

Objectius

En aquesta quinzena aprendreu a:

- Trobar els esdeveniments d'un experiment aleatori i realitzar operacions utilitzant-los.
- Determinar si dos esdeveniments són compatibles o incompatibles.
- Calcular la probabilitat d'un esdeveniment mitjançant la regla de Laplace.
- Conèixer les propietats de la probabilitat.
- Trobar la probabilitat d'un esdeveniment en un experiment compost.
- Trobar probabilitats d'esdeveniments dependents i independents.
- Aplicar la probabilitat a situacions de la vida quotidiana.

Abans de començar.

1.Introducció: Combinatòria	pág. 4
Combinatòria	
Permutacions	
Variacions	
Combinacions	
1.Experiments aleatoris	pág. 6
Espai mostral i esdeveniments	
Operacions amb esdeveniments	
Esdeveniments incompatibles	
Recta que passa per dos punts	
2.Probabilitat d'un esdeveniment	pág. 8
La regla de Laplace	
Freqüència i Probabilitat	
Propietats de la Probabilitat	
Calcular Probabilitats	
3.Experiments compostos	pág. 10
Esdeveniments compostos	
Regla de la multiplicació	
Extraccions amb i sense devolució	
4.Probabilitat condicionada	pág. 11
Esdeveniments dependents i independents	
Diagrames d'arbre	
Probabilitat total	
Probabilitat a posteriori	

Exercicis per practicar

Per saber-ne més

Resum

Autoavaluació

Abans de començar



Segur que d'una manera o una altra en moltes ocasions heu fet servir probabilitats i no sempre a l'escola. Expressions com "probablement plourà demà" o com "és probable que el que digui sigui veritat" són bastant comunes en el llenguatge quotidià.

Transmissió hereditària. Un exemple, la sordesa. En una parella de sords, per a cada fill que tinguin la probabilitat que també sigui sord és de 0,25. El grup sanguini dels fills depèn del dels pares amb unes probabilitats que es poden calcular. Les malalties sanguínies genètiques superen les 3.500, i contínuament se'n descobreixen més.

Probabilitat en el llenguatge ordinari: Casual, accidental, eventual, fortuït, impensat, imprevisible, inesperat, inopinat, ocasional, per sort, per xamba, de rebot, sense voler, sense intenció.

Els jocs d'atzar. En jugar al dòmino, a les cartes, als daus, hi ha moltes ocasions en què "ens la juguem", i de ben segur que considerem si és més o menys probable que surti bé o malament.

Investigueu

Imagina que ets en un concurs de televisió, en el qual t'ofereixen tres portes perquè en tris una. Al darrere d'una de les portes hi ha un cotxe i darrere de cadascuna de les altres hi ha un ase.

Tries una porta i, abans d'obrir-la, el presentador -que sap el que hi ha darrere de cadascuna- obre una de les dues que no has triat i que per descomptat amagava un ase, i llavors et dona l'oportunitat de canviar la teva tria.

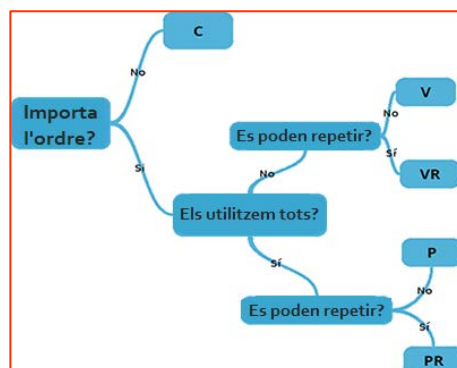
Naturalmente, tu el que vols és endur-te'n el cotxe. Què faries, canviar de porta o no canviar?



1. Introducció: Combinatòria

Algunes vegades la part més difícil del càlcul de probabilitats és comptar el nombre de casos favorables i possibles. La **combinatòria** és la part de les matemàtiques que es dedica al recompte dels elements d'un conjunt.

- ✓ Si volem determinar de quantes maneres es poden ordenar tots els elements d'un conjunt parlarem de **Permutacions**. Si entre els elements n'hi ha de repetits de manera que quan fem intercanvis entre ells segueix essent el mateix cas, en direm **Permutacions amb Repetició**.
- ✓ Quan, si en comptes de voler ordenar tots els elements disponibles, només ens interessa ordenar-ne uns quants, per exemple per assignar una sèrie de tasques diferents a un grup de persones, es tracta de **Variacions**. També hi ha dos casos, si cada element es pot repetir o si només es pot utilitzar una vegada.
- ✓ A vegades no ens importa l'ordre en el qual es trien els elements, simplement volem veure de quantes maneres en podem seleccionar uns quants d'entre tots. Són les **Combinacions**.



Un aspecte important quan estem utilitzant la combinatòria per fer recomptes és saber quin dels diferents tipus hem d'utilitzar. En primer lloc hem de pensar si ens importa l'ordre, si s'utilitzen tots els elements i si es pot repetir segons l'esquema adjunt.

Permutacions

- **Permutacions** de n elements són el nombre de les diferents maneres que tenim per ordenar aquests n elements. Ho escriurem P_n .

$$P_n = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$$

- **Permutacions amb repetició** de n elements en les quals el primer element es repeteix a vegades, el segon b vegades, ... fins a l'últim que es repeteix k vegades ($a + b + \dots + k = n$) són el nombre de les diferents maneres possibles d'ordenar aquests elements de forma que aquests estiguin repetits a , b , ... k vegades. S'indica $PR_{a,b,\dots,k}$

$$PR_{a,b,\dots,k} = \frac{P_n}{P_a \cdot P_b \cdot \dots \cdot P_k} = \frac{n!}{a! \cdot b! \cdot \dots \cdot k!}$$

Volem comptar de quantes maneres diferents es podem seure els alumnes d'una classe de 9 personas.

Tenim $m = 9$ persones que han de seure a les 9 taules de classe, o sigui, hem d'ordenar aquest alumnat. Es tracta de **Permutacions** de 9 elements. Vegem com es calcula el nombre de maneres diferents de seure a la classe.

$$P_9 = 9 \cdot 8 \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 = 9!$$

Per a la primera taula tenim 9 persones diferents
Per a la segona taula ens queden 8 persones diferents
Per a les altres es van reduint d'1 en 1 fins que l'última persona té una única taula lliure

Volem saber de quantes maneres diferents es pot fer un collaret amb peces de colors vermell, verd, blau i groc si tenim 4 peces vermelles, 3 verdes, 5 grogues i 2 blaves.

