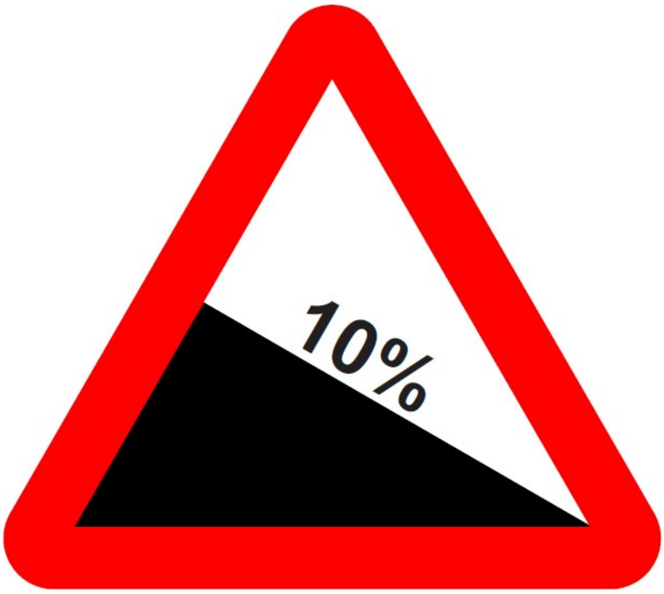
TRIGONOMETRIA

1. Introducció

1.1. Un senyal

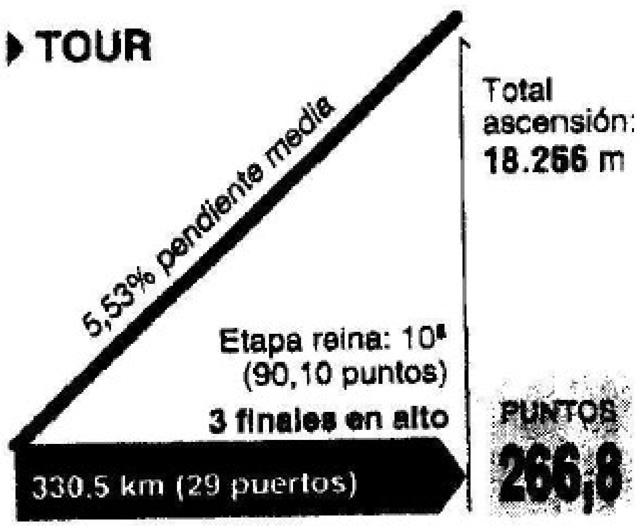
Aquest és un senyal de trànsit que indica perill:



Què significa el 10% que hi apareix?

1.2. Cursa ciclista

Aquest és un retall de premsa (*El País*, 04/09/99) de la secció d'esports:



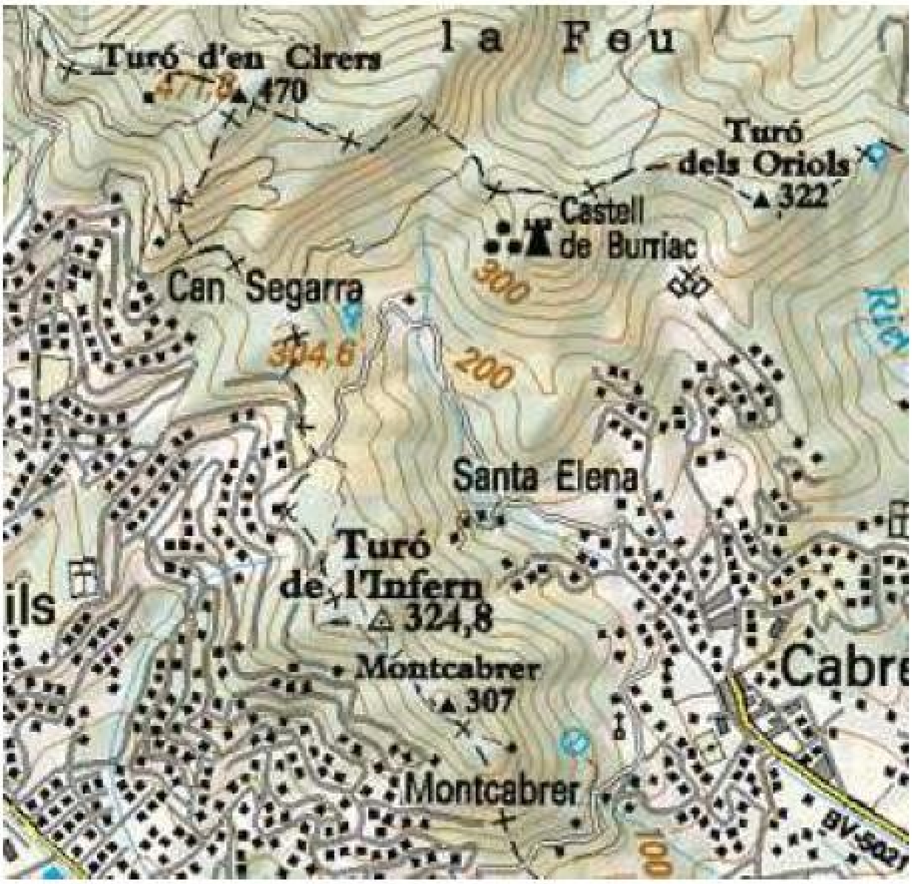
Què és això del pendent mitjà? Com l'han calculat aquest pendent?

1.3. A partir d'una foto

En aquesta imatge d'una teulada, calcula el pendent, com a mínim de dues maneres diferents. Justifica les teves respostes i per què ha de donar el mateix.

1.4. A partir d'un mapa

Aquesta és una reproducció de les muntanyes al voltant del castell de Burriac.



L'equidistància entre corbes de nivell és de 20 metres, i la distància real entre el Turó de Cirers i Montcabrer és de 1550 metres.

