determinen els costats.

$$\begin{cases} 4x - y \geq 6 \\ 2x + 3y \leq 24 \\ x - 2y \leq -2 \end{cases}$$

El sistema d'inequacions és

-

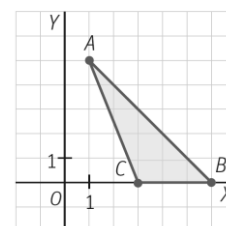
	$A(3, 6)$	$B(6, 4)$	$C(2, 2)$
$z = 2x - y$	$z = 2 \cdot 3 - 6 = 0$	$z = 2 \cdot 6 - 4 = 8$	$z = 2 \cdot 2 - 2 = 2$

En el punt B , o sigui, per a $x = 6$ i $y = 4$, arriba al seu màxim i aquest és $z = 8$.

- En el punt A arriba al seu mínim, $x = 3$ i $y = 6$. Aquest mínim és $z = 0$.

24. Considera la regió factible representada i la funció objectiu $z = 2x + 3y$.

- Determina el sistema d'inequacions que determina la regió factible.
- Calcula el valor màxim de la funció objectiu i per a quins valors de x i y s'assoleix.
- Calcula el valor mínim de la funció objectiu i per a quins valors de x i y s'assoleix.



- Les rectes $AB: x + y = 6$, $BC: y = 0$ i $CA: 5x + 2y = 15$ determinen els costats.

$$\begin{cases} x + y \leq 6 \\ 5x + 2y \geq 15 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

El sistema d'inequacions és

b)

	A(1, 5)	B(6, 0)	C(3, 0)
$z = 2x + 3y$	$z = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 5 = 17$	$z = 2 \cdot 6 + 3 \cdot 0 = 12$	$z = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 0 = 6$

El valor màxim s'assoleix per a $x = 1$ i $y = 5$. Aquest valor és $z = 17$.

c) El valor mínim s'assoleix quan $x = 3$ i $y = 0$. Aquest valor és $z = 6$.

25. Determina un sistema d'inequacions lineals amb dues incògnites que tingui per solució el polígon de la figura. Comprova que la funció $f(x, y) = x - 3y$ té un mínim en la regió donada. Quines són les coordenades on s'assoleix aquest mínim?

Les rectes AB: $3x - y = 0$, BC: $x - 5y = -14$, CD: $3x - y = 14$ i DA: $x - 5y = 0$ determinen els costats.

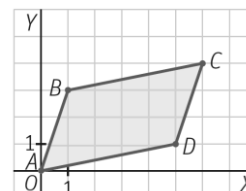
El sistema d'inequacions és

$$\begin{cases} 3x - y \geq 0 \\ x - 5y \geq -14 \\ 3x - y \leq 14 \\ x - 5y \leq 0 \end{cases}$$

Es fa la taula amb la funció i els vèrtexs:

	A(0, 0)	B(1, 3)	C(6, 4)	D(5, 1)
$f(x, y) = x - 3y$	$0 - 3 \cdot 0 = 0$	$1 - 3 \cdot 3 = -8$	$6 - 3 \cdot 4 = -6$	$5 - 3 \cdot 1 = 2$

El mínim està en el punt B de coordenades $x = 1$ i $y = 3$. El valor mínim és $f(x, y) = -8$.



26. Determina el sistema d'inequacions lineals amb dues incògnites que delimiten la regió del pla de la figura. Troba els punts de la regió on la funció $f(x, y) = -x + 4y + 2$ pren un valor màxim. Quin és aquest valor? Fes el mateix per al valor mínim.

Les rectes AB: $4x + y = 3$, BC: $x - 3y = -9$ i CD: $x + y = 7$ i DA: $4x - 3y = 7$ determinen els costats.

El sistema d'inequacions és

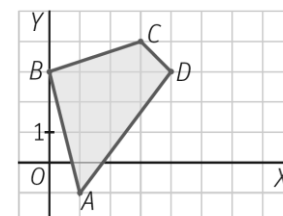
$$\begin{cases} 4x + y \geq 3 \\ x - 3y \geq -9 \\ x + y \leq 7 \\ 4x - 3y \leq 7 \end{cases}$$

Es fa la taula amb la funció i els vèrtexs:

	A(1, -1)	B(0, 3)	C(3, 4)	D(4, 3)
$f(x, y) = -x + 4y + 2$	$-1 + 4 \cdot (-1) + 2 = -3$	$4 \cdot 3 + 2 = 14$	$-3 + 4 \cdot 4 + 2 = 15$	$-4 + 4 \cdot 3 + 2 = 10$

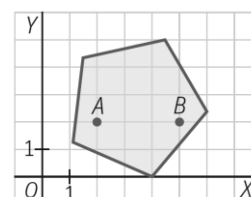
El valor màxim està en el punt C de coordenades: $x = 3$ i $y = 4$. El seu valor és $f(x, y) = 15$.

El mínim està en el punt A de coordenades: $x = 1$ i $y = -1$. El valor mínim és $f(x, y) = -3$.



27. La funció objectiu d'un problema de programació lineal és $f(x, y) = ax + by + c$. Per a quins valors de a , b i c la funció pren en el punt B un valor inferior al del punt A?

Les coordenades del punt A són (2, 2), i les del punt B són (5, 2).



$$\text{Si } f(B) < f(A) \Rightarrow 5a + 2b + c < 2a + 2b + c \Rightarrow 5a + 2b + c - 2a - 2b - c < 0 \Rightarrow 3a < 0 \Rightarrow a < 0$$

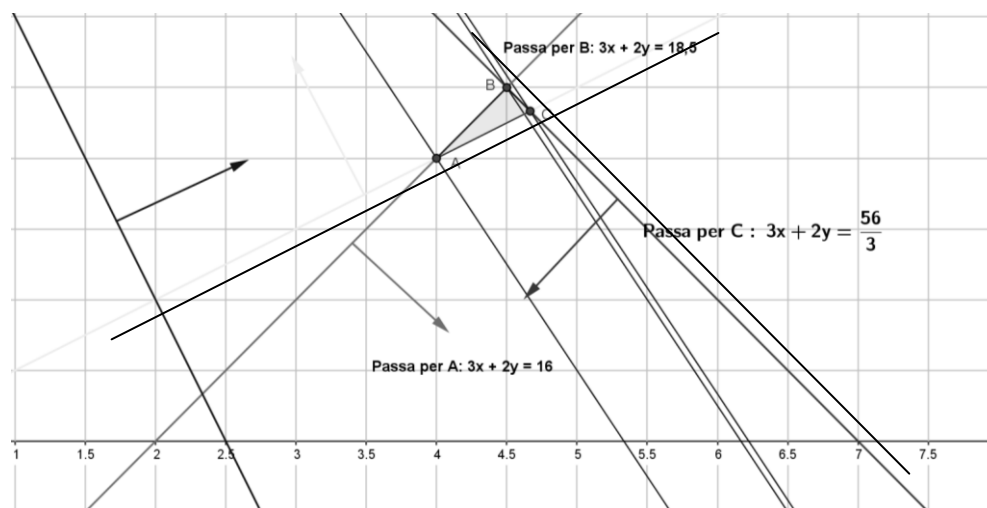
b i c poden prendre qualsevol valor.

28. Considera la funció objectiu $f(x, y) = 3x + 2y$ que està subjecta al conjunt de condicions següents:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 5 \\ x + y \leq 7 \\ x - y \geq 2 \\ \frac{1}{2}x - y \leq 0 \end{cases}$$

Determina gràficament el màxim i el mínim d'aquesta funció.

Les regions es tallen en el triangle de vèrtexs ABC . Aquests punts són $A(4, 2)$, $B\left(\frac{9}{2}, \frac{5}{2}\right)$ i $C\left(\frac{14}{3}, \frac{7}{3}\right)$. La funció $f(x, y)$ pren els valors 16, 18,5 i 18,65 respectivament. Aleshores té un mínim a A i un màxim a C .



29. Resol de forma gràfica els problemes de programació lineal següents.

a) Màxim i mínim de $z = 2x + y$

Subjecte a:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ y \geq 4 \\ x + y \geq 5 \\ x + 2y \geq 16 \end{cases}$$

b) Màxim i mínim de $z = x + y$

Subjecte a:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x \leq 9 \\ x + y \geq 5 \\ x - 2y \leq 5 \end{cases}$$

a) Representem la regió factible i la recta $2x + y = 0$.

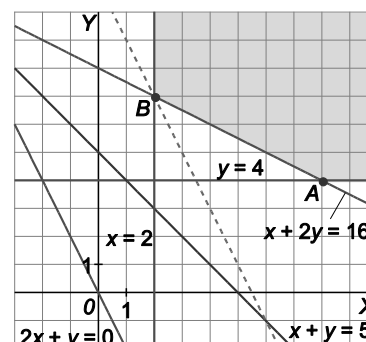
Com que la funció objectiu té coeficients de la x , i de la y , positius, el màxim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $2x + y = 0$ quan es desplaça de forma paral·lela en el sentit positiu de l'eix Y , i el mínim, a l'últim punt que toqui quan es desplaça en sentit negatiu.

Per tant:

El màxim no existeix.

El mínim es troba en el vèrtex $B(2, 7)$ i el seu valor és $z_B = 11$.

Nota: Observem que la condició $x + y \geq 5$ és redundant.



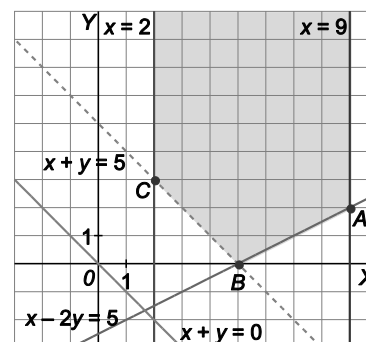
b) Representem la regió factible i la recta $x + y = 0$.

Com que la funció objectiu té coeficients de la x , i de la y , positius, el màxim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $x + y = 0$ quan es desplaci de forma paral·lela en el sentit positiu de l'eix Y , i el mínim, a l'últim punt que toqui quan es desplaci en sentit negatiu.

Per tant:

El màxim no existeix.

El mínim es troba en qualsevol punt del segment d'extremes $B(5, 0)$ i $C(2, 3)$, i el seu valor és $z_B = 5$.



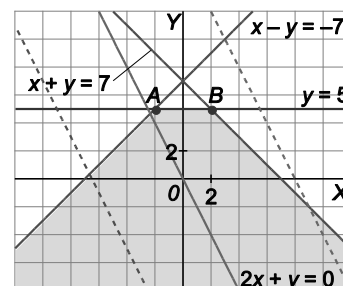
30. Comprova que la funció $f(x, y) = 2x + y$ no assoleix màxim ni mínim si està subjecta a les restriccions:

$$\begin{cases} x + y \leq 7 \\ x - y \geq -7 \\ y \leq 5 \end{cases}$$

Representem la regió factible i la recta $2x + y = 0$.

Com que la funció objectiu té coeficients de la x , i de la y , positius, el màxim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $2x + y = 0$ quan es desplaci de forma paral·lela en el sentit positiu de l'eix Y , i el mínim, a l'últim punt que toqui quan es desplaci en sentit negatiu.

Com que quan es desplaça en qualsevol dels dos sentits la recta $2x + y = 0$ toca en tot moment la regió factible, no existeix ni el màxim ni el mínim.



31. Dibuixa la regió determinada per les condicions:

$$\begin{cases} x - y \geq -3 \\ x - 3y \geq -13 \\ y \geq 0 \\ x + y \leq 11 \\ 0 \leq x \leq 7 \end{cases}$$

Troba de forma gràfica el màxim i el mínim de la funció $f(x, y) = x - 2y$ si està subjecta a les condicions anteriors.