Hem d'ordenar un total de $4 + 3 + 5 + 2 = 14$ peces per formar un collaret. Si totes les peces fossin diferents, les diferents maneres de fer el collaret serien Permutacions de 14 elements, però són moltes menys perquè estan repetits ja que, per exemple, és el mateix començar per la primera peça vermella que per la segona. Es tracta de **Permutacions amb Repetició** de 4, 3, 5 i 2 elements. Vegem com es calcula el nombre de possibles collarets.

$$PR_{4,3,5,2} = \frac{P_{14}}{P_4 \cdot P_3 \cdot P_5 \cdot P_2} = \frac{14!}{4! \cdot 3! \cdot 5! \cdot 2!}$$

Per una banda considerem tots els collarets que es podrien fer si totes les peces fossin diferents
I ho dividim entre les diferents maneres que hi ha d'ordenar cadascun dels colors.

Volem comptar quantes paraules de 5 lletres de llarg amb o sense sentit, podríem crear amb un alfabet de 15 lletres diferents.

Tenim un alfabet format per $m = 15$ lletres diferents. Volem formar paraules de mida $n = 5$, podent repetir cada lletra tants vegades com vulguem. Es tracta de **Variacions amb Repetició** de 15 elements agafats de 5 en 5. Vegem com es calcula el nombre de paraules.

$$VR_{15,5} = 15 \cdot 15 \cdots 15 = 15^5$$

Per a la primera lletra tenim 15 possibilitats diferents
Per a la segona lletra també tenim 15 possibilitats
Per a les altres lletres també tenim 15 possibilitats

Volem comptar de quantes maneres es pot donar la classificació dels 3 primers en una cursa amb un total de 18 participants

Tenim una cursa on hi participen $m = 18$ atletes. Volem determinar de quantes maneres diferents pot ser la classificació dels $n = 3$ primers. Es tracta de **Variacions** de 18 elements agafats de 3 en 3. Anem a veure com es calcula el nombre de possibles classificacions.

$$V_{18,3} = 18 \cdot 17 \cdot 16 = 4896$$

Per al primer lloc tenim 18 possibilitats diferents
Per al segon lloc tenim 17 possibilitats, doncs el primer no pot quedar també segon
Per a la tercera posició són 16 les possibilitats, doncs hem de descomptar els dos primers

Volem comptar de quantes maneres diferents es podem triar 5 persones per participar en una activitat en un grup que té 20 persones.

Tenim un total de $m = 20$ persones i d'entre elles n'hem de triar $n = 5$. Cal observar que no importa quines triem primer i quines després. Totes les triades són participants a l'activitat. O sigui, no importa l'ordre. Es tracta de **Combinacions** de 20 elements agafats de 5 en 5. Anem a veure com es calcula el nombre de maneres diferents de seleccionar aquestes persones.

$$C_{20,5} = \frac{V_{20,5}}{P_5} = \frac{20!}{15! \cdot 5!}$$

Si importés l'ordre el que tindríem seria $V_{20,5}$. Com que no importa l'ordre, estem comptant cada cas moltes vegades, tantes como formes d'ordenar tinguem per a les 5 persones triades, o sigui, P_5 .

Variacions

- Variacions amb repetició** de m elements agafats de n en n són el nombre que indica quants són els diferents grups de n elements iguals o diferents que es poden fer amb els m elements disponibles. Les indicarem $VR_{m,n}$.

$$VR_{m,n} = m^n$$

- Variacions** de m elements agafats de n en n ($n \leq m$) són el nombre de maneres diferents que tenim d'ordenar els n elements agafats d'entre un total de m sense repetir-ne cap. S'indica $V_{m,n}$.

$$V_{m,n} = m \cdot (m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+1) = \frac{m!}{(m-n)!}$$

Combinacions

- Anomenem **Combinacions** de m elements agafats de n en n al nombre de maneres diferents de seleccionar n elements d'entre un total de m sense que importi l'ordre en el qual han estat seleccionats. Les indicarem $C_{m,n}$.

Si importés l'ordre es tractaria de variacions, però com que no importa, per calcular quants casos hi ha dividim les variacions entre el nombre de maneres d'ordenar aquest elements, o sigui:

$$C_{m,n} = \frac{V_{m,n}}{P_n} = \frac{\frac{m!}{(m-n)!}}{n!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}$$

EXERCICIS resoltos

1. Calcula:

a) P_5

Sol: $P_5 = 5! = 120$

b) P_{10}

Sol: $P_{10} = 10! = 3628800$

c) $PR_{4,3,4,2}$

Sol: $PR_{4,3,4,2} = \frac{13!}{4! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 2!} = 900900$

d) $PR_{2,4}$

Sol: $PR_{2,4} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$

2. Calcula:

a) $VR_{10,5}$

Sol: $VR_{10,5} = 10^5 = 100000$

b) $VR_{5,7}$

Sol: $VR_{5,7} = 5^7 = 78125$

c) $V_{10,5}$

Sol: $V_{10,5} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 = 30240$

d) $V_{5,3}$

Sol: $V_{5,3} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

3. Calcula:

a) $C_{17,5} =$

Sol: $C_{17,5} = \frac{17!}{12! \cdot 5!} = 6188$

b) $C_{13,3} =$

Sol: $C_{13,3} = \frac{13!}{10! \cdot 3!} = 286$

2. Experiments aleatoris

Espai mostral i esdeveniments.

En extreure una carta d'una baralla, llançar una moneda, tirar un dau, i en altres exemples anàlegs, no podem saber per endavant el resultat que s'obtindrà. Són experiments **aleatoris** aquells en els quals no es pot predir el resultat, i sobre aquests es parla a continuació.

El conjunt de tots els possibles resultats d'un experiment aleatori s'anomena **espai mostral**, i cada un d'aquests possibles resultats és un **esdeveniment elemental**.

- ✓ Un **esdeveniment** és qualsevol subconjunt de l'espai mostral, es verifica quan ocorre qualsevol dels esdeveniments elementals que el formen.

Hi ha un esdeveniment que es verifica sempre, l'**esdeveniment segur** que és el mateix espai mostral.

- En tirar una moneda i un dau, una forma de representar l'espai mostral és:



O bé: (cara, 1) (cara, 2),...