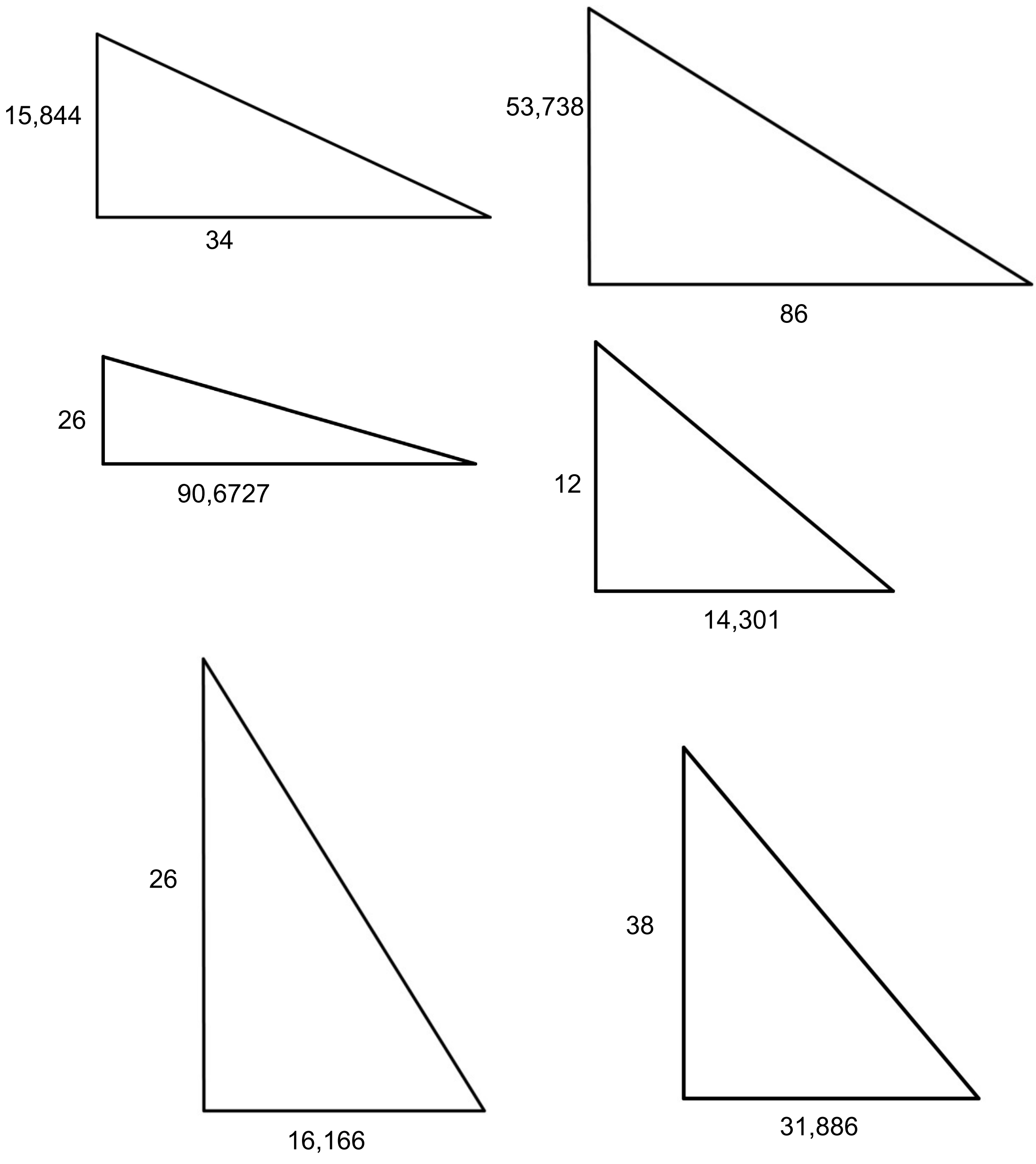
Quin és el pendent del turó on hi ha el castell? Justifica la resposta.

Exercici 27. Dibuixa un pendent del 50%. Justifica les mides que fas servir.

Exercici 28. Dibuixa un pendent del 100%. Justifica les mides que fas servir.

Exercici 29. Dibuixa un pendent del 150%. Justifica les mides que fas servir.

Exercici 30. Calcula el pendent en aquests triangles:



2. Insistim amb el pendent

2.1. La xemeneia

Aquesta és la xemeneia que hi ha al costat de la Nau Gaudí, a Mataró:

Quina és la seva inclinació? Quin és el seu pendent?

2.2. Depèn de la grandària?

Dibuixa uns quants triangles rectangles semblants (cinc o sis poden ser suficients, però si ets escèptic/a, fes-ne dotze o vint).

Fixa't sempre en el mateix angle agut i mesura la llargada dels dos catets, que anomenarem adjacent i oposat (segons toqui o no a l'angle). Omple la taula i calcula la quarta columna.

Triangle	Catet oposat	Catet adjacent	$\dfrac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}$
1			
2			
3			
4			
5			
6			

2.3. Càlcul de pendents

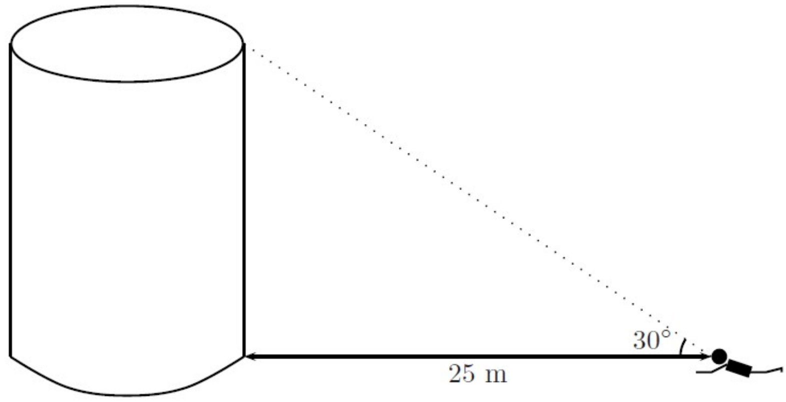
Una vegada t'hagis convençut que la raó (també dit quocient o divisió) entre el catet oposat i el catet adjacent no depèn de la grandària del triangle rectangle sinó de l'angle agut que hi tinguis, construiràs una taula amb els valors d'aquesta raó per a diferents angles.

angle	$\dfrac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}$
5º	
10º	
15º	
20º	
25º	
30º	
35º	
40º	
45º	
50º	
55º	
60º	
65º	
70º	
75º	
80º	
85º	

Si hi penses una mica, veuràs que no cal dibuixar tots 17 triangles. Fes-ho en un paper mil·limetrat per tal de mesurar més còmodament.

2.4. Exercicis

Exercici 31. Volem mesurar l'altura d'una torre sense pujar-hi. Per fer-ho, ens situem a 25 metres d'ella i mesurem l'angle que forma la visual al punt més alt de la torre amb l'horitzontal, i dóna 30º.

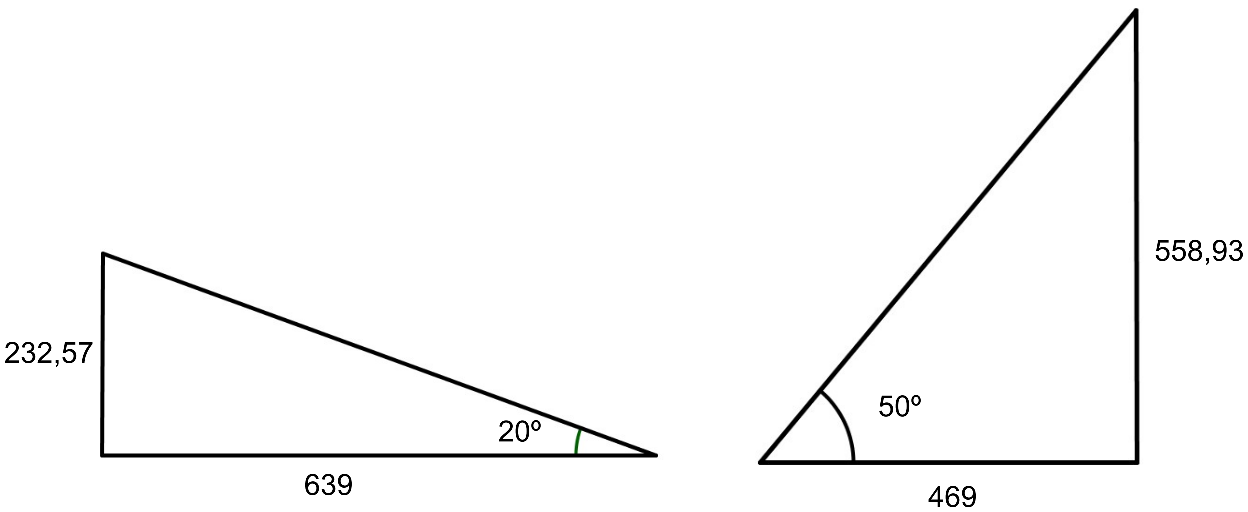


Calcula l'alçada de la torre.