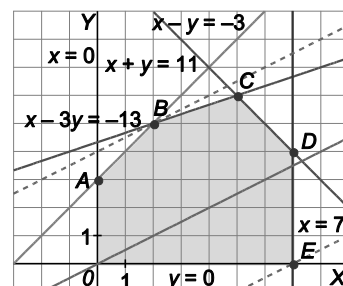
Representem la regió factible i la recta $x - 2y = 0$.

Com que la funció objectiu té coeficient de la x positiu i coeficient de la y negatiu, el màxim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $x - 2y = 0$ quan es desplaci de forma paral·lela en el sentit negatiu de l'eix Y , i el mínim, a l'últim punt que toqui quan es desplaci en sentit positiu.

Per tant:

El màxim es troba al vèrtex $E(7, 0)$, i el seu valor és $z_E = 7$.

El mínim es troba al vèrtex $B(2, 5)$, i el seu valor és $z_B = -8$.



32. Dibuixa la regió determinada per les condicions:

$$\begin{cases} 4x - 7y \leq 0 \\ 7x - 2y \leq 14 \\ x + y \geq 0 \\ x \geq -2 \end{cases}$$

Troba de forma gràfica el màxim i el mínim de la funció $f(x, y) = x - 4y$ si està subjecta a les condicions anteriors.

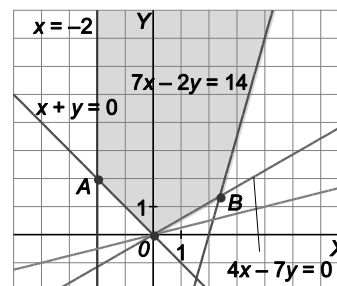
Representem la regió factible i la recta $x - 4y = 0$.

Com que la funció objectiu té coeficient de la x positiu i coeficient de la y negatiu, el màxim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $x - 4y = 0$ quan es desplaça de forma paral·lela en el sentit negatiu de l'eix Y , i el mínim, a l'últim punt que toqui quan es desplaça en sentit positiu.

Per tant:

El màxim es troba al vèrtex $O(0, 0)$, i el seu valor és $z_0 = 0$.

El mínim no existeix.

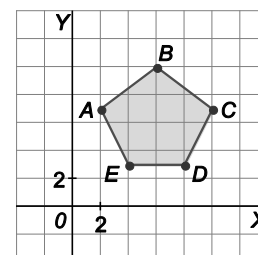


33. Avalua la funció objectiu $z = \frac{1}{2}x + \frac{7}{3}y$ als vèrtexs del recinte de la figura.

Els vèrtexs del recinte són: $A(2, 7)$, $B(6, 10)$, $C(10, 7)$, $D(8, 3)$ i $E(4, 3)$.

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs i tenim:

$$z_A = \frac{52}{3} \quad z_B = \frac{79}{3} \quad z_C = \frac{64}{3} \quad z_D = 11 \quad z_E = 9$$



34. Resol de forma analítica els problemes de programació lineal següents.

a) Min $z = 9x + y$

Subjecte a:

$$\begin{cases} x + y \leq 5 \\ 3x + y \geq 2 \\ 3x - 2y \leq 5 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

b) Min $z = 4x + 5y$

Subjecte a:

$$\begin{cases} \frac{x}{10} + \frac{y}{8} \leq 1 \\ \frac{x}{5} + \frac{y}{8} \geq 1 \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{4} \geq 1 \end{cases}$$

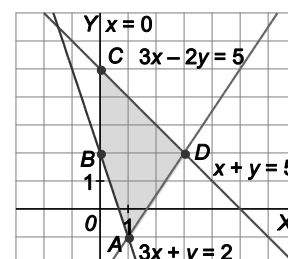
a) Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$A(1, -1)$, $B(0, 2)$, $C(0, 5)$ i $D(3, 2)$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_A = 8 \quad z_B = 2 \quad z_C = 5 \quad z_D = 29$$

Per tant, el mínim s'assolirà en el vèrtex $B(0, 2)$, i el seu valor és $z_B = 2$.



b) Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

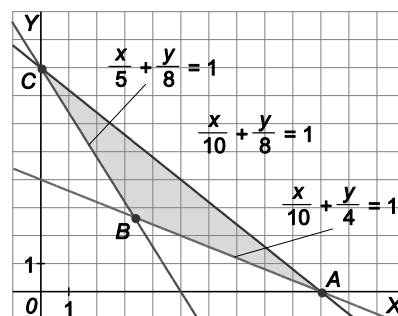
$$A(10, 0), B: \begin{cases} \frac{x}{5} + \frac{y}{8} = 1 \\ \frac{x}{10} + \frac{y}{4} = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x + 5y = 40 \\ 2x + 5y = 20 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right) \text{ i } C(0, 8)$$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_A = 40 \quad z_B = \frac{80}{3} \quad z_C = 40$$

Per tant, el mínim s'assoleix al vèrtex $B\left(\frac{10}{3}, \frac{8}{3}\right)$, i el seu valor és

$$z_B = \frac{80}{3}.$$



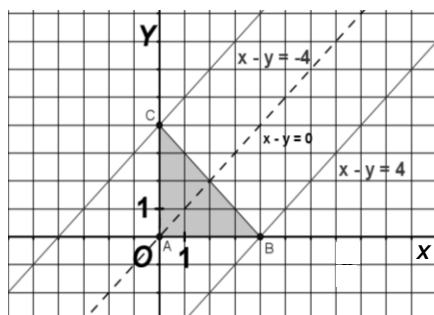
35. La regió factible d'un problema de programació lineal és la regió triangular que té per vèrtexs $A(0, 0)$, $B(4, 0)$ i $C(0, 4)$.

- Determina el màxim o màxims de la funció objectiu $z = x - y$.
- Determina el mínim o mínims de la funció objectiu $z = x - y$.

Coneguts els vèrtexs de la regió només cal veure el valor de la funció factible en aquests.

Vèrtexs	$A(0, 0)$	$B(4, 0)$	$C(0, 4)$
$z = x - y$	$z = 0$	$z = 4 - 0 = 4$	$z = 0 - 4 = -4$

- La funció $z = x - y$ té un màxim en el punt $B(4, 0)$ i el seu valor és $z = 4$.
- La funció $z = x - y$ té un mínim en $C(0, 4)$ i el seu valor és $z = -4$.



Síntesi

36. Sigui R la regió factible definida per les inequacions:

$$x \geq 3 \quad x \leq 5 \quad y \geq 1$$

- Raona si el punt $A(4, 5; 155)$ pertany a R .
 - Calcula els extrems de $f(x, y) = 2x - 3y$ a R .
 - Raona si hi ha cap punt de R on la funció f valgui 3,5. I 7,5?
- El punt A pertany a R , perquè compleix totes les inequacions que defineixen R .

- b) Representem la regió R i, com que no és fitada, la recta $2x - 3y = 0$.

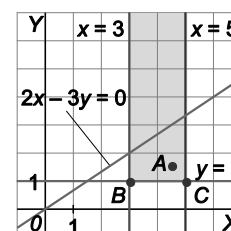
Com que el coeficient x de la funció objectiu és positiu i el coeficient de la y negatiu, el màxim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $2x - 3y = 0$ quan es desplaci de forma paral·lela en el sentit negatiu de l'eix Y , i el mínim, a l'últim punt que toqui quan es desplaci en sentit positiu.

Per tant:

El màxim es troba al vèrtex $C(5, 1)$, i el seu valor és $f_C = 7$.

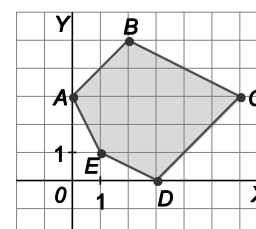
El mínim no existeix.

- c) La funció f assoleix en R qualsevol valor menor o igual a 7, per tant assoleix el valor 3,5 però no el 7,5.



37. Considera la regió factible de la figura. Determina el màxim i el mínim de les funcions objectiu següents.

- $z = x + y$
- $z = x - y$
- $z = x + 2y$
- $z = 2x + y$
- $z = x - 2y$



Els vèrtexs del recinte són: $A(0, 3)$, $B(2, 5)$, $C(6, 3)$, $D(3, 0)$ i $E(1, 1)$.

Avaluem les funcions objectiu als vèrtexs i tenim:

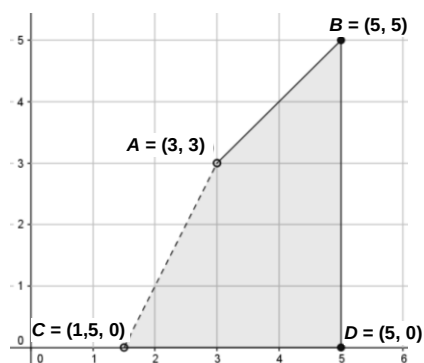
Funció objectiu	Màxim	Mínim
a) $z = x + y$	S'assoleix a C i val $z_C = 9$.	S'assoleix a E i val $z_E = 2$.
b) $z = x - y$	S'assoleix a qualsevol punt de CD i val $z_C = 3$.	S'assoleix a qualsevol punt de AB i val $z_A = -3$.
c) $z = x + 2y$	S'assoleix a qualsevol punt de BC i val $z_B = 12$.	S'assoleix a qualsevol punt de DE i val $z_D = 3$.
d) $z = 2x + y$	S'assoleix a C i val $z_C = 15$.	S'assoleix a qualsevol punt de AE i val $z_A = 3$.
e) $z = x - 2y$	S'assoleix a D i val $z_C = 3$.	S'assoleix a B i val $z_B = -8$.

38. Sigui S la regió dels punts del pla de coordenades més grans o iguals que zero i que compleixen les condicions següents:

- L'abscissa és superior o igual a l'ordenada i inferior o igual a 5.
- El doble de l'abscissa menys l'ordenada és més gran que 3.

Representa gràficament el conjunt S . La funció $f(x, y) = 4x + y$ pren algun valor màxim en aquesta regió?

Les condicions de l'enunciat són:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ y \leq x \leq 5 \\ 2x - y > 3 \end{cases}$$


S'observa que A i C no són punts de la regió perquè no compleixen la condició $2x - y > 3$.

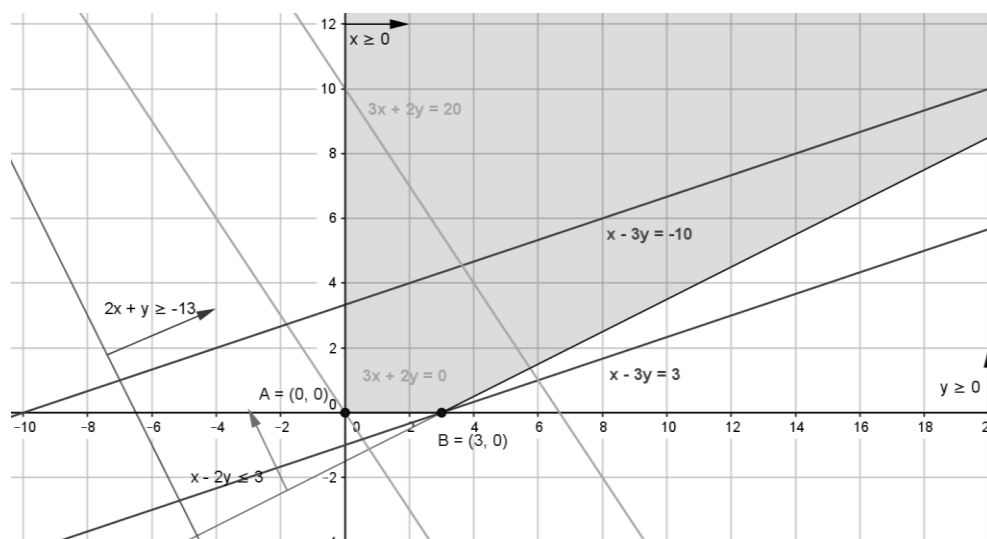
	$B(5, 5)$	$D(5, 0)$
$f(x, y) = 4x + y$	$4 \cdot 5 + 5 = 25$	$4 \cdot 5 + 0 = 20$

Pren un valor màxim en el punt B.