- En tirar tres monedes (o una moneda tres vegades) l'espai mostral és:



Operacions amb esdeveniments

Amb els esdeveniments d'un experiment aleatori es poden realitzar diferents operacions. Donats dos esdeveniments A i B:

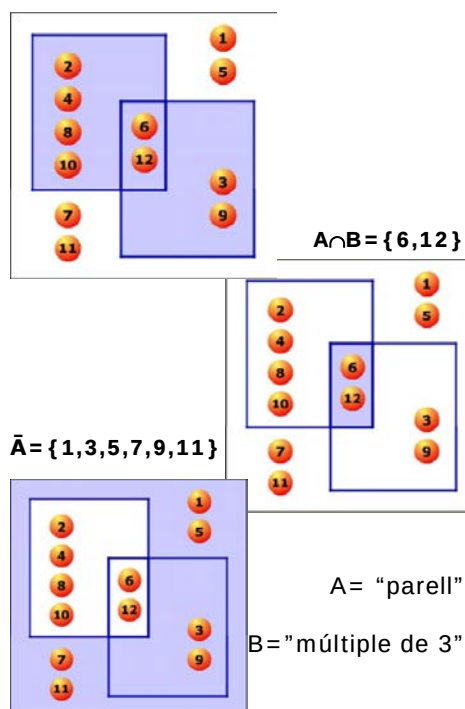
- La **unió** d'A i B, **$A \cup B$** , és l'esdeveniment format per tots els esdeveniments elementals d'A i de B. Ocorre quan succeeix A o succeeix B o ambdós.
- La **intersecció**, **$A \cap B$** , és l'esdeveniment format pels esdeveniments elementals comuns a A i B. Es verifica quan ocorren A i B alhora.
- La **diferència** d'A i B, **$A \setminus B$** , és l'esdeveniment format pels esdeveniments elementals d'A que no hi ha a B. Ocorre si es dona A però no B.

L'esdeveniment **contrari** a un donat A, està format per tots els esdeveniments de l'espai mostral que no hi ha a A. És el que ocorre quan no es dona A i s'indica **$\bar{A}$** .

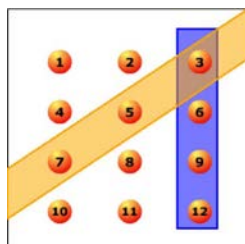
- L'esdeveniment **contrari** al **segur** és l'**esdeveniment impossible**, que no es verifica mai, i que s'indica amb **$\emptyset$** .

$$E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12\}$$



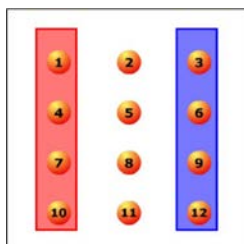
Esdeveniments compatibles



Quan surt 3,
tots dos
s'esdevenen.

Esdeveniments incompatibles

No s'esdevenen
ahora, però no
són contraris



Esdeveniments compatibles i incompatibles

En un experiment aleatori hi ha esdeveniments que poden ocórrer alhora i esdeveniments que no.

- Dos esdeveniments es diuen **compatibles** si tenen algun esdeveniment elemental comú. En aquest cas $A \cap B \neq \emptyset$, poden ocórrer alhora.
- Dos esdeveniments es diuen **incompatibles** si no tenen cap esdeveniment elemental comú, en aquest cas $A \cap B = \emptyset$ i no poden ocórrer alhora.

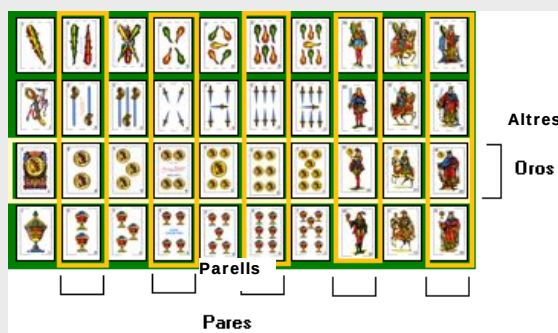
Un esdeveniment i el seu contrari són sempre incompatibles, però dos esdeveniments incompatibles no sempre són contraris, com es pot comprovar en els exemples de l'escena.

EXERCICIS resolt

4. En una bossa tenim tres boles numerades com a 1, 2 i 3. Considerem l'experiment d'extreure una bola i anotar-ne el número. Escriu tots els esdeveniments possibles. Indiqueu quins d'aquests són els elementals.

$\{\}, \{1,2,3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1\}, \{2\}$ y $\{3\}$. Els tres últims són els elementals.

5. En una baralla, sota l'experiment d'extreure una carta, considereu els esdeveniments a) parell, b) oros, c) parell i oros, d) parell o oros, e) parell menys oros, f) oros menys parell i g) no parell



Observeu la imatge,

- a) hi ha 20 cartes envoltades de taronja, les parells,
g) unes 20 més que no, les senars,
b) 10 oros.
c) El 2, 4, 6, 10 i 12 d'oros són parells.
d) Tots els oros i parells junts són 25 cartes (totes les envoltades de groc o taronja)
e) Als 2, 4, 6, 10 i 12, s'hi ha de treure el 2, 4, 6, 10 i 12 d'oros, a 20 cartes se li'n treuen 5 i en queden 15
f) L'1, 3, 5, 7 i 11 d'oros

6. En tirar un dau considerem els esdeveniments: $A = \{\text{Parell}\}$, $B = \{\text{més gran que 3}\}$, i $C = \{\text{imparell}\}$. Dels tres parells d'esdeveniments possibles AB, AC i BC, indiqueu quins són compatibles i/o incompatibles:

AB compatibles, quan surti el 4 o el 6.
AC incompatibles, si és parell no pot ser senar.
BC compatibles, quan surti el 5.

3. Probabilitat d'un esdeveniment

La regla de Laplace

Quan un experiment aleatori és regular, és a dir, que tots els esdeveniments elementals tenen la mateixa probabilitat d'ocórrer o són **equiprobables**, per calcular la probabilitat d'un esdeveniment qualsevol A, n'hi ha prou amb comptar i fer el quocient entre el nombre d'esdeveniments elementals que componen A (**casos favorables**) i el nombre d'esdeveniments elementals de l'espai mostral (**casos possibles**).

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{Casos possibles}}$$

Aquest resultat es coneix com a **regla de Laplace**. Observeu que per poder aplicar-la és necessari que tots els casos possibles siguin igualment probables.

Freqüència i probabilitat

Com sabeu, la **freqüència absoluta** d'un esdeveniment és el nombre de vegades que apareix quan es repeteix un experiment aleatori, i la **freqüència relativa** és la freqüència absoluta dividida pel nombre de vegades, **n**, que es repeteix l'experiment aleatori.

Quan aquest nombre **n** és molt gran, la freqüència relativa amb què apareix un esdeveniment tendeix a estabilitzar-se cap a un valor fix.

Aquest resultat, conegut com a **lleï dels grans nombres**, ens porta a definir la probabilitat d'un esdeveniment com aquest nombre cap el qual tendeix la freqüència relativa en repetir l'experiment moltes vegades.