Exercici 32. Quan el sol és a una altura de 15º sobre l'horitzó, l'ombra d'un edifici és de 40,3 metres. Quina altura té l'edifici?

Exercici 33. Quan mirem la part més alta d'un arbre hem d'aixecar la vista 60º. Sabem que la distància entre l'arbre i el lloc on som és de 15 metres. Quina altura té l'arbre?

Exercici 34. Comprova que l'angle assenyalat és el correcte i calcula el pendent.

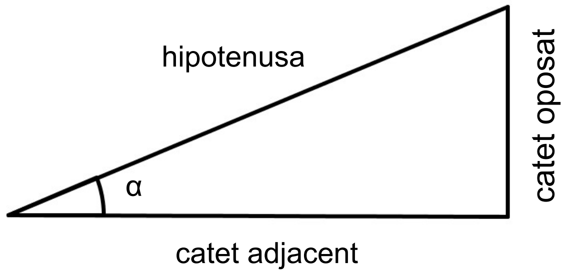


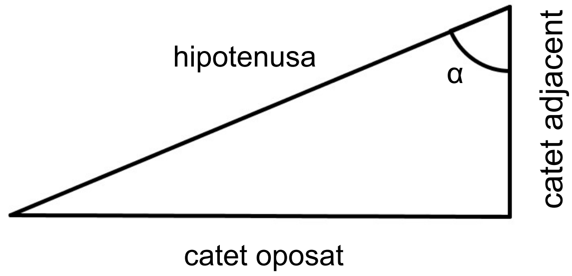
3. Les raons trigonomètriques

3.1. Algunes definicions

Ara que has pogut comprovar que la raó entre els catets oposat i adjacent només depèn de l'angle, ja és hora que et presentem les raons trigonomètriques.

Mira, aquí tens dos triangles rectangles iguals qualssevol. Observa com diferenciem entre catet oposat i catet adjacent en funció de l'angle α considerat:





Si volem fer una divisió entre dos costats, i en tenim tres, tenim, en total, sis maneres de fer-ho:

- Si dividim el catet oposat entre l'adjacent, que és el que has anat fent, la raó es coneix amb el nom de **tangent de l'angle α**, o, abreviadament, *tan α*.
- Si dividim el catet oposat entre la hipotenusa, la raó es coneix com **sinus de l'angle α**, o, abreviadament, *sin α*.
- Si dividim el catet adjacent entre la hipotenusa, la raó es coneix com **cosinus de l'angle α**, o, abreviadament, *cos α*.
- Si dividim el catet adjacent entre l'oposat, la raó es coneix com **cotangent de l'angle α**, o, abreviadament, *cot α*.
- Si dividim la hipotenusa entre el catet adjacent, la raó es coneix com **secant de l'angle α**, o, abreviadament, *sec α*.
- Si dividim la hipotenusa entre el catet oposat, la raó es coneix com **cosecant de l'angle α**, o, abreviadament, *csc α*.

No t'espantis. Usualment només se'n fan servir tres: *sinus*, *cosinus* i *tangent*. Si ho escrivim algèbricament,

$$\tan\alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}} \qquad \sin\alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}$$

Per cert, has reconegut el pendent en algun lloc?

3.2. Unitats angulars

Segur que tu mesures els angles en graus. En què si no?

Doncs bé, hi ha altres unitats per a mesurar angles, que de moment nosaltres no hem necessitat, però que a les calculadores hi són presents. Aquestes unitats són els graus sexagesimals (els que ja coneixes), els radiants (cada radiant és una mica més de 60º) i els graus decimals (un angle recte són 100 graus decimals). Respectivament, les seves abreviacions (en anglès, és clar) són DEG, RAD i GRA, o bé D, R i G. La teva calculadora científica té una tecla que permet indicar amb quines unitats ha d'entendre el número que li entres.

3.3. Raons trigonomètriques amb la calculadora

Podem obtenir les raons trigonomètriques simplement prement un botó de la calculadora. L'única dada que necessita és l'angle.

Algunes calculadores (les de disseny més antic) demanen escriure primer l'angle i després la raó que vulguem.

Per exemple, si volem *sin 43*, hem d'escriure [43] [sin]

Altres calculadores demanen entrar la informació igual que l'escrivim nosaltres. Els programes d'ordinador solen fer igual.

3.4. Càlcul de l'angle

El pas contrari, és a dir, trobar l'angle a partir de la raó, es fa amb les funcions *arc*. Per exemple,

- Si *tan 60 = 1,7320508*, el contrari l'escrivim *arctan 1,7320508 = 60*.
- Si *cos 60 = 0,5*, el contrari l'escrivim *arccos 0,5 = 60*.
- Si *sin 60 = 0,8660254*, el contrari l'escrivim *arcsin 0,8660254 = 60*.

Si tenim una calculadora científica, aconseguirem la funció *arc* amb una tecla anomenada [INV], [SHIFT] o [2nd F] segons el fabricant de la màquina.

Per exemple, per calcular *arccos 0,5* amb una calculadora del primer tipus, haurem de prémer les tecles [0,5], [INV], [cos].

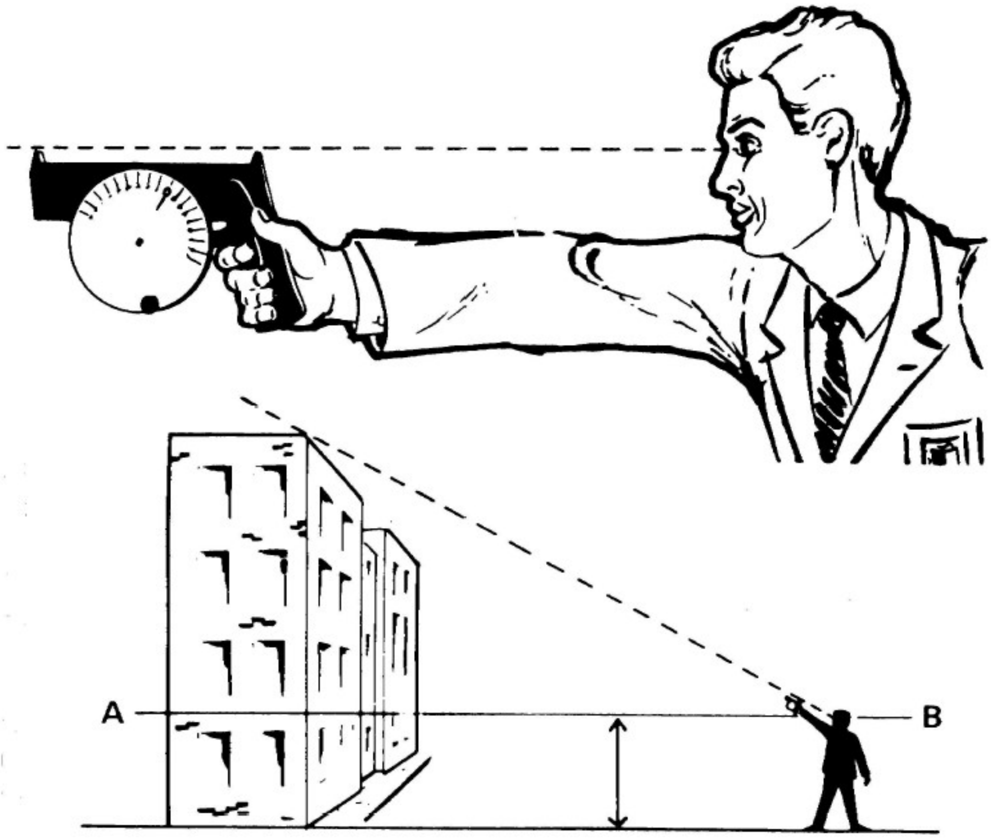
Si la calculadora és del segon tipus, la seqüència canvia una mica: [INV], [cos], [0,5].