39. Considera la regió factible limitada pel sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x - 2y \leq 3 \\ 2x + y \geq -13 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

- a) Determina gràficament el màxim de la funció objectiu $z = x - 3y$ que satisfà les condicions anteriors. Indica per a quins valors de x i y s'obté.
- b) Determina gràficament el mínim de la funció objectiu $z = 3x + 2y$ que satisfà les condicions anteriors. Indica per a quins valors de x i y s'obté.



- a) La funció objectiu $z = x - 3y$ té un màxim a B . El valor és $z = 3$
 b) La funció $z = 3x + 2y$ té un mínim a A . El valor és $z = 0$

40 Resol el problema de programació lineal entera.

$$\text{Max } z = x + y$$

$$\text{Subjecte a: } \begin{cases} x - 3y \leq 6 \\ -3x + y \leq 3 \\ 5x + 4y \leq 20 \\ x \geq 0, y \geq 0 \text{ en què } x, y \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Representem la regió factible; de fet, la regió factible la formen únicament els punts de coordenades enteres del recinte representat. Per això, tot i que la regió és fitada, emprarem el mètode gràfic, per la qual cosa també representem la recta $x + y = 0$.

Com que la funció objectiu té coeficients de la x , i de la y , positius, el màxim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $x + y = 0$ quan es desplaça de forma paral·lela en el sentit positiu de l'eix Y .

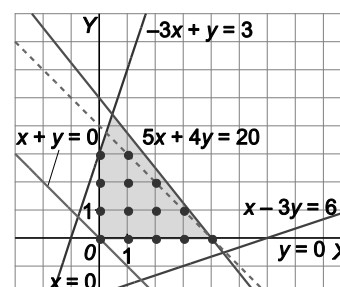
Per tant, el màxim s'assoleix en els punts $P_1(1, 3)$, $P_2(2, 2)$, $P_3(3, 1)$ i $P_4(4, 0)$, i el seu valor és $z = 4$.

Nota: Si haguéssim aplicat el mètode analític, obtindríem que el màxim s'assoleix en el punt:

$$P : \begin{cases} -3x + y = 3 \\ 5x + 4y = 20 \end{cases} \Rightarrow P\left(\frac{8}{17}, \frac{75}{17}\right)$$

les coordenades del qual no són enteres i, per tant, no pot ser la solució del problema de programació entera.

Així doncs, quan es resol un problema de programació entera emprant un mètode analític, si el vèrtex en què s'assoleix el màxim o el mínim no té coordenades, hem de recórrer al mètode gràfic.



41. Donat el problema de programació lineal següent

$$\text{Max } z = 2x + \lambda y$$

$$\text{Subjecte a: } \begin{cases} 2x - 3y \geq -9 \\ 5x + 2y \leq 25 \\ 0 \leq x \leq 5, y \geq 0 \end{cases}$$

Troba els valors de λ per als quals la solució òptima del problema es troba al vèrtex $B(3, 5)$.

Els vèrtexs de la regió factible són:

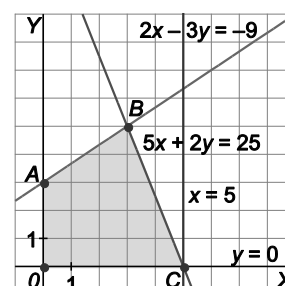
$$O(0, 0) \quad A(0, 3) \quad B(3, 5) \quad C(5, 0)$$

El valor de la funció objectiu als vèrtex és:

$$z_O = 0 \quad z_A = 3\lambda \quad z_B = 6 + 5\lambda \quad z_C = 10$$

Perquè el màxim s'assoleixi a B ha de ser:

$$\begin{cases} 6 + 5\lambda \geq 0 \\ 6 + 5\lambda \geq 3\lambda \\ 6 + 5\lambda \geq 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda \geq -\frac{6}{5} \\ \lambda \geq -3 \\ \lambda \geq \frac{4}{5} \end{cases} \Rightarrow \lambda \geq \frac{4}{5}$$



QÜESTIONS

42. Es considera un problema de programació lineal amb dues variables. Indica si les afirmacions següents són veritables o falses:

- a) Si el punt (a, b) és una solució òptima del problema, aleshores obligatòriament és un vèrtex de la regió factible.
 - b) Si el punt (a, b) és l'única solució òptima del problema, aleshores (a, b) obligatòriament pertany a la regió factible.
 - c) Si el punt (a, b) és l'única solució òptima del problema, aleshores és obligatòriament un vèrtex de la regió factible.
 - d) Si (a, b) no pertany a la regió factible, aleshores no pot ser solució del problema.
-
- a) Falsa. Una solució pot ser òptima i no ser vèrtex, ja que pot ser una de les infinites solucions d'un problema de programació lineal.
 - b) Veritable. Si el punt (a, b) és l'única solució òptima del problema, aleshores (a, b) obligatòriament pertany a la regió factible, de fet, qualsevol solució òptima (tant si és única com si no) ha de pertànyer a la regió factible.
 - c) Veritable. Si el punt (a, b) és l'única solució òptima del problema, aleshores és obligatòriament un vèrtex de la regió factible.
 - d) Veritable, qualsevol possible solució del problema ha de pertànyer a la regió factible.

43. Escriu un problema de programació lineal amb una regió factible que sigui no buida, que estigui determinada per restriccions de desigualtat no estrictes i que no tingui solució ni per al mínim ni per al màxim. Podria ser fitada aquesta regió factible?

L'exercici 47 ens serveix d'exemple.

Qualsevol regió que ens serveixi d'exemple ha de ser no fitada.

44. La recta $2x + 5y = k$ es desplaça de forma paral·lela des de l'origen de coordenades cap a la part positiva de l'eix Y. Indica si les afirmacions següents són veritables o falses:

- a) El valor de k és més petit com més gran és la distància que separa la recta de l'origen de coordenades.
- b) El valor de k és més gran com més petita és la distància que separa la recta de l'origen de coordenades.
- c) El valor de k és constant.

Totes les afirmacions són falses. En realitat, el valor de k és més gran com més gran és la distància que separa la recta de l'origen de coordenades, ja que com que els coeficients de x i de y són positius, el valor k és més gran com més s'allunyi de la recta de l'origen de coordenades en el sentit positiu de l'eix Y.

PROBLEMES

45. En una granja hi ha un total de 9000 conills. La dieta mensual mínima que ha de consumir cada conill és de 48 unitats d'hidrats de carboni i 60 unitats de proteïnes. Al mercat hi ha dos tipus de productes, A i B, que aporten aquestes necessitats de consum. Cada envàs A conté 2 unitats d'hidrats de carboni i 4 unitats de proteïnes i cada envàs de B conté 3 unitats d'hidrats de carboni i 3 unitats de proteïnes. Sabent que cada envàs de A costa 0,24 € i que cada envàs de B costa 0,20 €, determina, justificant la resposta:

- a) El nombre d'envasos de cada tipus que cal adquirir per a la granja amb l'objectiu que el cost sigui mínim i es cobreixin les necessitats de consum mensuals de tots els conills.
- b) El valor d'aquest cost mensual.

a) Les variables de decisió són:

x envasos de tipus A (per a un conill) y envasos de tipus B (per a un conill)

Volem trobar el cost mínim $z = 0,24x + 0,2y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq 48 \\ 4x + 3y \geq 60 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Representem la regió factible i, com que no és fitada, la recta $0,24x + 0,2y = 0$.

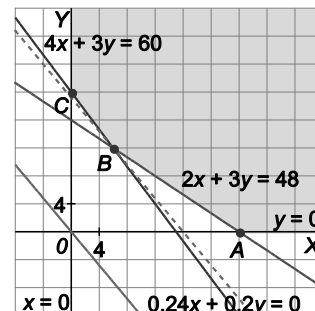
Com que la funció objectiu té coeficients de la x , i de la y , positius, el mínim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $0,24x + 0,2y = 0$ quan es desplaça de forma paral·lela en el sentit negatiu de l'eix Y .

Per tant, el mínim es troba al vèrtex B:

$$B: \begin{cases} 2x + 3y = 48 \\ 4x + 3y = 60 \end{cases} \Rightarrow B(6, 12)$$

És a dir, per obtenir el cost mínim s'han d'adquirir $x = 6$ envasos A i $y = 12$ envasos B per a cada conill. Per tant, per als 9000 conills, s'han d'adquirir 54 000 envasos A i 108 000 envasos B.

Nota: Veient la representació gràfica podrien sorgir dubtes sobre si el mínim s'assoleix al vèrtex B o al vèrtex C; en aquest cas, podem calcular aquests vèrtexs i avaluar la funció objectiu per determinar en quin d'ells s'assoleix verdaderament el mínim.



b) El cost mensual és $z_B = 3,84$ € per conill. El cost mensual total és de 34 560 €.

46. En un hospital s'irradia amb dues bombes de cobalt, C_1 i C_2 . Cada dosi de radiació amb C_1 aporta 0,3 kilorads al centre del tumor, 0,25 kilorads a altres regions del tumor, 0,15 kilorads a regions crítiques contigües i 0,2 kilorads a zones d'anatomia sana contigua. Cada dosi de radiació amb C_2 aporta a aquestes mateixes zones 0,2, 0,25, 0,05 i 0,25 kilorads, respectivament. Per tractar un tumor al mediastí, l'equip mèdic considera necessari aportar almenys 6 kilorads al centre del tumor i cal aportar exactament 6 kilorads a altres regions del tumor. Tanmateix, l'aportació de més de 2,4 kilorads a les regions crítiques contigües seria fatal. Amb quantes dosis de cada font haurà de fer-se el tractament per minimitzar l'aportació de kilorads a l'anatomia sana?

Les variables de decisió són:

x dosis amb la bomba C_1 y dosis amb la bomba C_2

Volem trobar el mínim de $z = 0,2x + 0,25y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 0,3x + 0,2y \geq 6 & \text{dosi mínima al centre del tumor} \\ 0,25x + 0,25y = 6 & \text{dosi exacta en altres regions del tumor} \\ 0,15x + 0,05y \leq 2,4 & \text{dosi màxima en regions crítiques contigües} \\ x \geq 0, y \geq 0 & \text{condicions de no negativitat} \end{cases}$$

De la segona restricció obtenim $0,26x + 0,25y = 6 \Rightarrow y = 24 - x$, amb la qual cosa podem simplificar el problema buscant el mínim de $z = 0,2x + 0,25(24 - x) = 6 - 0,05x$ subjecte a:

$$\begin{cases} 0,3x + 0,2(24 - x) \geq 6 \\ 0,15x + 0,05(24 - x) \leq 2,4 \\ 0 \leq x \leq 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 12 \\ x \leq 12 \\ 0 \leq x \leq 24 \end{cases} \Rightarrow x = 12$$

Per tant, el mínim de radiació a l'anatomia sana es produirà quan es faci el tractament amb 12 dosis de cada font.

47. Una drassana rep un encàrrec per reparar vaixells de la flota d'un armador composta per pesquers de 500 tones i iots de 100 tones. La reparació de cada pesquer necessita 100 hores i la de cada iot, 50 hores. La drassana disposa de 1600 hores per fer les reparacions. Per política d'empresa, la drassana no accepta encàrrecs de més de 12 pesquers ni més de 12 iots. Les reparacions es paguen a 100 € la tona. Quants vaixells de cada classe ha de reparar la drassana per maximitzar l'ingrés amb aquest encàrrec? Quin és aquest ingrés màxim?