Propietats de la probabilitat

Vista la relació entre freqüència relativa i probabilitat, es compleix que:

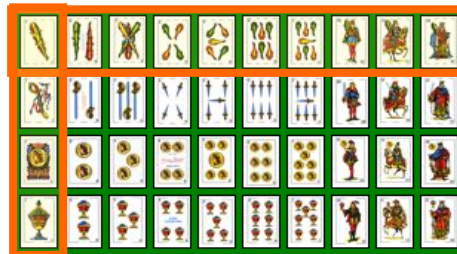
- La probabilitat d'un esdeveniment és un nombre entre 0 i 1.
- La probabilitat de l'esdeveniment segur és 1 i la de l'esdeveniment impossible 0.
- La probabilitat de la unió de dos esdeveniments **incompatibles** A i B és **$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$** .

I d'aquestes es dedueix a més que:

- La probabilitat del contrari és **$p(A) = 1 - P(A)$**

- La probabilitat de la unió de dos esdeveniments compatibles és

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$



Extraïem una carta d'una baralla de 40:

$$P(\text{bastos}) = 10/40 = 0,25$$

$$P(\text{as}) = 4/40 = 0,1$$

$$P(\text{as de bastos}) = 1/40 = 0,025$$

Resultats obtinguts en la simulació de tirar tres monedes 1.000 vegades

0 cares 132	
fr(0) = 132/1000 = 0,132	
P(0) = 1/8 = 0,125	
1 care 75	
fr(1) = 375/1000 = 0,375	
P(1) = 3/8 = 0,375	
2 cares 372	
fr(2) = 372/1000 = 0,372	
P(2) = 3/8 = 0,375	
3 cares 121	
fr(3) = 121/1000 = 0,121	
P(3) = 1/8 = 0,125	

Sospitem que un dau està trucat i ens entretenim a tirar-lo 100 vegades i a anotar-ne els resultats. Obtenim:

	1	2	3	4	5	6
F	20	30	15	15	10	10
Fr	0.2	0.3	0.15	0.15	0.1	0.1

Conclourem, $P(1) = P(2) = \dots$ ja no és 1/6, sinó aproximadament $P(1) = 0,2$; $P(2) = 0,3$ etc. Aquí fem servir la freqüència relativa com a probabilitat, d'ara endavant ho tindrem en compte a l'hora de jugar amb aquest dau.

A = "parell"

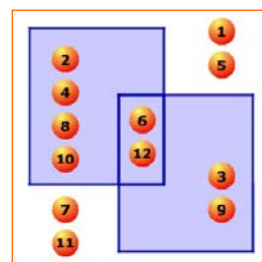
B = "múltiple de 3"

$$P(A) = 6/12 = 1/2 \quad P(B) = 4/12 = 1/3$$

$$P(\bar{A}) = 1/2$$

$$p(B) = 2/3$$

$$P(A \cup B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$



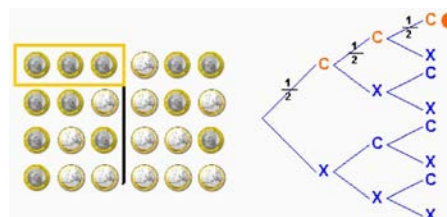
4. Experiments compostos

Esdeveniments compostos

Un **experiment compost** és el que està format per diversos experiments simples realitzats de forma consecutiva.

Per calcular l'espai mostral d'un experiment compost convé, en moltes ocasions, fer un diagrama d'arbre que representi totes les opcions. Cada resultat ve donat per un camí del diagrama. Observeu en l'exemple com es construeix el diagrama d'arbre.

Tirem una moneda tres vegades seguides. Quina és la probabilitat d'obtenir tres cares?



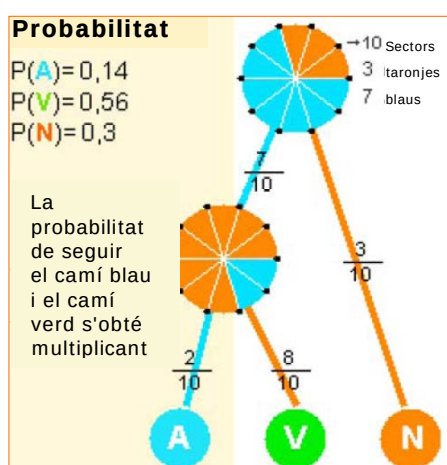
8 casos possibles. La probabilitat de C és 1/2 en cada moneda.

$$P(CCC) = \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$$

Regla de la multiplicació

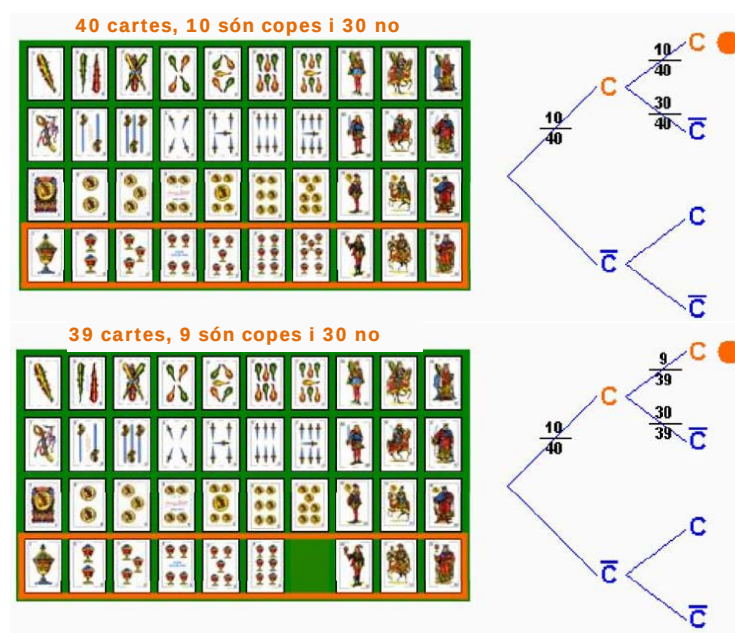
Si us heu fixat en l'exemple de la pàgina anterior, en indicar la probabilitat de cada branca del camí s'obtenia la probabilitat de cada esdeveniment compost calculant el producte dels esdeveniments simples respectius.

Per calcular la probabilitat d'un esdeveniment en un experiment compost es **multipliquen les probabilitats** dels esdeveniments simples que el formen.