Un programa d'ordinador ja sol tenir aquesta funció implementada, per la qual cosa no és necessari usar una tecla auxiliar. Segons el llenguatge que usi el programa, s'escriurà *arccos* (*0.5*) o bé *acos* (*0.5*).

3.5. Calculem altures

Altres cursos, al treballar la semblança, hem calculat altures inaccessibles d'objectes a partir de les ombres que produïen, per comparació amb l'ombra que produïa un objecte d'altura coneguda.

Podem obtenir els mateixos resultats sense dependre de si fa sol o no, si ens ajudem d'un clinòmetre.



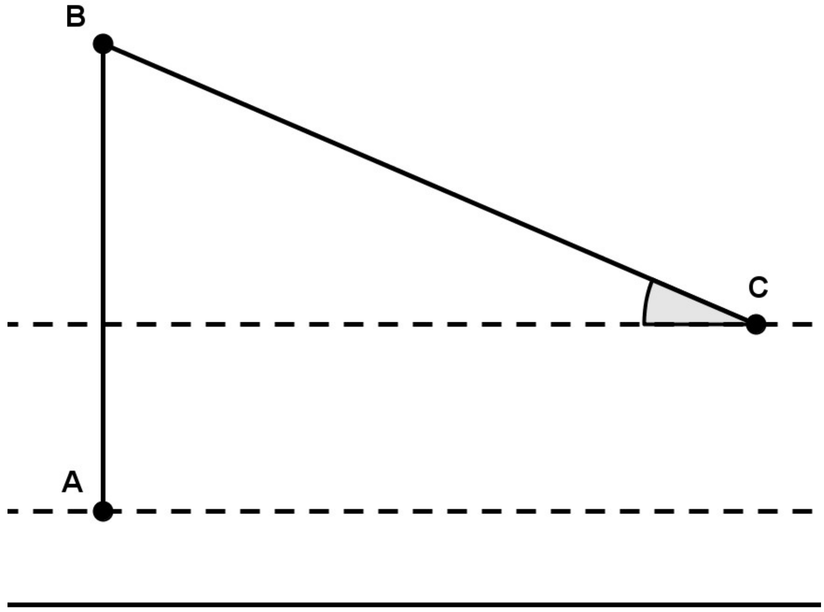
Amb l'angle d'elevació que ens dóna el clinòmetre i la distància que ens separa de l'objecte podem arribar a deduir la seva altura.

Així, pren un clinòmetre i una cinta mètrica i calcula l'altura de:

- Un fanal del pati
- Un arbre del pati
- La paret de la sala polivalent
- La teulada de l'institut
- El primer pis de l'institut

3.6. Vol fins a l'arc de Laia l'Arquera

Sabem que la rotonda de la Porta Laietana (A), on hi ha l'escultura de Laia l'Arquera, es troba a 6 metres sobre el nivell del mar. També sabem que l'altitud a la porta de l'institut (C) és de 19 metres i que l'escultura fa 34 metres des de terra fins a la punta de l'arc (AB).

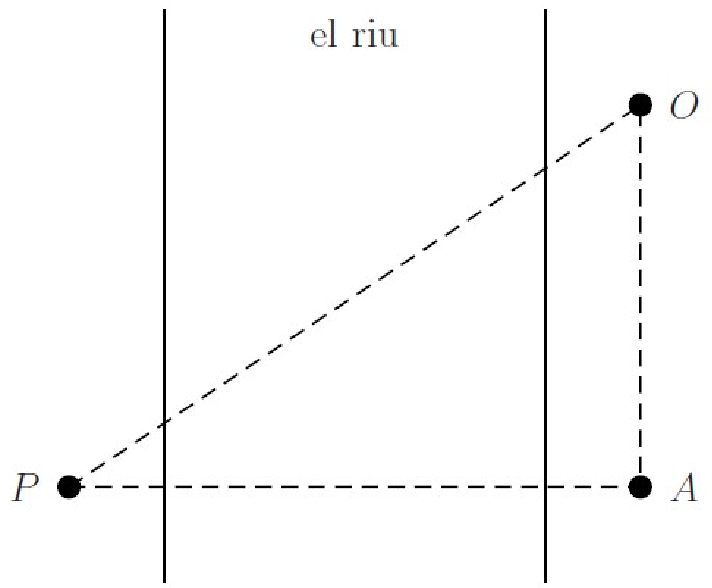


Mesura amb el clinòmetre l'angle que hem d'aixecar la vista per albirar la punta de l'arc de la Laia. Amb aquesta dada, calcula la distància que ha de recórrer un colom que voli en línia recta des de la porta de l'institut fins la dalt de tot de l'escultura.

3.7. Càlcul d'una distància inaccessible

Ens trobem a un terreny completament pla i volem calcular la distància des d'on estem (punt O) a un altre lloc (punt P) d'aquest terreny.

No podem arribar fins on està P, perquè hi ha un riu entre mig que no podem travessar, però sí que ens podem arribar fins a un altre punt A, de forma que els punts O, A i P formen un triangle rectangle.



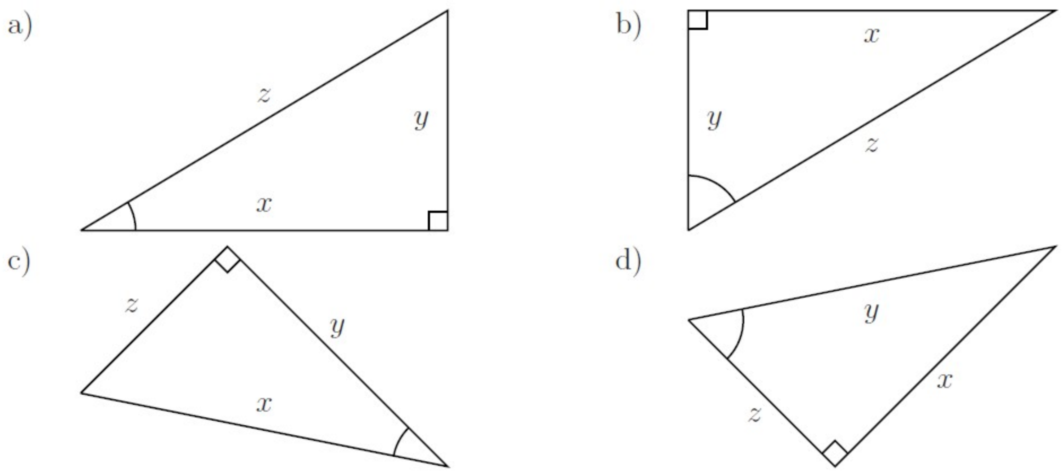
Pots escenificar aquesta situació a la pista del pati de l'institut. Situa't en un punt O sobre una de les línies de la banda i calcula la distància a un punt que es trobi sobre el costat de la porteria.

Descriu acuradament tot el que necessites mesurar, inclou totes les mesures que has fet i els càlculs que has efectuat.