Les variables de decisió són:

x pesquers y iots

Volem trobar l'ingrés màxim $z = 50000x + 10000y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 100x + 50y \leq 1600 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + y \leq 32 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 16 \end{cases}$$

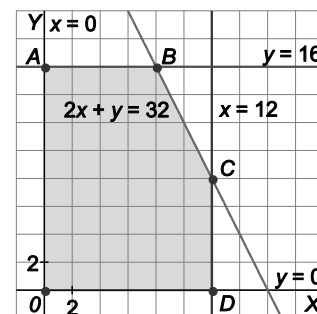
Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$O(0, 0)$ $A(0, 16)$ $B(8, 16)$ $C(12, 8)$ $D(12, 0)$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$z_O = 0$ $z_A = 160000$ $z_B = 560000$ $z_C = 680000$ $z_D = 600000$

Per tant, l'ingrés màxim es troba en el vèrtex C , i el seu valor és $z_C = 680000$, és a dir, s'han de que reparar $x = 12$ pesquers i $y = 8$ iots, i s'obtenen uns ingressos de 680 000 €.



48. Un pagès té 40 ha de terreny on pot plantar ordi o blat de moro (o no plantar res). Cada hectàrea d'ordi necessitarà 5 hm³ d'aigua, mentre que cada hectàrea de blat de moro necessitarà 10 hm³. El pagès podrà disposar fins a 225 hm³ d'aigua. El benefici que aconseguirà per cada hectàrea d'ordi és de 100 € i per cada hectàrea de blat de moro, 160 €. A més, les hectàrees on no planti res les llogarà i aconseguirà un benefici de 50 €/ha. La normativa no li permet plantar més hectàrees de blat de moro que d'ordi. Quantes hectàrees d'ordi i quantes de blat de moro ha de plantar per maximitzar el benefici? Quin serà el benefici?

Les variables de decisió són:

x hectàrees d'ordi y hectàrees de blat de moro $40 - x - y$ hectàrees sense plantar

Volem determinar el màxim benefici $z = 100x + 160y + 50(40 - x - y) = 50x + 110y + 2000$ subjecte a:

$$\begin{cases} x + y \leq 40 \\ 5x + 10y \leq 225 \\ y \leq x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 40 \\ x + 2y \leq 45 \\ y \leq x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

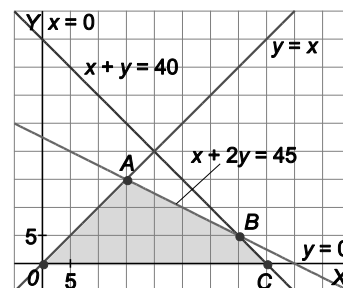
Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$O(0, 0)$ $A(15, 15)$ $B(35, 5)$ $C(40, 0)$

Avaluem la funció objectiu en els vèrtexs:

$z_O = 0$ $z_A = 4400$ $z_B = 4300$ $z_C = 4000$

Per tant, el màxim benefici es localitza en el vèrtex A i el seu valor és $z_A = 4400$, és a dir, cal plantar $x = 15$ hectàrees d'ordi, $y = 15$ hectàrees de blat de moro i deixar sense plantar 10 hectàrees. S'obtenen així uns beneficis de 4400 €.



49. En un magatzem de productes alimentaris frescos disposen de 70 caixes de taronges, 120 caixes de peres i 110 caixes de pomes que volen vendre abans que deixin de ser aptes per al consum. Per fer-ho, es preparen dos tipus de lots: el lot A conté una caixa de taronges, dues caixes de peres i una caixa de pomes i es vendrà a 6 €, i el lot B conté una caixa de taronges, una de peres i dues de pomes i es vendrà a 7 €. Calcula quants lots s'hauran de fer de cada tipus perquè els ingressos per les vendes siguin màxims.

Les variables de decisió són:

x nombre de lots A y nombre de lots B

Volem trobar el màxim de $z = 6x + 7y$ subjecte a:

$$\begin{cases} x + y \leq 70 \\ 2x + y \leq 120 \\ x + 2y \leq 110 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

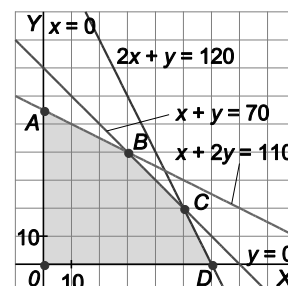
Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$O(0, 0)$ $A(0, 55)$ $B(30, 40)$ $C(50, 20)$ $D(60, 0)$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$z_O = 0$ $z_A = 385$ $z_B = 460$ $z_C = 440$ $z_D = 360$

Per tant, el màxim es troba al vèrtex B, i el seu valor és $z_B = 460$, és a dir, s'han de fer $x = 30$ lots A i $y = 40$ lots B, i s'obtenen uns ingressos de 460 €.



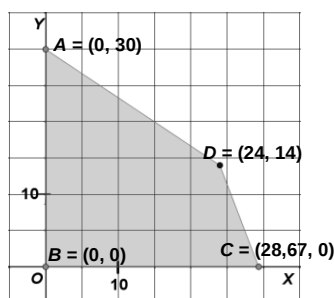
50. Una fàbrica de mobles produeix dos tipus de sofàs A i B. La fàbrica té dues seccions: fusteria i tapisseria. Fer un sofà del tipus A requereix 2 h de fusteria i 3 h de tapisseria; en canvi, un sofà del tipus B requereix 3 h de fusteria i 1 h de tapisseria. Si els treballadors de fusteria treballen un màxim de 90 hores i els de tapisseria 86, quantes unitats de cada tipus han de produir perquè els guanys siguin màxims. Se sap que un sofà del tipus A produeix uns guanys de 90 € i un del tipus B, de 60 €

Sigui x el nombre de sofàs de tipus A que es produeixen i y el nombre de sofàs del tipus B.

El benefici és $f(x, y) = 90x + 60y$ i està subjecta al sistema d'inequacions:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + 3y \leq 90 \\ 3x + y \leq 86 \end{cases}$$

La gràfica de la regió factible és



I els seus vèrtexs són $A(0, 30)$, $B(0, 0)$, $C(28,67, 0)$ i $D(24, 14)$.

Els valors de la funció benefici

$z_A = 90 \cdot 0 + 60 \cdot 30 = 1800$ $z_B = 90 \cdot 0 + 60 \cdot 0 = 0$ $z_C = 90 \cdot 28,67 + 60 \cdot 0 = 2580,3$ $z_D = 90 \cdot 24 + 60 \cdot 14 = 3000$

El màxim benefici es localitza en el vèrtex D, això vol dir que s'ha de produir 24 sofàs del tipus A i 14 del tipus B.

51. Un majorista ven productes congelats que presenta en envasos de dues mides, petits i grans. La capacitat dels seus congeladors no li permet emmagatzemar més de 1000 envasos en total. En funció de la demanda sap que ha de mantenir unes existències mínimes de 100 envasos petits i 200 de grans. La demanda d'envasos grans és igual o superior a la d'envasos petits. El cost per emmagatzematge és de 10 cèntims per cada envàs petit i de 20 cèntims d'euro per cada envàs gran. Quin nombre d'envasos de cada tipus proporciona el mínim cost d'emmagatzematge?

Les variables de decisió són:

x envasos petits y envasos grans

Volem trobar mínim de $z = 10x + 20y$ subjecte a:

$$\begin{cases} x + y \leq 1000 \\ x \geq 100 \\ y \geq 200 \\ y \geq x \end{cases}$$

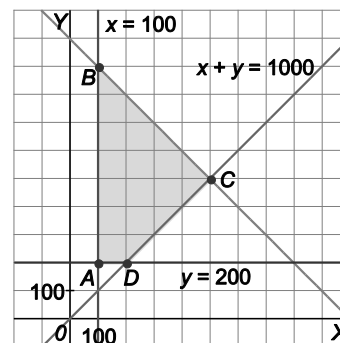
Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$A(100, 200)$ $B(100, 900)$ $C(500, 500)$ $D(200, 200)$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$z_A = 5000$ $z_B = 19000$ $z_C = 15000$ $z_D = 6000$

Per tant, el mínim es trobarà al vèrtex A, i el seu valor és $z_A = 5000$, és a dir, s'han d'emmagatzemar $x = 100$ envasos petits i $y = 200$ envasos grans, amb un cost de 5000 ct. = 50 €.

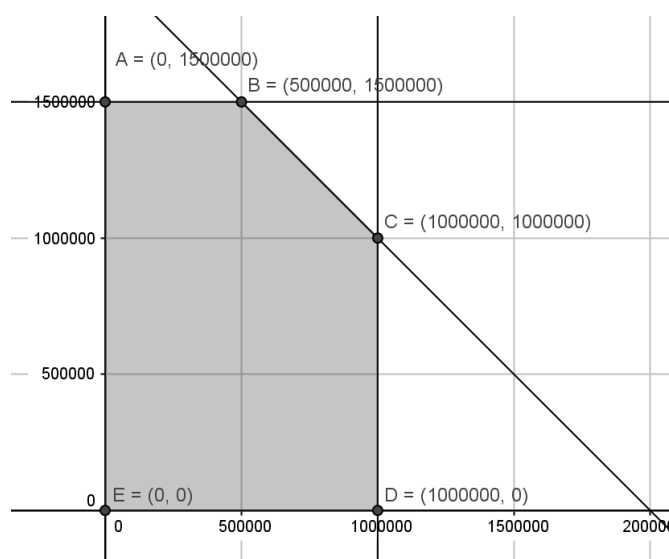


52. Una empresa d'inversions estudia la possibilitat d'invertir capital en dues cooperatives A i B. En la cooperativa A, té l'opció d'invertir fins a un milió d'euros, i en la cooperativa B, fins a un milió i mig. L'empresa disposa de dos milions d'euros. Així mateix, espera una rendibilitat del 25 % en la cooperativa A, i del 15 % en la B. Com ha de distribuir la inversió si vol obtenir-ne la màxima rendibilitat?

Sigui x = diners que s'inverteix en la cooperativa A i y = diners que s'inverteix en la cooperativa B.

La màxima rendibilitat s'obté quan la funció $R(x, y) = 0,25x + 0,15y$ té un màxim, tenint en compte les següents restriccions:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 1000000 \\ 0 \leq y \leq 1500000 \\ 0 \leq x + y \leq 2000000 \end{cases}$$



Els vèrtexs de la regió factible són:

$A(0, 0)$, $B(0, 1\,500\,000)$, $C(500\,000, 1\,500\,000)$, $D(1\,000\,000, 1\,000\,000)$ i $E(1\,000\,000, 0)$

Es calcula la rendibilitat:

$$R(A) = 0,25 \cdot 0 + 0,15 \cdot 0 = 0$$

$$R(B) = 0,25 \cdot 0 + 0,15 \cdot 1\,500\,000 = 225\,000$$

$$R(C) = 0,25 \cdot 500\,000 + 0,15 \cdot 1\,500\,000 = 350\,000$$

$$R(D) = 0,25 \cdot 1\,000\,000 + 0,15 \cdot 1\,000\,000 = 400\,000$$

$$R(E) = 0,25 \cdot 1\,000\,000 + 0,15 \cdot 0 = 250\,000$$

La major rendibilitat s'obté quan s'inverteix 1 000 000 € en cada cooperativa.