Extraccions amb devolució i sense devolució

Un exemple d'experiment compost el trobem en l'extracció successiva de cartes o de boles d'una urna... en aquests casos cal considerar si es torna la carta, bola, etc. abans de treure la següent o no.



Extraiem dues cartes d'una baralla de 40. Quina és la probabilitat que les dues siguin copes?

La probabilitat que la primera carta sigui de copes és 10/40.

Per a la segona, la probabilitat depèn que tornem la primera carta a la baralla o no.

Amb devolució

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{10}{40} = \frac{1}{16}$$

Sense devolució

$$P(CC) = \frac{10}{40} \cdot \frac{9}{39} = \frac{3}{52}$$

$$P(B/A) = \frac{\text{Casos favorables de B que es doni A}}{\text{Casos possibles que es doni A}} = \frac{\text{Casos favorables d'A i B}}{\text{Casos favorables d'A}} =$$

$$= \frac{\frac{\text{Casos favorables d'A i B}}{\text{Casos favorables en total}}}{\frac{\text{Casos favorables d'A}}{\text{Casos favorables en total}}} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Els esdeveniments "el dia és gris" i "portar paraigua" influeixen entre si. Els esdeveniments "estudiar" i "aprovar" són esdeveniments que s'afavoreixen; quan s'estudia, augmenta la probabilitat d'aprovar.

En una urna tenim boles vermelles i blaves enumerades com en la figura. Quina és la probabilitat de treure cada número?

$$\begin{aligned} P(1) &= 3/8 \\ P(2) &= 3/8 \\ P(3) &= 2/8 \end{aligned}$$

Si sabem que la bola és vermella

$$P(1/R) = 2/4 \text{ (de 4 de vermelles n'hi ha 2 amb 1)}$$

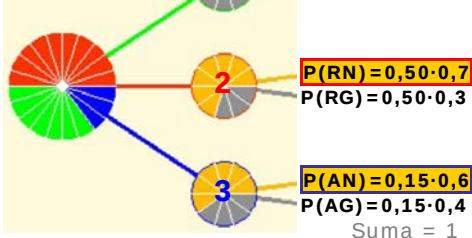
$$P(1) < P(1/R) \text{ s'afavoreixen}$$

$$P(2/R) = 1/4 \text{ (de 4 de vermelles n'hi ha 1 amb 2)}$$

$$P(2) > P(2/R) \text{ es desfavoreixen}$$

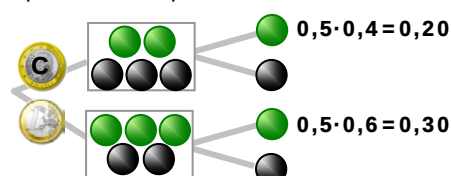
$$P(3/R) = 1/4 \text{ (de 4 de vermelles n'hi ha 1 amb 3)}$$

$$P(3) = P(3/R) \text{ són independents.}$$



$$\begin{aligned} P(N) &= P(V) \cdot P(N/V) + P(R) \cdot P(N/R) + P(A) \cdot P(N/A) = \\ &= 0,35 \cdot 0,4 + 0,50 \cdot 0,7 + 0,15 \cdot 0,6 = 0,58 \end{aligned}$$

Es tira una moneda, segons que surti cara o creu es treu una bola de l'urna indicada. Si la bola surt verda, quina és la probabilitat que surti cara?



$$P(V) = 0,20 + 0,30 = 0,50$$

$$\frac{0,5 \cdot 0,4}{0,5 \cdot 0,4 + 0,5 \cdot 0,6} = \frac{0,2}{0,5} = 0,4$$

5. Probabilitat condicionada

Esdeveniments dependents i independents

Quan es realitzen observacions de diversos esdeveniments pot ser que un depengui de l'altre.

La probabilitat que ocorri un esdeveniment B quan està ocorrent un altre, A, s'anomena **condicionada**, i s'expressa $P(B/A)$.

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Donats dos esdeveniments, es diu que són **independents** si la presència de l'un no influeix en la probabilitat de l'altre, és a dir, si $P(B/A) = P(B)$; en cas contrari són **dependents**.

- ✓ A i B independents: $P(B/A) = P(B)$ i en tenir en compte la fórmula anterior per a $P(B/A)$,
- ✓ A i B independents: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

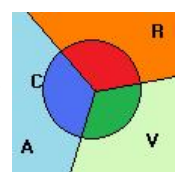
Probabilitat total

Com heu pogut veure, en els experiments compostos es pot fer un diagrama en arbre, i cada resultat ve donat per un camí en l'arbre esmentat. Per calcular una probabilitat només s'ha de dibuixar el camí corresponent, i el producte de les probabilitats de totes la branques que el formen serà el valor que busquem.

Així, si ocorre A i després B: $P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$

- ✓ La suma de les probabilitats de tots els camins és igual a 1

Considerem els esdeveniments representats per la imatge. Vr=Vermell, V=Verd i B=Blau són tres esdeveniments incompatibles i la unió dels quals forma tot l'espai mostral. Sigui E=Cercle un esdeveniment qualsevol. Llavors,



$$P(C) = P(R) \cdot P(C/R) + P(V) \cdot P(C/V) + P(B) \cdot P(C/B)$$

Aquest resultat és el que es coneix com a **probabilitat total**.

Probabilitat a posteriori

A vegades interessa conèixer la $P(A/E)$, és a dir, quan ja sabem que ha ocorregut E en la segona experiència, ens preguntem la probabilitat que s'hi hagi arribat a través d'A.

Es tracta d'una probabilitat condicionada:

$$P(A/S) = \frac{P(A \cap S)}{P(S)} \text{ Expressió coneguda}$$

com a **Fórmula de Bayes**.

Exercicis resolts

13. Tirem un dau de 4 cares {1,2,3,4} i un altre de 10 {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Quina és la probabilitat d'obtenir dos 3? I dos 4?

$$P(3 \text{ y } 3) = 1/4 \cdot 3/10 = 3/40 = 0.075$$

$$P(4 \text{ y } 4) = 1/4 \cdot 4/10 = 4/40 = 0.1$$

14. En una bossa tenim 5 boles numerades de l'1 al 5. Extraiem dues boles, a) Quina és la probabilitat d'obtenir un 2 i un 3 si no tornem les boles tretes? b) i quina si les tornem?

Sense devolució $P = 1/5 \cdot 1/4 = 0.05$

Amb devolució $P = 1/5 \cdot 1/5 = 1/25 = 0.04$

15. En tirar dos daus, quina és la probabilitat d'obtenir almenys 10 punts?

S'obtenen 10 o més punts en 46 64 55 56 65 i 66.