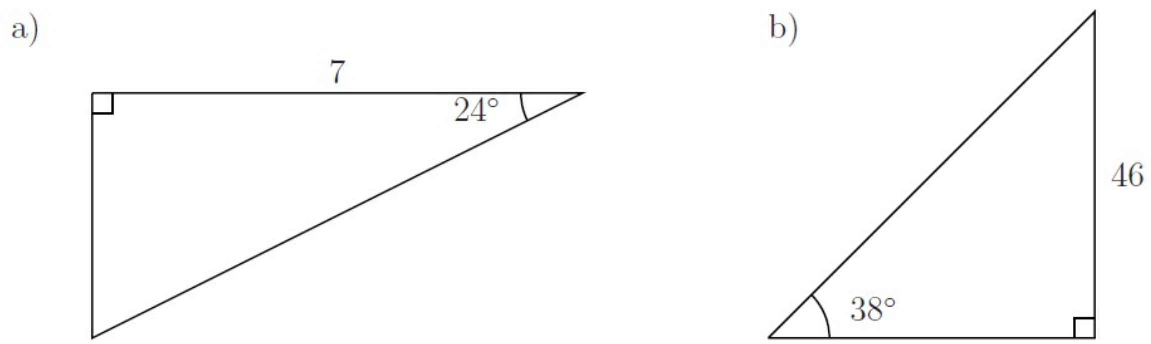
Després, amb una cinta mètrica mesura la distància OP i contrasta-la amb els teus càlculs.

3.8. Exercicis

Exercici 35. Hem anomenat x, y i z els costats dels triangles rectangles següents. Identifica el catet oposat, el catet adjacent i la hipotenusa respecte l'angle indicat en cada cas.

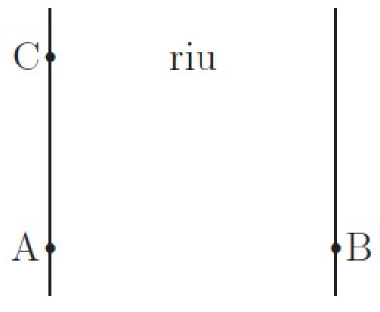


Exercici 36. Troba les mides que falten a cada triangle:



Exercici 37. Volem calcular l'amplada del riu de la figura, és a dir, la distància entre A i B. Per fer-ho seguim la següent estratègia:

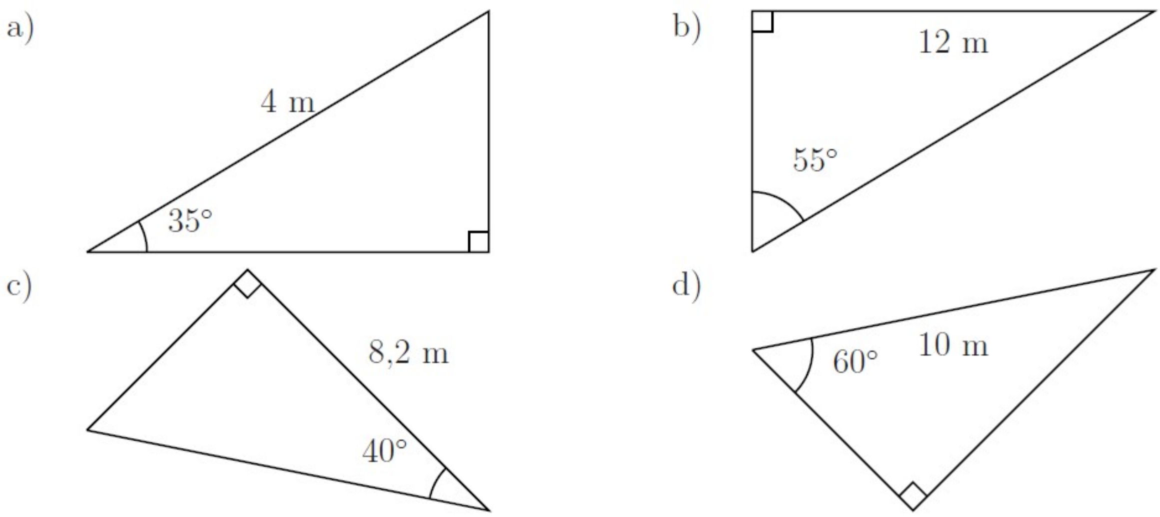
Ens situem al punt A i ens desplacem perpendicularment a AB fins el punt C, situat a 10 metres. Des de C ens mirem l'arbre situat a B, i veiem que l'angle ACB és de 75º.



Quina és l'amplada del riu?

Exercici 38. Des d'un far col·locat en un penya-segat a 50 metres sobre el nivell del mar, l'angle de depressió d'un vaixell és de 35º. A quina distància del far es troba?

Exercici 39. Troba les mides dels costats i dels angles que falten a cada triangle.



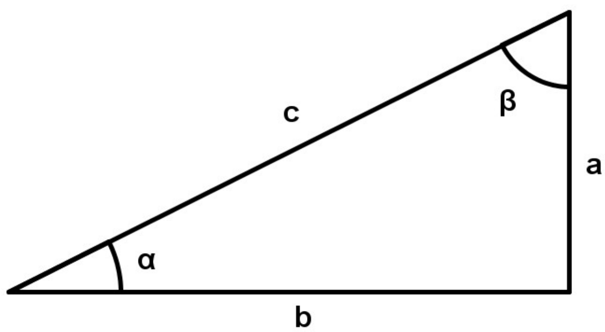
Exercici 40. Un monument està format per un pedestal i per una estàtua a sobre seu. L'alçada del pedestal és de 2 metres. Jaient a la gespa de davant del monument, si mirem el punt més alt de l'estàtua, hem d'aixecar la vista 40º, i si mirem el punt més alt del pedestal, només hem d'aixecar la vista 20º. Quina és l'alçària de l'estàtua? A quina distància del peu del monument estem situats?

Exercici 41. Troba el valor d'α sabent que és un angle agut:

a) *sin α = 0,5*
b) *cos α = 0,1*
c) *tan α = 2,5*
d) *sin α = 1,2*
e) *cos α = 2*
f) *tan α = 1*
g) *cos α = 0,443*
h) *tan α = 10*
i) *sin α = 0,1*
j) *cos α = 0,85*
k) *tan α = 0,2*
l) *sin α = 0,2*

Exercici 42. Resol els següents triangles rectangles:

	a	**b**	**c**	**α**	**β**
1.			4,2	31	
2.	1,4			45	
3.		2		60	
4.	4		6		
5.	5	2,8			

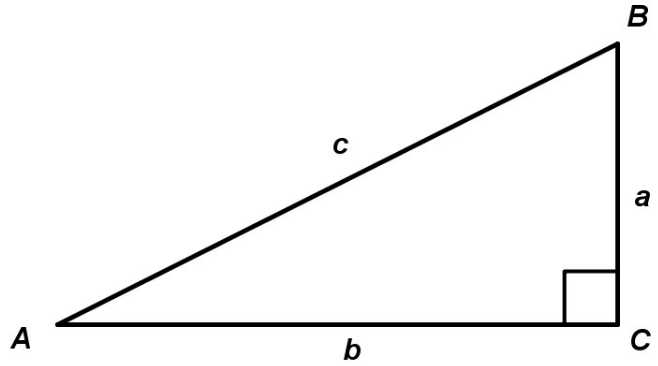


Exercici 43. Els costats d'un rectangle amiden 4 cm i 7 cm. Calcula quins angles forma qualsevol diagonal amb els costats.

4. Relacions en un triangle rectangle

4.1. El teorema fonamental de la trigonometria

Sigui el triangle rectangle de vèrtexs A, B i C. Anomenem a, b i c als seus costats de manera que el vèrtex A sigui oposat al costat a.



Si apliquem el teorema de Pitàgores:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

i dividim els dos membres pel terme c^2, queda:

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = \frac{c^2}{c^2} = 1$$

Observa que si apliquem les definicions del sinus i del cosinus aquesta expressió pot escriure's:

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1$$

o bé

$$\cos^2 B + \sin^2 B = 1$$

Aquesta expressió és molt important i cal que la recordis.