53. En un taller d'artesanía es fabriquen gerros decoratius de dos tipus A i B. Cada gerro de tipus A necessita 30 minuts de modelat i 40 minuts de pintura i es ven a 40 €. Cada gerro de tipus B requereix 40 minuts de modelat i 30 minuts de pintura i es ven a 35 €. Per fabricar aquests gerros es compta amb dos treballadors que fan el modelat, que treballen 5 hores al dia, i dos treballadors que fan la pintura, que treballen 5,5 hores al dia. Troba el nombre òptim de gerros que es poden fabricar al dia perquè els ingressos siguin màxims.

Les variables de decisió són:

x gerros de tipus A y gerros de tipus B

Volem trobar el màxim de $z = 40x + 35y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 30x + 40y \leq 600 \\ 40x + 30y \leq 660 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y \leq 60 \\ 4x + 3y \leq 66 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

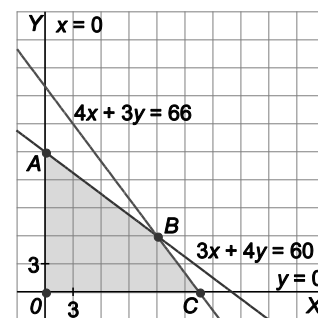
Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$O(0, 0) \quad A(0, 15) \quad B(12, 6) \quad C\left(\frac{33}{2}, 0\right)$$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_O = 0 \quad z_A = 525 \quad z_B = 690 \quad z_C = 660$$

Per tant, el màxim es troba al vèrtex B i el seu valor és $z_B = 690$, és a dir, s'han de fabricar diàriament $x = 12$ gerros de tipus A i $y = 6$ gerros de tipus B, i s'obtenen uns ingressos de 690 €.



54. Un gelater artesà elabora dos tipus de gelats A i B. Els gelats tipus A porten 10 g de nata i els gelats tipus B porten 20 g de xocolata. Es disposa de 2000 g de nata, 4000 g de xocolata i diàriament es poden elaborar 350 gelats com a màxim. Per cada gelat tipus A obté un benefici d'1,50 € i per cada gelat tipus B el benefici és d'1 €. Determina les unitats de cada tipus de gelat que ha d'elaborar diàriament perquè el seu benefici sigui màxim i calcula'l.

Les variables de decisió són:

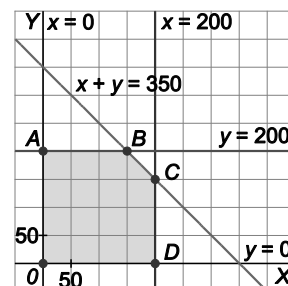
x gelats tipus A y gelats tipus B

Volem trobar el màxim de $z = 1,5x + y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 0 \leq 10x \leq 2000 \\ 0 \leq 20y \leq 4000 \\ x + y \leq 350 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x \leq 200 \\ 0 \leq y \leq 200 \\ x + y \leq 350 \end{cases}$$

Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$O(0, 0) \quad A(0, 200) \quad B(150, 200) \quad C(200, 150) \quad D(200, 0)$$



Evaluem la funció objectiu en els vèrtexs:

$$z_O = 0 \quad z_A = 200 \quad z_B = 425 \quad z_C = 450 \quad z_D = 300$$

Per tant, el màxim es localitza en el vèrtex C i el seu valor és $z_C = 450$, és a dir, s'han d'elaborar diàriament $x = 200$ gelats del tipus A i $y = 150$ gelats del tipus B. Els beneficis que s'obtenen són de 450 €.

55. Un distribuïdor d'oli va a un molí per comprar dos tipus d'oli, A i B. La quantitat màxima que pot comprar és de 12 000 L en total. L'oli de tipus A costa 3 €/L i el de tipus B costa 2 €/L. Necessita adquirir almenys 2000 L de cada tipus d'oli. D'altra banda, el cost total per la compra d'oli no ha de ser superior a 30 000 €. El benefici que s'aconseguirà amb la venda de l'oli serà d'un 25% sobre el preu que ha pagat per l'oli de tipus A i d'un 30% sobre el preu que ha pagat per l'oli de tipus B. Quants litres de cada tipus d'oli s'hauran d'adquirir per maximitzar el benefici? Troba el valor del benefici màxim.

Les variables de decisió són:

x litres d'oli A y litres d'oli B

Volem trobar el màxim de $z = 0,25 \cdot 3x + 0,3 \cdot 2y = 0,75x + 0,6y$ subjecte a:

$$\begin{cases} x + y \leq 12000 \\ x \geq 2000 \\ y \geq 2000 \\ 3x + 2y \leq 30000 \end{cases}$$

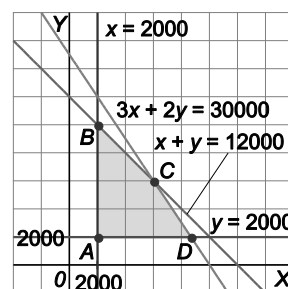
Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$A(2000, 2000) \quad B(2000, 10000) \quad C(6000, 6000) \quad D\left(\frac{26000}{3}, 2000\right)$$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_A = 2700 \quad z_B = 7500 \quad z_C = 8100 \quad z_D = 7700$$

Per tant, el màxim es troba en el vèrtex C i el seu valor és $z_C = 8100$, és a dir, s'han d'adquirir 6000 litres de cada tipus d'oli, i s'obtenen uns beneficis de 8100 €.



56. Un taller es dedica a la revisió de dues marques A i B d'automòbils. Ha de revisar tant el sistema elèctric com el funcionament del motor. Cada automòbil de tipus A requereix 30 minuts per a la revisió elèctrica i uns altres 30 minuts per a la revisió del motor. Cada automòbil de tipus B precisa 30 minuts per a la revisió elèctrica i 60 minuts per a la revisió del motor.

La disponibilitat dels operaris fan que es compti amb un màxim de 25 hores de treball setmanals per a la revisió elèctrica i de 35 hores de treball setmanals per a la revisió del motor.

La revisió d'un automòbil de tipus A proporciona uns beneficis de 35 €, i la d'un de tipus B, 50 €.

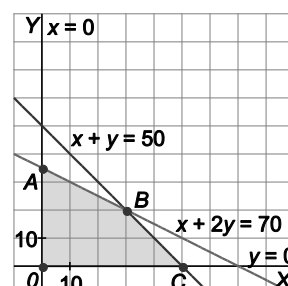
- Quants automòbils de cada tipus s'han d'admetre a la setmana de manera que es maximitzin els beneficis?
- Per a aquesta solució òptima, quins beneficis màxims s'obtingran?
- Pot prescindir-se d'alguna de les hores disponibles amb aquesta producció?

a) Les variables de decisió són:

x automòbils de tipus A y automòbils de tipus B

Volem trobar el màxim de $z = 35x + 50y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 30x + 30y \leq 1500 \\ 30x + 60y \leq 2100 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 50 \\ x + 2y \leq 70 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$O(0, 0) \quad A(0, 35) \quad B(30, 20) \quad C(50, 0)$$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_0 = 0 \quad z_A = 1750 \quad z_B = 2050 \quad z_C = 1750$$

Per tant, el màxim es troba en el vèrtex B , és a dir, setmanalment s'han d'admetre $x = 30$ automòbils de tipus A i $y = 20$ automòbils de tipus B .

b) Els beneficis que s'obtindran són $z_B = 2050$ €.

c) No es pot prescindir de cap de les hores disponibles, perquè en el vèrtex B són necessàries totes les hores, tant per revisar el sistema elèctric com el funcionament del motor.

57. En un concurs televisiu es proposa als concursants dos tipus de proves: unes de més senzilles, que valen 6 punts cadascuna, i unes altres de més complicades, que valen 10 punts. El temps màxim de què es disposa és de 90 minuts, i en aquest temps es proposen 8 proves del primer tipus i 6 del segon. Una concursant ha calculat que necessita 5 minuts per respondre cada prova de 6 punts 10 minuts per respondre cada prova de 10 punts. La noia sap que no disposa del temps suficient per contestar-les totes i es pregunta quina serà l'estratègia que haurà de seguir. Ha determinar quantes proves de cada tipus ha de realitzar per obtenir la millor puntuació possible suposant que està capacitada per superar-les totes. La pots ajudar?

Sigui x el nombre de preguntes del primer tipus que contesta i y el nombre de les de segon tipus.

El temps màxim de què disposa és $5x + 10y \leq 90$.

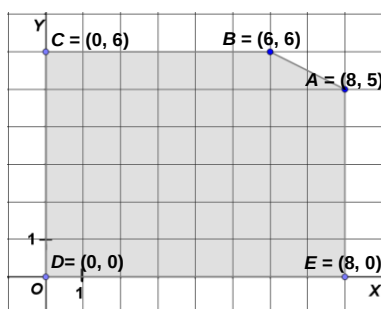
El nombre màxim de preguntes del primer tipus és $x \leq 8$ i $y \leq 6$.

Es vol trobar el màxim de la funció puntuació, $z = 6x + 10y$

El sistema:

$$\begin{cases} 5x + 10y \leq 90 \\ 0 \leq x \leq 8 \\ 0 \leq y \leq 6 \end{cases}$$

Gràficament



Els vèrtexs són $A(8, 5)$, $B(6, 6)$, $C(0, 6)$, $D(0, 0)$ i $E(8, 0)$, i el valor de z a cadascun dels punts és:

$$z_A = 6 \cdot 8 + 10 \cdot 5 = 98 \quad z_B = 6 \cdot 6 + 10 \cdot 6 = 96 \quad z_C = 6 \cdot 0 + 10 \cdot 6 = 60$$

$$z_D = 6 \cdot 0 + 10 \cdot 0 = 0 \quad z_E = 6 \cdot 8 + 10 \cdot 0 = 48$$

La puntuació màxima l'obtindrà quan $x = 8$ i $y = 5$.

58. Un casal d'avis organitza un viatge per als 175 socis i contracta els serveis d'una empresa d'autocars que disposa de quatre autocars de 55 places i tres de 25 places. El lloguer de l'autocar gran costa 1500 € i el del petit, 700 €.

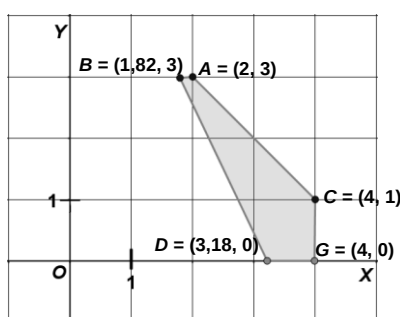
Quants autocars de cada tipus ha de contractar el casal perquè el cost del viatge sigui mínim sabent que l'empresa només disposa de 5 conductors per als dies indicats?

Sigui x el nombre d'autocars de 55 places i y el de 25 places.

El conjunt de restriccions és:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 3 \\ x + y \leq 5 \\ 55x + 25y \geq 175 \end{cases}$$

La funció objectiu és el cost que serà $f(x, y) = 1500x + 700y$



Considerem la taula amb només els vèrtexs enters:

	A(2, 3)	C(4, 1)	G(4, 0)
$f(x, y) = 1500x + 700y$	5100	6700	6000

El cost mínim és de 5100 euros i significa llogar 2 autocars de 55 places i 3 de 25 places. En total, el nombre de places serà $2 \cdot 55 + 3 \cdot 25 = 185$. Sobraran 10 places.