Són 6 casos, cadascun amb probabilitat $1/6 \cdot 1/6 = 1/36$.

$$P(\text{almenys 10 punts}) = 6 \cdot 1/36 = 1/6$$

O bé, hi ha sis casos favorables d'entre els 36 possibles, $P. = 6/36 = 1/6$

16. Tirem una moneda canviada en la qual $P(C)=0,6$ i $P(X)=0,4$. Si surt cara tirem un dau {1,2,3,4} de 4 cares i si surt creu, un {1,2,3,4,5,6} de sis. Tenim la mateixa probabilitat que surti 1 després que hagi sortit cara o creu? Quant val en cada cas? Quin és la probabilitat que surti 1?

No, $P(C1)=0,6 \cdot 1/4 = 3/20$

$P(X1) = 0,4 \cdot 1/6 = 2/30$

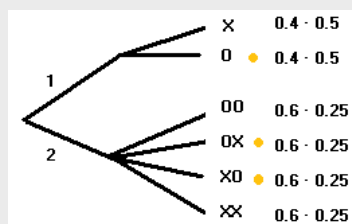
$$P(1) = P(C1) + P(X1) = 3/20 + 2/30 = 13/60$$

17. Tenim un dau {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 cares. Si traiem un 1 tirem una moneda, i dos si traiem un 2. Quina és la probabilitat d'obtenir una cara?

Els casos 1O, 2OX i 2XO tenen una cara.

La suma de les probabilitats és la solució:

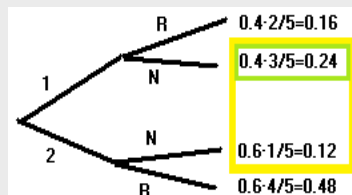
$$P = 0,2 + 0,15 + 0,15 = 0,5$$



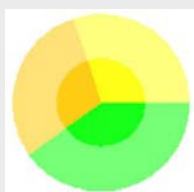
18. Tenim un dau {1,1,1,1,2,2,2,2,2,2} de 10 cares. Tirem el dau, si surt 1 traïem una bola de {RRNNN} i si traiem un 2 en traïem una de {RRRRN}. Ha sortit N. Quina és la probabilitat que fos amb un 1 del dau?

Observeu la figura, la probabilitat que hagi sortit 1N entre el que pot ser que hagi sortit 1N o 2N és:

$$P(1/N) = \frac{0.24}{0.24 + 0.12} = \frac{0.24}{0.36} = 0.666$$



19. La probabilitat d'encertar en groc a la diana de la figura és 0,3; en verd, 0,4, i en taronja, 0,3. A més si s'encerta en groc la probabilitat que sigui brillant és 0,7; la probabilitat que sigui verd brillant és 0,6 i en taronja 0,3.



- a) Quina és la probabilitat d'encertar a la zona brillant?

$$P(\text{Brillant}) = P(A) \cdot P(\text{Brillant}/A) + P(V) \cdot (P(\text{Brillant}/V) + P(N) \cdot P(\text{Brillant}/N))$$

$$P(\text{Brillant}) = 0,3 \cdot 0,7 + 0,4 \cdot 0,6 + 0,3 \cdot 0,5 = 0,21 + 0,24 + 0,15 = 0,60$$

- b) Si s'ha encertat a la zona brillant, quina és la probabilitat que sigui groc?

$$P(A/\text{Brillant}) = P(A \text{ i Brillant}) / P(\text{Brillant}) = 0,3 \cdot 0,7 / 0,60 = 0,21 / 0,60 = 0,35$$

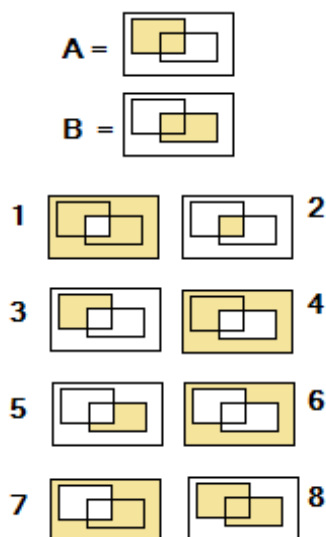


Per practicar

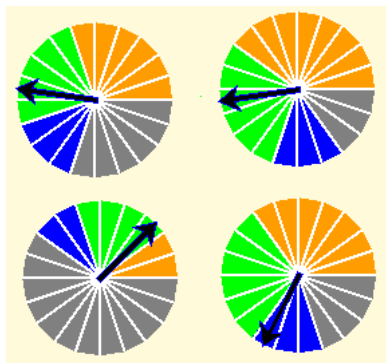
- Una classe té 20 persones. Si la volem dividir en 2 equips amb el mateix nombre de persones, de quantes maneres es pot fer?
- Una comunitat de veïns formada per 36 personas ha de triar una persona per al lloc de presidenta, una altra de tesorera i una altra de secretària. De quantes maneres diferents es pot fer?
- De quantes maneres diferents es pot fer una travessa?
Has de tenir en compte que una travessa està formada per 14 partits en els quals es podem posar 3 resultats (1 X 2) i un ple al 15 en què cal endevinar el nombre de gols de local i visitant entre 4 valors (0 1 2 M) per a cadascun.
- En una prova ciclista amb 53 participants es lliuren 3 mallots. De quantes maneres diferents es poden repartir sabent que una mateixa persona en pot guanyar més d'un?
- Volem col·locar 12 llibres en una prestatgeria. Esbrina de quantes maneres diferents es pot fer si:
 - Tots els llibres són diferents.
 - Només hi ha 3 llibres diferents: 4 del 1r tipus, 3 del 2n i 5 del 3r.
 - Si a més a més tots els que són iguals han d'estar junts.
- Hi ha al mercat diversos tipus de daus, tot i que el més normal és el cúbic de sis cares. N'hi ha de 4, 6, 10, 12, i 20 cares. En general, van numerats de l'1 fins al nombre de cares que tenen. Escriu l'esdeveniment "parell" per a cadascun.
- Tenim un dau de 4 cares numerades de l'1 al 4. El tirem una vegada. Escriu l'esdeveniment segur, l'impossible, i tots els possibles classificats per les seves dimensions.
- Tenim un dau de 6 cares blanc, en què s'han escrit a les cares els números següents {1,1,1,2,2,3}. Escriu tots els esdeveniments possibles.
- A l'escola municipal d'un poble hi ha classes per a esports d'equip de bàsquet, futbol i voleibol. N'hi ha 100 d'inscrits en esports d'equip, 70 van a classes de futbol, 60 de bàsquet i 40 a futbol i bàsquet. Quants van només a voleibol?
- Determineu el nombre de cartes, en una baralla espanyola de 40:
 - Amb numeració inferior a 4.
 - De bastos i més gran que 4.
 - Figures d'oros o bastos.
- En una baralla espanyola, comteu les cartes dels esdeveniments :
 - Oros i sets
 - Oros o sets
 - Set d'oros
 - Figures
 - Oros o figures
 - Oros i figures
- Per a un dau de sis cares {1,2,3,4,5,6}, escriu els esdeveniments:
 - Parell
 - No parell
 - Parell i més gran que 3
 - Parell o més gran que 3
 - Parell menys més gran que 3
 - El contrari de parell i més gran que 3
- Tenim un dau amb els nombres {1,1,1,2}. Si el tirem 100 vegades, quina quantitat de vegades sortirà cada un dels resultats possibles.
- Tenim un dau de deu cares numerades com {1,2,2,3,3,3,4,4,4,4}. Quina és la probabilitat de cada un dels esdeveniments elementals?
- Tenim una ruleta de 10 posicions, 3 de vermelles, 4 de verdes, 2 de negres i 1 de blava. Quina és la probabilitat que en girar-la s'obtingui cada un dels colors?
- Si tirem dues monedes podem obtenir un d'aquests 4 resultats {OO, XO, OX, XX}. Podeu escriure d'aquesta manera els resultats possibles per a tres monedes? I per a 4? Quina és la probabilitat d'obtenir dues cares en cada un dels experiments?