Comprova la validesa d'aquesta fórmula amb aquesta taula:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
30º			
45º			
60º			
28º			
53º			
81º			

4.2. Una relació important

A partir de les definicions donades podem deduir una relació important. Sabem que

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\dfrac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}}}{\dfrac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}}}$$

simplificant denominadors del segon membre, queda

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}$$

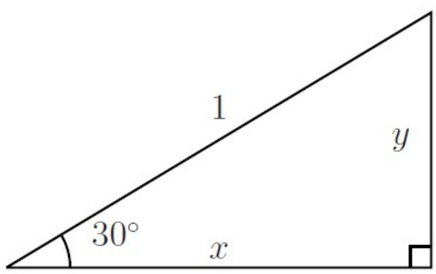
i per tant podem dir que:

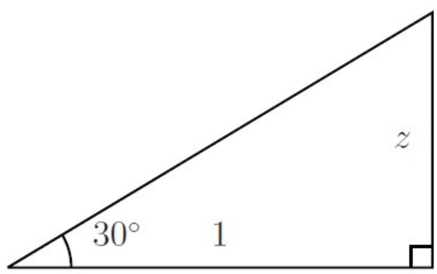
$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha$$

Comprova-ho amb els angles que hi ha a la taula següent:

α	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$	$\tan\alpha$
30º				
45º				
60º				
20º				
53º				
81º				

Exercici 44. El sinus, el cosinus i la tangent d'un angle es poden "visualitzar". Calcula quin és el valor de x, y i z als següents casos:





Exercici 45. Sabem que $\sin\alpha = \frac{1}{3}$. Calcula les altres raons trigonomètriques sense calcular l'angle.

Exercici 46. Sabem que $\cos\beta = \frac{2}{3}$. Calcula les altres raons trigonomètriques sense calcular l'angle.

Exercici 47. Sabem que $\tan\gamma = \frac{1}{3}$. Calcula les altres raons trigonomètriques sense calcular l'angle.

Exercici 48. Sabem que $\sin\delta = \frac{\sqrt{3}}{3}$. Calcula les altres raons trigonomètriques sense calcular l'angle.

Exercici 49. Sabem que $\cos\phi = \frac{\sqrt{2}}{4}$. Calcula les altres raons trigonomètriques sense calcular l'angle.

Exercici 50. Sabem que $\sin\mu = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Calcula les altres raons trigonomètriques sense calcular l'angle.

Exercici 51. Si $\sin\varpi = a$, troba una expressió per a $\cos\varpi$ i $\tan\varpi$.

Exercici 52. Si $\tan\rho = a$, troba una expressió per a $\sin\rho$ i $\cos\rho$.

Exercici 53. Dedueix les raons trigonomètriques de 30º, 45º i 60º.

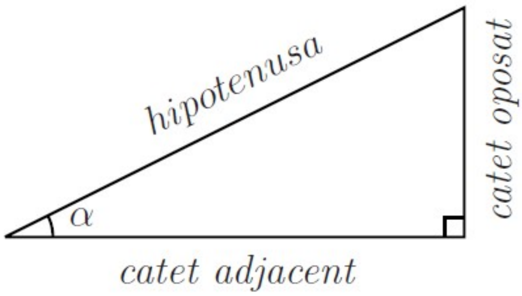
Exercici 54. Completa la taula:

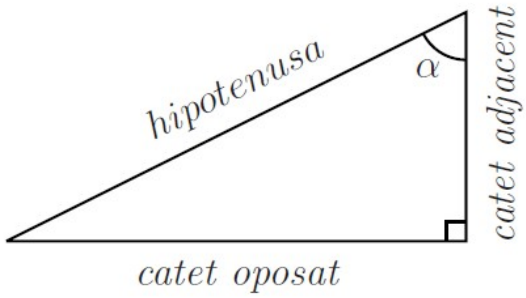
α	$\sin\alpha$	$90-\alpha$	$\cos(90-\alpha)$
5º			
10º			
15º			
20º			
25º			
30º			
40º			
50º			
60º			
70º			
80º			

Què observes? Dóna una justificació per a aquest fet.

4.3. Resum

- En un triangle rectangle diferenciarem entre catet adjacent i catet oposat respecte un angle agut considerat. La hipotenusa és el costat més llarg i l'oposat a l'angle recte.



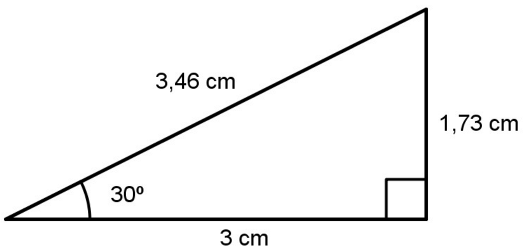


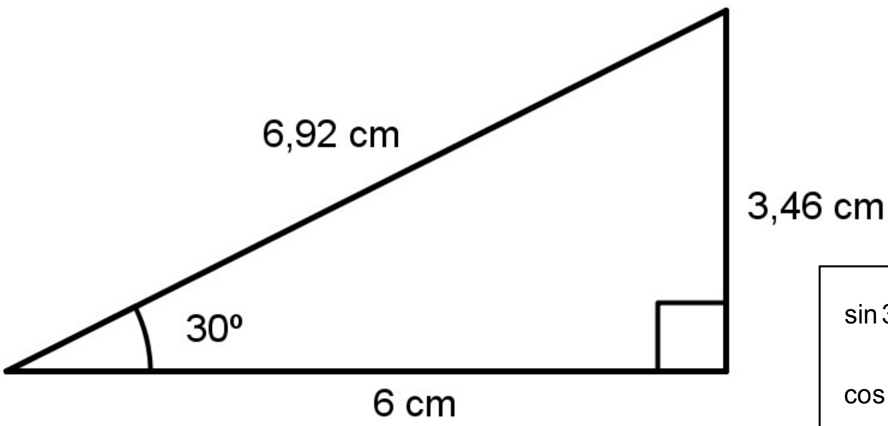
- Es defineixen les següents raons trigonomètriques:

$$\sin\alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{hipotenusa}} \qquad \cos\alpha = \frac{\text{catet adjacent}}{\text{hipotenusa}} \qquad \tan\alpha = \frac{\text{catet oposat}}{\text{catet adjacent}}$$

- Les raons trigonomètriques només depenen de l'angle agut considerat, és a dir, si dos triangles rectangles diferents tenen un angle agut igual, aleshores les seves raons trigonomètriques seran iguals.