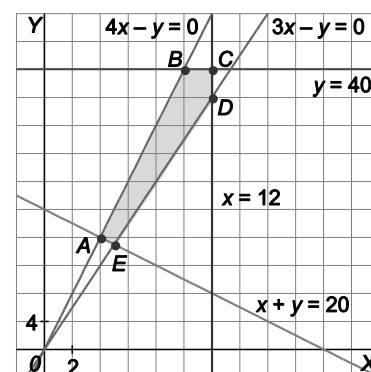
59. En un edifici públic es volen col·locar, almenys, 20 màquines expenedores de begudes calentes i begudes fredes. Hi ha disponibles 12 màquines de begudes calentes i 40 de begudes fredes. Es pretén que el nombre d'expenedores de begudes calentes no sigui superior a una tercera part del de begudes fredes i que, almenys, una cinquena part del total de màquines que es posin a l'edifici siguin de begudes calentes. D'acord amb aquestes condicions, quina combinació de màquines de cada tipus fa que la diferència del nombre de màquines de begudes menys el de begudes calentes posades sigui més gran?

Les variables de decisió són:

x màquines de begudes calentes y màquines de begudes fredes

Volem trobar el màxim de $z = y - x$ subjecte a:

$$\begin{cases} x + y \geq 20 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 40 \\ x \leq \frac{y}{3} \\ x \geq \frac{x+y}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \geq 20 \\ 0 \leq x \leq 12 \\ 0 \leq y \leq 40 \\ 3x - y \leq 0 \\ 4x - y \geq 0 \end{cases}$$



Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$A: \begin{cases} x+y=20 \\ 4x-y=0 \end{cases} \Rightarrow A(4, 16) \quad B: \begin{cases} y=40 \\ 4x-y=0 \end{cases} \Rightarrow B(10, 40) \quad C: \begin{cases} x=12 \\ y=40 \end{cases} \Rightarrow C(12, 40)$$

$$D: \begin{cases} x=12 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Rightarrow D(12, 36) \quad E: \begin{cases} x+y=20 \\ 3x-y=0 \end{cases} \Rightarrow E(5, 15)$$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_A = 12 \quad z_B = 30 \quad z_C = 28 \quad z_D = 24 \quad z_E = 10$$

Per tant, el màxim es troba al vèrtex B , i el seu valor és $z_B = 30$, és a dir, el màxim de diferència entre les begudes d'un tipus i de l'altre (30) s'assoleix quan es col·loquen 10 màquines de begudes calentes i 40 de begudes fredes.

60. Les fàbriques d'automòbils de Frankfurt i de Milà proveeixen d'un model donat a les ciutats de París, Viena i Praga

Les produccions de les fàbriques són:

Frankfurt	Milà
150	100

Les demandes de les ciutats són:

París	Viena	Praga
125	100	25

Els costos de transport, en unitats monetàries, de cada automòbil des d'un punt d'origen a un de destí són:

	París	Viena	Praga
Frankfurt	5	10	15
Milà	20	15	20

Troba quants automòbils han de portar-se de cada fàbrica a cada ciutat perquè el cost total de les despeses de transport sigui mínim i calcula'l.

La taula de variables següent indica el nombre d'automòbils que es transporta d'una ciutat a una altra.

	París	Viena	Praga	Total
Frankfurt	x	y	$150-x-y$	150
Milà	$125-x$	$100-y$	$x+y-125$	100
Total	125	100	25	250

Volem trobar el cost mínim:

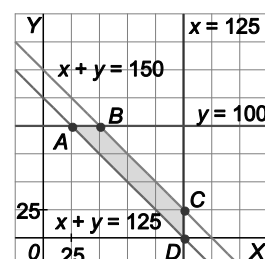
$$z = 5x + 10y + 15(150 - x - y) + 20(125 - x) + 15(100 - y) + 20(x + y - 125) = 3750 - 10x$$

Les restriccions del problema són les que resulten d'obligar que les variables de la taula anterior no siguin negatives; és a dir, volem resoldre el problema de programació lineal:

$$\text{Min } z = 3750 - 10x \quad \text{subjecte a} \quad \begin{cases} 0 \leq x \leq 125 \\ 0 \leq y \leq 100 \\ 125 \leq x + y \leq 150 \end{cases}$$

Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$A(25, 100) \quad B(50, 100) \quad C(125, 25) \quad D(125, 0)$$



Avaluem la funció objectiu en els vèrtexs:

$$z_A = 3500 \quad z_B = 3250 \quad z_C = 2500 \quad z_D = 2500$$

Per tant, el mínim s'assoleix a qualsevol punt del segment d'extremes C i D (de fet, només en els punts de coordenades enteres), és a dir, $x = 125$ però y pot variar entre 0 i 25. En totes aquestes solucions, el cost serà de 2500 unitats monetàries.

Les solucions es mostren a la taula següent, en què $0 \leq y \leq 25$, $y \in \mathbb{Z}$.

	París	Viena	Praga
Frankfurt	125	y	$25-y$
Milà	0	$100-y$	y

Per tant els únics enviaments fixos són a París, 125 automòbils des de Frankfurt i cap des de Milà.

Hi ha dos possibles transports amb cost mínim:

	París	Viena	Praga
Frankfurt	125	0	25
Milà	0	100	0

	París	Viena	Praga
Frankfurt	125	25	0
Milà	0	75	25

61. El propietari d'una botiga de llaminadures disposa de 10 paquets de pipes, 30 de xiclets i 18 de bombons. Decideix que, per vendre'ls, prepararà dos tipus de paquets. El tipus A estarà format per un paquet de pipes, dos de xiclets i dos de bombons i es vendrà a 1,50 €. El tipus B estarà format per un paquet de pipes, quatre de xiclets i un bombó i es vendrà a 2 €. Quants paquets de cada tipus convé preparar per aconseguir els ingressos màxims? Determina els ingressos.

Les variables de decisió són:

$$x \text{ paquets A} \quad y \text{ paquets B}$$

Volem trobar el màxim de $z = 1,5x + 2y$ subjecte a:

$$\begin{cases} x + y \leq 10 \\ 2x + 4y \leq 30 \\ 2x + y \leq 18 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 10 \\ x + 2y \leq 15 \\ 2x + y \leq 18 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

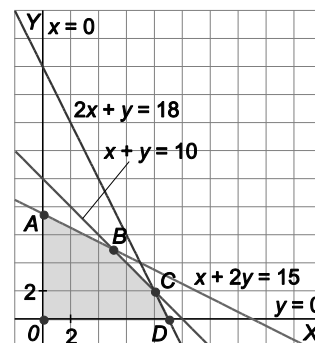
Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$O(0, 0) \quad A\left(0, \frac{15}{2}\right) \quad B(5, 5) \quad C(8, 2) \quad D(9, 0)$$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_O = 0 \quad z_A = 15 \quad z_B = 17,5 \quad z_C = 16 \quad z_D = 13,5$$

Per tant, el màxim es troba al vèrtex B i el seu valor és $z_B = 17,5$, és a dir, s'han de preparar 5 paquets de cada tipus, i s'obté un ingrés de 17,5 €.



62. Una ONG enviarà uns lots compostos d'aliments i de medicaments. Com a mínim s'han d'enviar 4 lots de medicaments, però, per problemes de capacitat, no es poden enviar més de 8 lots d'aquests medicaments. Per fer el transport, es fan servir 4 contenidors per a cada lot d'aliments i 2 per a cada lot de medicaments. El servei de transport exigeix que almenys s'envii un total de 24 contenidors, però que no se superin els 32.

- a) Quines combinacions de lots de cada tipus es poden enviar? Planteja el problema i representa gràficament les solucions. Poden enviar-se 4 lots d'aliments i 5 de medicaments?
- b) Si l'ONG vol maximitzar el nombre total de lots enviats, quina combinació s'ha d'escollir?

a) Les variables de decisió són:

x lots de medicaments y lots d'aliments

Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} 4 \leq x \leq 8 \\ 24 \leq 2x + 4y \leq 32 \\ y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 \leq x \leq 8 \\ 12 \leq x + 2y \leq 16 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

En representem el conjunt de solucions (regió factible).

Observem que el punt $P(5, 4)$ pertany a la regió factible, ja que compleix totes les restriccions, per tant, és possible enviar 4 lots d'aliments i 5 de medicaments.

b) Volem trobar el màxim de $z = x + y$ subjecte a les restriccions anteriors.

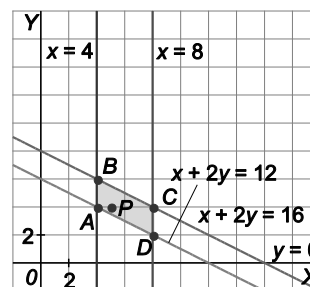
Calculem els vèrtexs de la regió factible:

$A(4, 4)$ $B(4, 6)$ $C(8, 4)$ $D(8, 2)$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$z_A = 8$ $z_B = 10$ $z_C = 12$ $z_D = 10$

Per tant, el màxim es troba al vèrtex C i el seu valor és $z_C = 12$, és a dir, s'han d'enviar $x = 8$ lots de medicaments i $y = 4$ lots d'aliments.



63. Un professor proporciona als seus alumnes una llista amb 20 problemes del tema 1 i 20 del tema 2. Cada problema del tema 1 val 5 punts i cada problema del tema 2 val 8 punts. Els alumnes poden fer problemes dels dos temes, però amb les condicions següents.

1. El nombre de problemes fets del tema 1 no pot ser més gran que el nombre de problemes del tema 2 més 2, ni ser més petit que el nombre de problemes del tema 2 menys 8.
2. La suma de 4 vegades el nombre de problemes fets del tema 1 amb el nombre de problemes del tema 2 no pot ser més gran que 38.

Troba quants problemes del tema 1 i del tema 2 cal fer per obtenir la màxima puntuació.

Les variables de decisió són:

x problemes del tema 1 y problemes del tema 2

Volem trobar el màxim de $z = 5x + 8y$ subjecte a:

$$\begin{cases} y - 8 \leq x \leq y + 2 \\ 4x + y \leq 38 \\ 0 \leq x \leq 20 \\ 0 \leq y \leq 20 \end{cases}$$

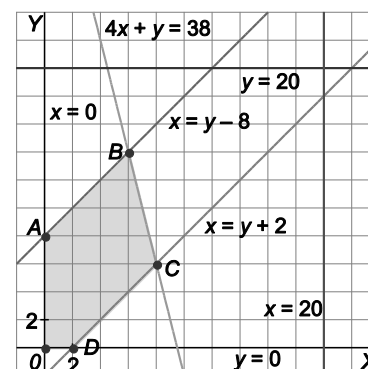
Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$O(0, 0)$ $A(0, 8)$ $B(6, 14)$ $C(8, 6)$ $D(2, 0)$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$z_O = 0$ $z_A = 64$ $z_B = 142$ $z_C = 88$ $z_D = 10$

Per tant, el màxim es troba al vèrtex B i el seu valor és $z_B = 142$, és a dir, s'han de fer $x = 6$ problemes del tema 1 i $y = 14$ problemes del tema 2, i s'obtenen 142 punts.



64. Una empresa té tres fàbriques de televisors, O_1 , O_2 i O_3 , radicades en polígons industrials diferents, que proveeixen d'aparells dues ciutats, D_1 i D_2 .

Les produccions de les fàbriques són:

O_1	O_2	O_3
100	150	225

Les demandes de les ciutats són:

D_1	D_2
175	300

Els costos de transport, en euros, de cada aparell des d'un punt d'origen a un de destinació són:

	D_1	D_2
O_1	10	8
O_2	6	5
O_3	4	5

Troba quants televisors han de portar-se des de cada fàbrica a cada ciutat perquè el cost total de les despeses de transport sigui mínim. Calcula aquest cost mínim.

La taula següent indica el nombre de televisors que es transporten d'un lloc a un altre.