Probabilitat

17. Si sabem que $P(A) = 0,5$, $p(B) = 0,7$ i $P(2) = 0,3$, calculeu $P(1)$, $P(3)$, $P(4)$, $P(5)$, $P(6)$, $P(7)$ i $P(8)$,



18. Quina és la probabilitat d'obtenir taronja, verda, blava o grisa a cada una de les ruletes següents?



19. Tenim un dau de 10 cares d'aquesta forma $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$. I dues urnes, una $A = \{R, R, R, V, V\}$ i $B = \{R, V, V, V, V\}$. Tirem el dau, si surt 1 extraiem una bola d'A, i si surt 2, de B. Quina és la probabilitat d'extreure'n una de vermella d'A? I una vermella de B? I una de verda d'A?
20. En una bossa hi ha les boles següents $\{1, 2, 2, 3, 3\}$. Extraiem primer una bola, la tornem i n'extraiem una altra. Calculeu les probabilitats següents: $P(1,1)$, $P(1,2)$, $P(1,3)$.

21. Si per a la segona extracció de l'exercici anterior no tornem la primera bola, quin és el valor de les probabilitats ara?

22. Calculeu les probabilitats d'obtenir 2 oros en extreure dues cartes d'una baralla espanyola en els casos de tornar i de no tornar la primera carta a la baralla abans d'extreure la segona.

23. Tenim un dau de 10 cares de la forma $\{1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2\}$, i dues urnes, una $A = \{R, R, R, V, V\}$ i una altra $B = \{R, V, V, V, V\}$. Tirem el dau, si surt 1 extraiem una bola d'A, i si surt 2, de B. Quina és la probabilitat d'extreure una R? I una V?

24. Tenim una urna amb boles numerades com s'indica $\{1, 1, 2, 2, 2\}$ i dues urnes $I = \{R, V\}$ i $II = \{N, N, R, V\}$. Extraiem una bola per decidir de quina urna n'escollim una altra. Quina és la probabilitat d'obtenir R o N?

25. Un cop fet l'experiment de l'exercici anterior, ha resultat ser V. Quina és la probabilitat que hagués estat extreta de l'urna A? I de la B?

26. Es tiren dues monedes. Si surten dues cares es tira el dau $\{1, 1, 1, 2, 2, 2\}$ i si no, el dau $\{1, 1, 2, 2, 3, 3\}$. Quina és la probabilitat d'obtenir un 1? Quan en surt un, amb quina probabilitat han sortit també dues cares?

27. Deu amics organitzen un viatge i tria la destinació un d'ells per sorteig. Sis volen anar a la costa i quatre a l'interior. Dels primers, dos volen anar al nord i quatre al sud. Dels d'interior, la meitat prefereixen el nord i l'altra meitat, el sud.

- Trobeu la probabilitat d'anar a la costa del nord.
- Quina és la probabilitat d'anar al nord?
- Si van al nord, quina és la probabilitat que sigui a la costa?

Per saber-ne més



Una mica d'història

La probabilitat va néixer entorn dels jocs d'atzar. En les civilitzacions antigues (Egipte, Grècia, Roma) s'usava un os per fer de dau per a diversos jocs on intervenia l'atzar (d'aquí ve un joc tradicional: el joc de l'osset). Però fins i tot restes arqueològiques de fa més de 40.000 anys s'han interpretat com a elements de jocs d'atzar.

A Grècia i Roma es practicaven amb afany i passió. Homer (900 aC) explica que quan Patrocle era petit, es va enfadar tant amb un oponent jugant amb l'astràgal que gairebé el va matar.

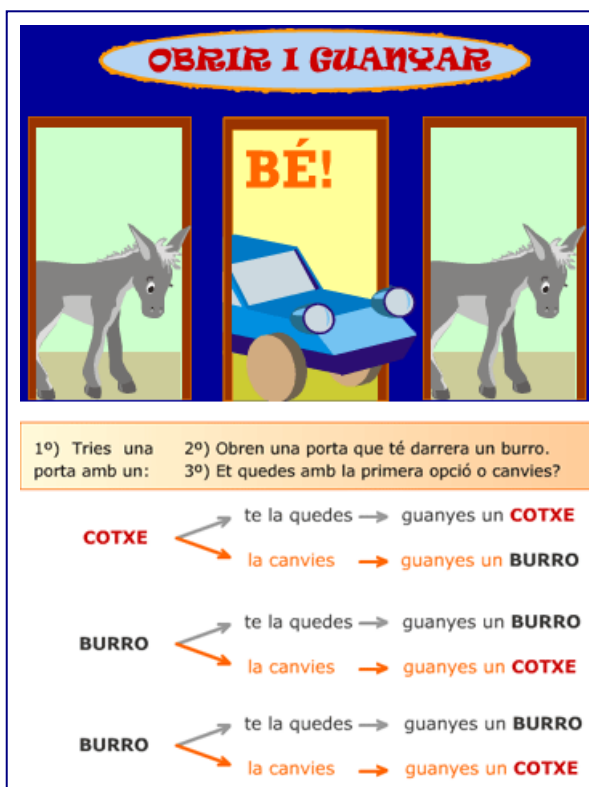


Va ser Girolamo Cardano (1501-1576) qui va escriure la primera obra important relacionada amb el càlcul de probabilitats en els jocs d'atzar. Va ser el 1565 i es deia Llibre dels jocs d'atzar.