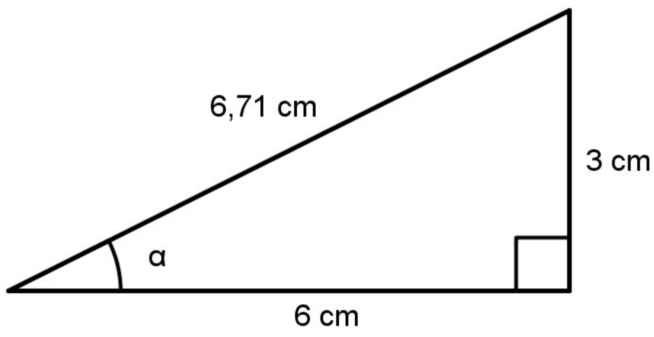
$$\sin 30^\circ = \frac{1{,}73}{3{,}46} = 0{,}5$$
$$\cos 30^\circ = \frac{3}{3{,}46} \approx 0{,}87$$
$$\tan 30^\circ = \frac{1{,}73}{3} \approx 0{,}58$$





$$\sin 30^\circ = \frac{3{,}46}{6{,}92} = 0{,}5$$
$$\cos 30^\circ = \frac{6}{6{,}92} \approx 0{,}87$$
$$\tan 30^\circ = \frac{3{,}46}{6} \approx 0{,}58$$

- Les funcions inverses *arcsinus*, *arccosinus* i *arctangent* permeten determinar l'angle si es coneix alguna de les seves raons trigonomètriques:



$$\sin\alpha = \frac{3}{6{,}71} \approx 0{,}477 \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha = \arcsin 0{,}477 \approx 26{,}6º$$

$$\cos\alpha = \frac{6}{6{,}71} \approx 0{,}894 \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha = \arccos 0{,}894 \approx 26{,}6º$$

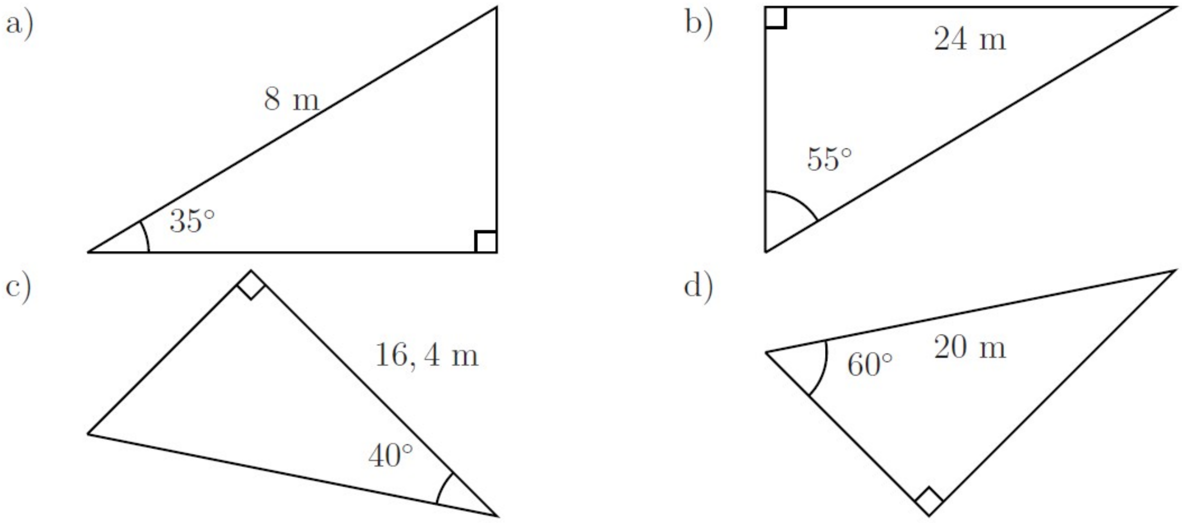
$$\tan\alpha = \frac{3}{6} = 0{,}5 \rightarrow$$
$$\rightarrow \alpha = \arctan 0{,}5 \approx 26{,}6º$$

- Relacions importants:

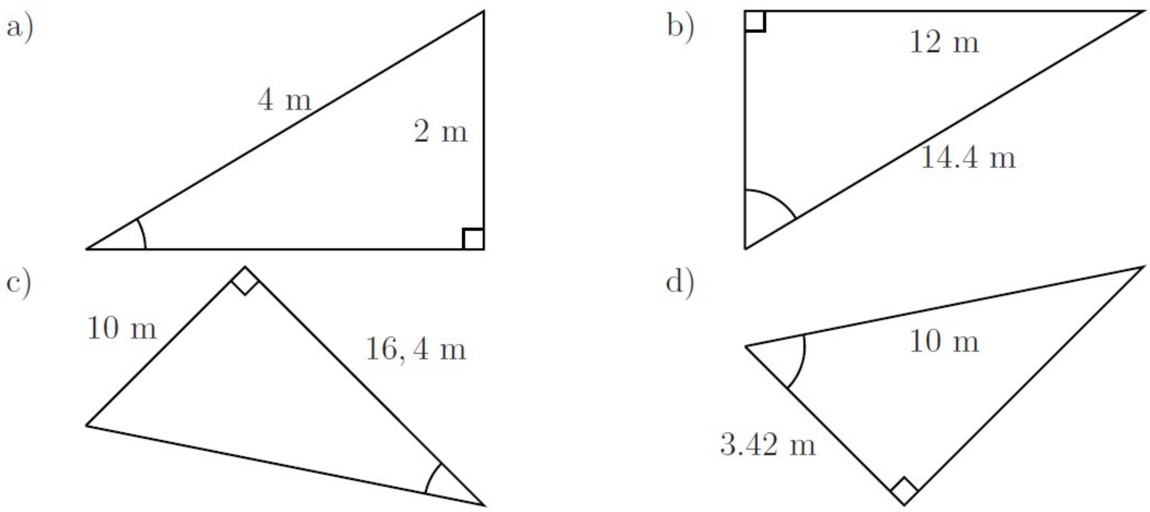
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \qquad\qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

5. Activitats de reforç

Exercici 55. Troba les mides dels costats i dels angles que falten a cada triangle:



Exercici 56. Calcula l'angle indicat en els següents triangles rectangles:



Exercici 57. Calcula la hipotenusa d'un triangle rectangle sabent que els catets són 4 i 5 cm.

Exercici 58. Calcula la longitud de la hipotenusa d'un triangle rectangle sabent que els seus catets mesuren 9 i 40 cm.

Exercici 59. Calcula la longitud d'un catet sabent que la hipotenusa amida 37 cm i un catet 12 cm.

Exercici 60. Calcula totes les raons trigonomètriques dels dos angles aguts del triangle rectangle de catets de 12 i 5 cm.

Exercici 61. Quan el sol és a una altura de 30º sobre l'horitzó, l'ombra d'un edifici és de 40,3 metres. Quina altura té l'edifici?

Exercici 62. Des d'un aeròdrom situat a nivell del mar veiem un avió amb un angle d'elevació de 30º. El pilot ens comunica (per ràdio) que el seu altímetre li marca 750 metres. Quina distància ens separa de l'avió?

Exercici 63. La diagonal d'un rectangle amida 40 centímetres, i fa un angle de 50º amb el costat menor. Quina longitud tenen els costats del rectangle?

Exercici 64. Calcula l'altura d'un pal vertical que projecta una ombra de 1,5 metres quan l'altura del sol sobre l'horitzó és de 53º.

Exercici 65. Una persona que fa 1,85 metres d'alçada, en un moment determinat projecta una ombra de 1,6 metres. Calcula l'altura del Sol, és a dir, l'angle que forma la visual del Sol amb la visual de l'horitzó, és a dir, l'angle d'elevació del Sol.

Exercici 66. En una excursió hem pogut comprovar que en un tram de 530 metres (mesurats amb un podòmetre) hem pujat un desnivell de 120 metres (mesurats amb un altímetre). Quin és el pendent mitjà d'aquest tram? Quin angle li correspon?

Exercici 67. El túnel de Viella té 5080 metres de llarg. La seva boca sud està a 1626 metres sobre el nivell del mar i la seva boca nord està a 1400 metres sobre el nivell del mar. Quin pendent té el túnel? Quin angle d'inclinació té el túnel?