	O_1	O_2	O_3	Total
D_1	x	y	$175-x-y$	175
D_2	$100-x$	$150-y$	$x+y+50$	300
Total	100	150	225	475

Volem trobar el cost mínim:

$$z = 10x + 6y + 4(175 - x - y) + 8(100 - x) + 5(150 - y) + 5(x + y + 50) = 3x + 2y + 2500$$

Les restriccions del problema són les que resulten d'obligar que les variables de la taula anterior no siguin negatives, és a dir, volem resoldre el problema de programació lineal:

$$\text{Min } z = 3x + 2y + 2500 \text{ subjecte a } \begin{cases} 0 \leq x \leq 100 \\ 0 \leq y \leq 150 \\ -50 \leq x + y \leq 175 \end{cases}$$

Representem la regió factible i calculem els seus vèrtex:

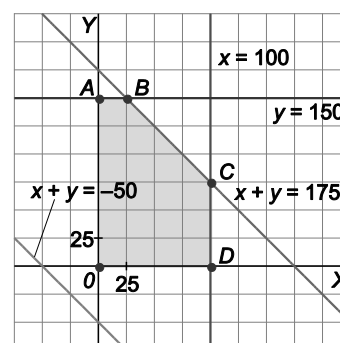
$$O(0, 0) \quad A(0, 150) \quad B(25, 150) \quad C(100, 75) \quad D(100, 0)$$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_O = 2500 \quad z_A = 2800 \quad z_B = 2875 \quad z_C = 2950 \quad z_D = 2800$$

Per tant, el mínim s'assoleix en el vèrtex O i val $z_O = 2500$, és a dir, el cost mínim és 2500 € si es transporten els televisors com es mostra a la taula següent:

	O_1	O_2	O_3
D_1	0	0	175
D_2	100	150	50



65. Un estudiant reparteix propaganda publicitària per aconseguir ingressos. Li paguen 8 cèntims d'euro per cada imprès col·locat al parabrisa d'un cotxe i 12 cèntims per cadascun posat en una bústia. Ha calculat que cada dia pot repartir, com a màxim, 150 impresos i l'empresa li exigeix diàriament que la diferència entre els posats als cotxes i el doble dels posats a les bústies no sigui inferior a 30 unitats. A més, ha d'introduir en bústies almenys 15 impresos diàriament.

- a) Quants impresos ha de col·locar en cotxes i bústies per maximitzar els seus ingressos diaris?
 b) Quin és aquest ingrés màxim?
 a) Les variables de decisió són:

x impresos col·locats en parabrises y impresos ficats en bústies

Volem trobar el màxim de $z = 0,08x + 0,12y$ subjecte a:

$$\begin{cases} x + y \leq 150 \\ x - 2y \geq 30 \\ x \geq 0 \\ y \geq 15 \end{cases}$$

Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$A: \begin{cases} x - 2y = 30 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow A(60, 15) \quad B: \begin{cases} x + y = 150 \\ x - 2y = 30 \end{cases} \Rightarrow B(110, 40)$$

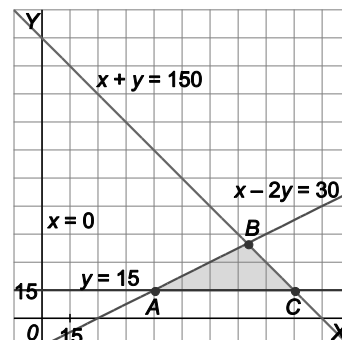
$$C: \begin{cases} x + y = 150 \\ y = 15 \end{cases} \Rightarrow C(135, 15)$$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_A = 6,60 \quad z_B = 13,6 \quad z_C = 12,6$$

Per tant, el màxim es troba al vèrtex B i el seu valor és $z_B = 13,6$, és a dir, l'estudiant ha de posar cada dia $x = 110$ impresos en parabrises i $y = 40$ impresos en bústies.

- b) L'ingrés màxim és de 13,6 €.



66. Un ajuntament vol enjardinar dos tipus de parcel·les, tipus A i tipus B, i disposa de 6000 € per fer-ho. El cost de la parcel·la A és de 100 € i el de la B de 150 €. Es considera convenient enjardinar almenys tantes parcel·les del tipus B com del tipus A i, en tot cas, no enjardinar més de 30 parcel·les de tipus B.

- a) Quantes parcel·les de cada tipus haurà d'enjardinar per maximitzar el nombre total de parcel·les enjardinades?
 b) Exhaurirà el pressupost disponible?

- a) Les variables de decisió són:

x parcel·les enjardinades de tipus A y parcel·les enjardinades de tipus B

Volem trobar el màxim de $z = x + y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 100x + 150y \leq 6000 \\ y \geq x \\ y \leq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + 3y \leq 120 \\ y \geq x \\ y \leq 30 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

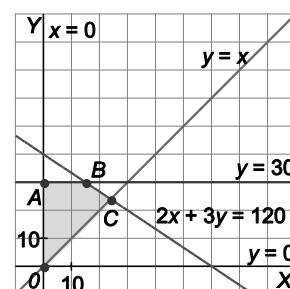
$$O(0, 0) \quad A(0, 30) \quad B(15, 30) \quad C(24, 24)$$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_O = 0 \quad z_A = 30 \quad z_B = 45 \quad z_C = 48$$

Per tant, el màxim es troba al vèrtex C , i el seu valor és $z_C = 48$, és a dir, s'han d'enjardinar 24 parcel·les de cada tipus.

- b) El cost d'enjardinar 24 parcel·les de cada tipus és $100 \cdot 24 + 150 \cdot 24 = 6000$ €, per la qual cosa s'exhaureix el pressupost disponible.



67. Una persona preocupada per la seva salut vol consumir al dia un mínim de 19 unitats de vitamina A, 16 unitats de vitamina C i 12 unitats de vitamina D. Una unitat del producte 1 costa 5 € i proporciona 9 unitats de vitamina A, 4 unitats de vitamina C i 2 unitats de vitamina D. Una unitat del producte 2 costa 4 € i proporciona 3 unitats de vitamina A, 4 unitats de vitamina C i 6 unitats de vitamina D. Quina és la combinació més econòmica dels productes 1 i 2 que garanteix les necessitats diàries?

- Planteja el problema.
- Resol-lo gràficament.
- Analitza gràficament què passaria si cada unitat del producte 1 costés 4 €.

- a) Les variables de decisió són:

x unitats de producte 1 y unitats de producte 2

Volem trobar el mínim de $z = 5x + 4y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 9x + 3y \geq 18 \\ 4x + 4y \geq 16 \\ 2x + 6y \geq 12 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

- b) Representem la regió factible i la recta $5x + 4y = 0$.

Com que la funció objectiu té coeficients de la x i de la y positius, el mínim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $5x + 4y = 0$ quan es desplaça de forma paral·lela en el sentit negatiu de l'eix Y .

Per tant, el mínim es troba al vèrtex $C(1, 3)$ i val $z_c = 17$, és a dir, la persona ha de comprar $x = 1$ unitat de producte 1 i $y = 3$ unitats de producte 2, amb un cost de $z_c = 17$ €.

Nota: Veient la representació gràfica, podrien sorgir dubtes sobre si el mínim s'assoleix al vèrtex B o al vèrtex C ; en aquest cas podem calcular aquests vèrtexs i avaluar la funció objectiu per determinar en quin d'ells s'assoleix verdaderament en mínim.

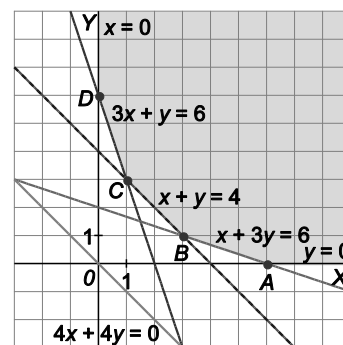
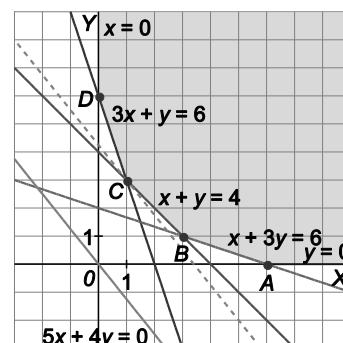
- c) En aquest cas el problema serà:

Min $z = 4x + 4y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 3x + y \geq 6 \\ x + y \geq 4 \\ x + 3y \geq 6 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Hem de representar la regió factible juntament amb la recta $4x + 4y = 0$ i traslladar-la de forma paral·lela en sentit negatiu de l'eix Y per trobar l'últim punt de la regió que es toca.

Per tant, el mínim ara es troba en qualsevol punt (de coordenades enteres) del segment d'extremes $C(1, 3)$ i $B(3, 1)$, és a dir, la persona pot comprar $x = 1$ unitat de producte 1 i $y = 3$ unitats de producte 2, $x = 2$ unitat de producte 1 i $y = 2$ unitats de producte 2 o $x = 3$ unitat de producte 1 i $y = 1$ unitats de producte 2. En els tres casos el cost és de 16 €.



68. En un celler es produeixen vins de criança i de reserva. Per problemes de disseny, la producció de tots dos tipus de vi no ha de superar els 60 milions de litres i la producció de vins de criança ha de ser d'almenys 10 milions de litres. A més, la producció de vi de reserva no ha de superar el doble de la de vi de criança ni ser inferior a la seva meitat.

- Determina, mitjançant inequacions, les restriccions del problema i representa gràficament el recinte definit.
- Si el celler ven el litre de vi de criança a 4 € i el de reserva a 9 €, quin és el disseny de producció que maximitza els ingressos? Quin és l'ingrés màxim?

a) Les variables de decisió són:

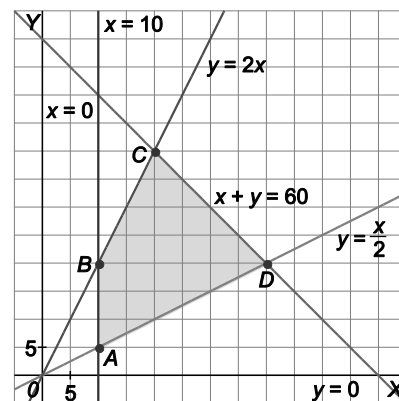
x milions de litres de vi de criança

y milions de litres de vi de reserva

Les restriccions del problema són:

$$\begin{cases} x + y \leq 60 \\ x \geq 10 \\ \frac{x}{2} \leq y \leq 2x \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

En representem el conjunt de solucions (regió factible).



b) Volem trobar el màxim de $z = 4x + 9y$ subjecte a les restriccions anteriors.

Calculem els vèrtexs de la regió factible:

$A(10, 5)$ $B(10, 20)$ $C(20, 40)$ $D(40, 20)$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$z_A = 85$ $z_B = 220$ $z_C = 440$ $z_D = 340$

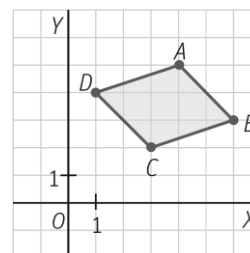
Per tant, el màxim es troba al vèrtex C , i el seu valor és $z_C = 440$, és a dir, s'han de produir $x = 20$ milions de litres de criança i $y = 40$ milions de litres de reserva, i s'obtenen uns beneficis de 440 milions d'euros.

AUTOAVALUACIÓ

COMPROVA EL QUE HAS APRÈS

1 Considera la regió factible de la figura i la funció objectiu $z = 2x - y$.

- a) Determina el sistema d'inequacions que determina la regió.
 b) Calcula per a quins valors de x i y la funció arriba al màxim. Quant val aquest màxim?
 c) Calcula per a quins valors de x i y la funció arriba al mínim. Quant val aquest mínim?



a) Les rectes que determinen els costats són:

$$AB: x + y = 9 \quad BC: x - 3y = -3 \quad CD: x + y = 5 \quad DA: x - 3y = -11$$

El sistema d'inequacions que representa la regió dibuixada és:

$$\begin{cases} x + y \leq 9 \\ x - 3y \leq -3 \\ x + y \geq 5 \\ x - 3y \geq -11 \end{cases}$$

b) Es pot fer una taula amb els quatre vèrtexs i la funció objectiu.