Jacob Bernoulli (1654-1705), Abraham de Moivre (1667-1754), el reverend Thomas Bayes (1702-1761) i Joseph Lagrange (1736-1813) van desenvolupar fórmules i tècniques per al càlcul de la probabilitat.

El segle XIX, Pierre Simon, marquès de Laplace (1749-1827), va unificar totes aquestes primeres idees i va compilar la primera teoria general de la probabilitat.

La probabilitat ha continuat evolucionant amb matemàtics com Poisson (1781-1840), P.Chebyshev (1821-1894), Émile Borel (1871-1956), A. Markov (1856-1922), i ha anat creant escola per superar estancaments; Andrei N. Kolmogorov de l'escola russa, (1903-1987), Norbert Wiener (1894-1964) de l'americana. En l'actualitat estadística i la probabilitat s'uneixen i es desenvolupen juntes.



Aquest problema, anomenat de **Monty Hall**, està inspirat en el concurs televisiu nord-americà *"Let's Make a Deal"* (*Fem un tracte*), famós entre 1963 i 1986. El seu nom prové del seu presentador, en Monty Hall.

Si has jugat força vegades, hauràs comprovat, probablement amb sorpresa, que la probabilitat de guanyar un cotxe canviant la primera elecció, és superior a la probabilitat de guanyar-lo sense canviar de porta.

Observant el diagrama d'arbre o aplicant el que ja saps sobre probabilitat condicionada veuràs que:

✓ $P(\text{coche}/\text{con cambio}) = 2/3$

✓ $P(\text{coche/sin cambio}) = 1/3$

Probabilitat



Recordeu el més important

Experiment aleatori

No es pot predir el resultat per molt que l'hàgim experimentat.



Per exemple, llançar un dau.

- Espai **mostral** $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Esdeveniments elementals: $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}$ i $\{6\}$
- Altres **esdeveniments**: $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\}$
- Esdeveniment **segur**: $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- Esdeveniment **impossible**: $\emptyset = \{ \}$
- Esdeveniment **contrari** de A : $\bar{A} = \{3, 4, 5, 6\}$

Esdeveniments **compatibles**: són els que poden passar alhora, com ara A i B o A i C .

Esdeveniments **incompatibles**: Si no poden passar alhora, com ara parell i senar, B i C .

Probabilitat de d'esdeveniments

$$P(\text{S. segur}) = P(E) = 1$$

$$P(\text{S. impossible}) = P(\emptyset) = 0$$

$$0 \leq P(\text{esdeveniment}) \leq 1$$

Probabilitat de la unió:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \text{ si } A \text{ i } B \text{ són incompatibles}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \text{ si } A \text{ i } B \text{ compatibles.}$$

Experiments compostos

Estan formats per diversos experiments simples fets de manera consecutiva. Per calcular la probabilitat de multiplicar les dels esdeveniments simples que el formen.

Probabilitat condicionada

En esdeveniments consecutius es poden produir dues situacions:

1) **Independents**, no influeixen en l'altre.

Com en les extraccions amb devolució

2) **Dependents**, cada esdeveniment està condicionat per l'anterior

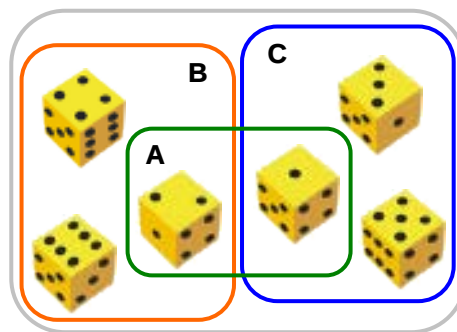
Com en les extraccions sense devolució

Probabilitat total

$$P(A) + P(V) + P(R) = 1$$

$$P(C) = P(R) \cdot P(C/R) + P(A) \cdot P(C/A) + P(V) \cdot P(C/V)$$

$$P(R/C) = \frac{P(R) \cdot P(C/R)}{P(R) \cdot P(C/R) + P(A) \cdot P(C/A) + P(V) \cdot P(C/V)}$$



Operacions amb esdeveniments

$$\text{Unió: } A \cup B = \{1, 2, 4, 6\}$$

$$\text{Intersecció: } A \cap B = \{2\}$$

$$\text{Diferència: } A - B = \{1\}$$

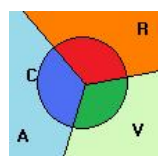
Regla de Laplace:

Per a esdeveniments elemental equiprobables:

$$P = \frac{\text{Núm. favorables}}{\text{Núm. possibles}}$$

$$P(B/A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B/A)$$



Per calcular la probabilitat d'un esdeveniment anterior, si sabem el que ha passat després, emprarem la **fórmula de Bayes**.

Autoavaluació



1. Tirem un dau de 10 cares. $P(\text{obtenir} < 7) =$
2. En una bossa tenim 6 boles vermelles, 9 boles blaves i 5 boles verdes. N'extraiem una bola. Quina és la probabilitat d'obtenir una bola vermella?
3. Disposem d'una baralla de 100 cartes, de quatre colors i numerades de l'1 al 25. Quina és la probabilitat d'obtenir un 23?
4. Esdeveniments elementals $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 20\}$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $C = \{1, 2, 3, 4, \dots, 14, 15\}$. Quina és la probabilitat d'AUC?
5. Llancem dos daus normals. Quina probabilitat hi ha d'obtenir menys de 8?
6. Quina probabilitat hi ha de no treure ni bastos ni figures en extreure una carta d'una baralla espanyola?
7. Extraiem una carta, la tornem i n'extraiem una altra, d'una baralla espanyola. Quina probabilitat hi ha de treure una carta del coll d'oros?
8. Tirem dues monedes. Si surten dues cares extraiem una bola d'una urna amb 3 B i 7 N i en cas contrari, d'una urna amb 4 B i 6 N. Quina és la probabilitat de treure una B?
9. Tirem un dau de 10 cares. Si surt menor que 7 extraiem una carta, i en cas contrari dues, tornant la primera abans de treure la segona. Quina probabilitat hi ha en d'obtenir alguna carta del coll d'oros?
10. En un col·legi el 60% dels alumnes juguen a futbol; el 50 % a bàsquet i el 90%, a un esport o l'altre. Quina probabilitat hi ha que un estudiant del col·legi practiqui tots dos esports?