	A(4, 5)	B(6, 3)	C(3, 2)	D(1, 4)
$z = 2x - y$	$2 \cdot 4 - 5 = 3$	$2 \cdot 6 - 3 = 9$	$2 \cdot 3 - 2 = 4$	$2 \cdot 1 - 4 = -2$

La funció arriba a un màxim a $B(6, 3)$ i el seu valor és $z = 9$.

c) La funció arriba a un mínim a $D(1, 4)$ i val $z = -2$.

2. Troba analíticament el màxim i el mínim de $z = 15x - 10y$ subjecta a:

$$\begin{cases} 2x + 3y \geq -6 \\ 7x + 4y \leq 5 \\ -3x + 2y \leq 9 \end{cases}$$

Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$$A(3, -4) \quad B(-3, 0) \quad C(-1, 3)$$

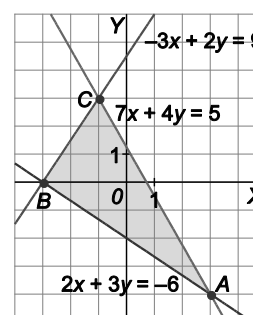
Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_A = 85 \quad z_B = -45 \quad z_C = -45$$

Per tant:

El màxim es troba al vèrtex A i el seu valor és $z_A = 85$.

El mínim es troba a qualsevol punt del segment d'extremes B i C i el seu valor és $z_B = -45$.



3. Determina gràficament el màxim i el mínim de $z = 12x + 6y$ a la regió definida per:

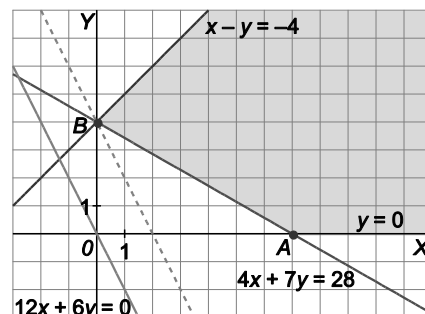
$$4x + 7y \geq 28 \quad x - y \geq -4 \quad y \geq 0$$

Representem la regió factible juntament amb la recta $12x + 6y = 0$.

Com que la funció objectiu té coeficients de la x i de la y positius, el màxim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $12x + 6y = 0$ quan es desplaça de forma paral·lela en el sentit positiu de l'eix Y , i el mínim, a l'últim punt que toqui quan es desplaça en sentit negatiu. Per tant:

El màxim no existeix.

El mínim es troba al vèrtex $B(0, 4)$, i el seu valor és $z_B = 24$.



4. Un fabricant de perfum compra la mateixa matèria primera a dos distribuïdors, A i B. Els distribuïdors A i B venen la matèria a 20 i 30 € per quilogram, respectivament. Cada distribuïdor ven un mínim de 2 kg i el distribuïdor B un màxim de 7 kg. El fabricant ha de comprar en total un mínim de 6 kg i vol comprar com a màxim al distribuïdor A el doble que al distribuïdor B. Quina quantitat de matèria primera ha de comprar a cada distribuïdor perquè el cost sigui mínim? Determina'l.

Les variables de decisió són:

x kg de matèria primera comprats a A y kg de matèria primera comprats a B

Volem trobar el mínim de $z = 20x + 30y$ subjecte a:

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ 2 \leq y \leq 7 \\ x + y \geq 6 \\ x \leq 2y \end{cases}$$

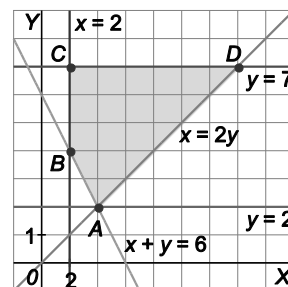
Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$A(4, 2)$ $B(2, 4)$ $C(2, 7)$ $D(14, 7)$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

$$z_A = 140 \quad z_B = 160 \quad z_C = 250 \quad z_D = 490$$

Per tant, el mínim es troba al vèrtex A i el seu valor és $z_A = 140$, és a dir, s'han de que comprar $x = 4$ kg al distribuïdor A i $y = 2$ kg al distribuïdor B, amb un cost de 140 €.



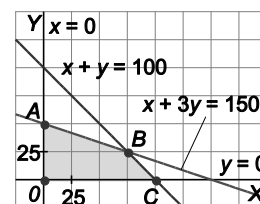
5. Una fàbrica de taulons de fusta té emmagatzemats 200 kg de pasta de fusta de baixa qualitat i 150 kg de pasta de fusta d'alta qualitat. La fàbrica elabora dos tipus de taulons: els taulons de tipus A requereixen 2 kg de pasta de baixa qualitat i 1 kg de pasta d'alta qualitat, i els de tipus B requereixen 2 kg de baixa qualitat i 3 kg d'alta qualitat. La fàbrica obté uns beneficis de 5 € per cada tauló de tipus A i de 6 € per cada tauló de tipus B. Quants taulons de cada tipus elaborarà per obtenir el màxim benefici?

Les variables de decisió són:

x taulons de tipus A y taulons de tipus B

Volem trobar el màxim de $z = 5x + 6y$ subjecte a:

$$\begin{cases} 2x + 2y \leq 200 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y \leq 100 \\ x + 3y \leq 150 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$



Representem la regió factible i calculem els seus vèrtexs:

$O(0, 0)$ $A(0, 50)$ $B(75, 25)$ $C(100, 0)$

Avaluem la funció objectiu als vèrtexs:

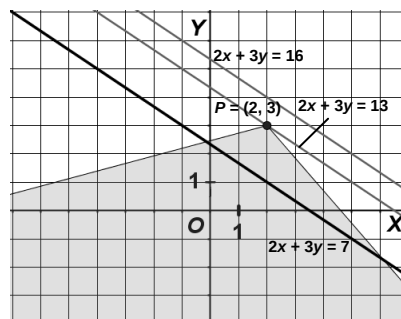
$z_O = 0$ $z_A = 300$ $z_B = 525$ $z_C = 500$

Per tant, el màxim es troba al vèrtex B i el seu valor és $z_B = 525$, és a dir, s'han d'elaborar $x = 75$ taulons del tipus A i $y = 25$ taulons del tipus B, i s'obté un benefici de $z_B = 525$ €.

RELACIONA I CONTESTA

Tria l'única resposta correcta en cada cas

- La regió factible d'un problema de programació és no fitada. Sabem que la funció objectiu $z = 2x + 3y$ té un màxim en el punt $P(2, 3)$. Què podem dir del mínim d'aquesta funció objectiu?
 - Existeix i correspon a un sol punt.
 - Existeix i correspon a infinits punts.
 - No existeix.
 - No ho podem determinar.

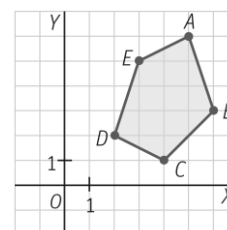


Si té un màxim a P i $z = 2x + 3y$ ($a, b > 0$), vol dir que la regió factible està per sota de P i z la va tallant en infinits punts en els quals z va sent cada cop més petita. Per tant, el mínim no existeix. Per altra banda, si la regió tingués dos vèrtexs P i P' i aquest últim fos un extrem, la funció objectiu z hauria que passaria per aquest punt. Això vol dir que passaria per tots els punts del segment PP' i tots serien un màxim.

La resposta correcta és la C.

2. La figura mostra la regió factible d'un problema de programació lineal. Sabem que A és el màxim de la funció objectiu. Què podem dir amb certesa?

- A. El mínim és C.
 B. El mínim és D.
 C. El mínim pot ser C, D o el segment CD.
 D. Cap de les respostes anteriors.



Si el màxim és A, el mínim només pot ser C, D o el segment que els uneix, segons la inclinació de la funció objectiu. En cap cas ni E ni B no poden ser mínims perquè són punts intermedis. La resposta correcta és la C.

3. La solució del problema de programació lineal:

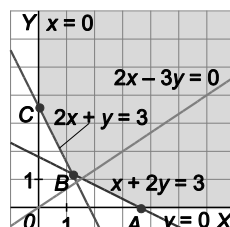
$$\text{Mín } z = 2x - 3y$$

Subjecte a:

$$\begin{cases} 2x + y \geq 3 \\ x + 2y \geq 3 \\ x \geq 0 \quad y \geq 0 \end{cases} \quad \text{s'assoleix a:}$$

- A. $x = 3, y = 0$
 B. $x = 0, y = 3$
 C. $x = 1, y = 1$
 D. El problema no té solució.

Representem la regió factible i, com que no és fitada, la recta $2x - 3y = 0$.



Com que la funció objectiu coeficient de la x és positiu i el coeficient de la y , negatiu, el mínim es trobarà a l'últim punt de la regió factible que toqui la recta $2x - 3y = 0$ quan es desplaça de forma paral·lela en el sentit positiu de l'eix Y .

Com que la recta no deixa de tocar la regió factible quan es desplaça, el mínim no existeix, és a dir, la resposta correcta és la D.

Assenyalen les respostes correctes

4. Es considera la regió factible determinada per les restriccions:

$$\{x + 3y \leq 21, x + y \leq 12, 4x + y \leq 40, x \geq 0, y \geq 0\}$$

- A. El punt (9, 4) pertany a la regió factible.
 B. El punt $\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right)$ és un vèrtex de la regió factible.
 C. El punt (5, 5) pertany a la regió factible.
 D. El punt (5, 5) és un dels vèrtexs de la regió factible.

A és incorrecta, perquè el punt (9, 4) no compleix la segona restricció.

B és correcta; el punt $\left(\frac{15}{2}, \frac{9}{2}\right)$ compleix totes les restriccions, per tant, pertany a la regió factible, i és el punt de tall de les rectes $x + 3y \leq 21$ i $x + y \leq 12$, per la qual cosa és un vèrtex de la regió factible.

C és correcta, perquè el punt (5, 5) compleix totes les restriccions.

D és incorrecta; tot i que el punt (5, 5) compleix totes les restriccions, no és el punt de tall de cap parell de rectes, amb la qual cosa no és un vèrtex de la regió factible.

Tria la relació correcta entre les dues afirmacions donades

5. Es considera un problema de programació lineal amb dues variables tal que la regió factible no és buida.

- | | |
|---|------------------------------------|
| 1. El problema no té solució. | 2. La regió factible és no fitada. |
| A. $1 \Rightarrow 2$ però $2 \not\Rightarrow 1$ | C. $1 \Leftrightarrow 2$ |
| B. $2 \Rightarrow 1$ però $1 \not\Rightarrow 2$ | D. Cap de les anteriors. |

$1 \Rightarrow 2$ perquè si la regió factible és fitada el problema sempre té solució. En canvi, $2 \not\Rightarrow 1$, pot passar que la regió factible sigui no fitada i el problema tingui solució.

Per tant, la relació correcta és la A.

Assenyala la dada innecessària per contestar

6. La regió factible d'un problema de programació lineal està determinada per les restriccions següents.

- | | | | |
|-------------------|----------------------|---------------------|---------------------|
| 1. $x + y \geq 5$ | 2. $2x + 3y \leq 24$ | 3. $4x - y \leq 20$ | 4. $x + 6y \leq 30$ |
|-------------------|----------------------|---------------------|---------------------|

Quina restricció és redundant i, per tant, innecessària?

- | | | | |
|------|------|------|------|
| A. 1 | B. 2 | C. 3 | D. 4 |
|------|------|------|------|

Representem la regió factible i comprovem que la restricció redundant és $2x + 3y \leq 24$, la resposta B.