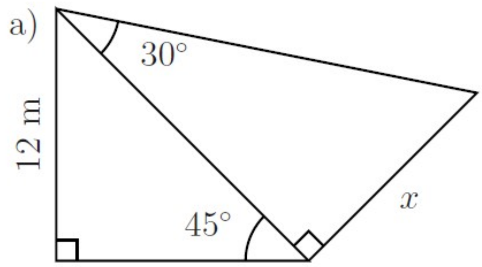
Exercici 68. Si enfoquem la xemeneia d'un edifici amb el teodolit podem llegir un angle d'elevació de 42º. La distància horitzontal que ens separa de l'edifici és de 31 metres. Determina la distància que ens separa de la xemeneia i l'altura a la que està aquesta xemeneia, sabent que l'altura del teodolit respecte el terra és de 120 cm.

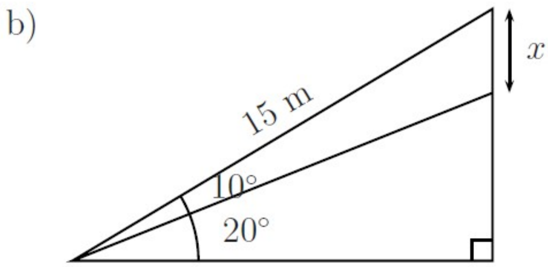
Exercici 69. Si enfoquem amb el teodolit la part superior d'un pal de telèfon de fusta observem un angle d'elevació de 28º. Sabem que l'altura d'aquests pals és d'uns 6 metres i l'altura del teodolit respecte el terra és de 120 cm. Quina distància ens separa de la base del pal?

Exercici 70. Una escala de 4 metres posada sobre la paret forma un angle de 50º amb el terra. A quina altura arriba l'escala?

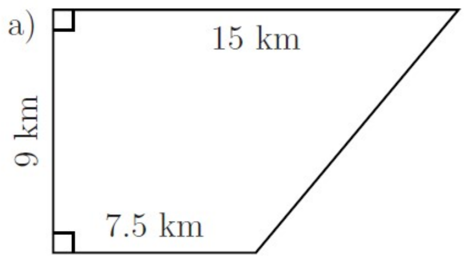
6. Activitats d'ampliació

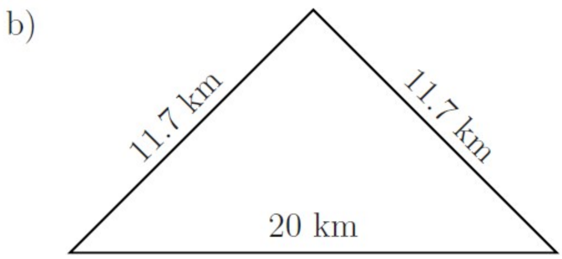
Exercici 71. Calcula el valor d'x en les següents figures:



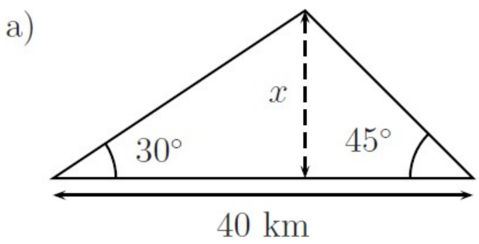


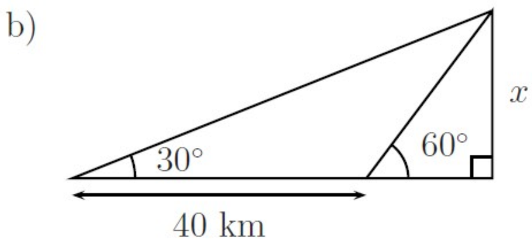
Exercici 72. Calcula els angles de les dues figures seg¨uents:





Exercici 73. Calcula el valor d'x en les següents figures:





Exercici 74. Dos arbres estan separats 5 metres, i l'arbre petit té una altura de 4 metres. Situats a una certa distància de l'arbre petit, observem que aquest eclipsa exactament l'arbre gran, i l'angle d'elevació és de 35º. Calcula l'altura de l'arbre gran.

Exercici 75. Un focus de llum està penjat al sostre d'una habitació a 2,5 metres d'altura. La zona il·luminada té un diàmetre de 2 metres. Quina és l'obertura dels raigs de llum?

Exercici 76. Un carrer està orientat de nord a sud, i té una amplada de 15 metres (incloses les voreres). Ens interessa que, a l'hivern, que és quan els raigs de sol venen més inclinats (per això diem que el sol va més baix), l'ombra d'una casa no arribi a tocar l'altra casa. En aquestes latituds, l'angle d'inclinació dels raigs de sol respecte la vertical és, el dia del solstici d'hivern i al migdia, de 65º. Quina ha de ser la màxima altura permesa?

Exercici 77. Una casa té 12 metres d'altura. Al nord d'aquesta casa volem construir una altra casa. A quina distància hem de construir-la per tal que la primera no li pugui fer ombra al migdia del solstici d'hivern?

Exercici 78. Una escala de 4 metres de llarg està recolzada en una paret de manera que arriba a una altura de 3 metres. Quin angle fa l'escala amb la paret?

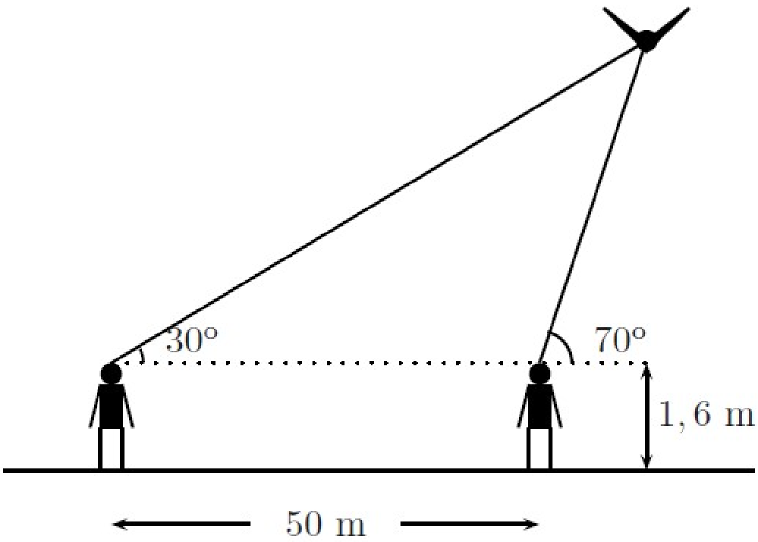
Exercici 79. Calcula l'altura de la piràmide de Keops, la més gran de l'Egipte, sabent que el costat de la base quadrada amida 230 metres i la distància del vèrtex al punt mitjà d'un costat de la base fa 186 metres.

Exercici 80. Quan diem que un televisor és de 19 polzades s'entén que la diagonal de la pantalla rectangular del televisor és de 19 polzades. Sabent que les dimensions de la pantalla d'un televisor tenen sempre una relació 3/4, estableix la longitud, expressada en polzades, de les dimensions de la pantalla d'un televisor de 19 polzades. Sabent que una polzada són 2,54 cm, dóna el resultat de l'exercici en centímetres.

Exercici 81. Calcula la diagonal d'un cub de costat 10 cm.

Exercici 82. Hem de tensar una antena amb tres cables. Aquests es lligaran a l'antena a una altura de 8 metres, i es fixaran al terra a una distància de 5 metres de la seva base. Quina longitud de cable necessitem?

Exercici 83. Calcula a quina altura del terra vola aquest ocell.



Exercici 84. La distància mitjana entre la Terra i la Lluna és de 384000 km i el radi de la Lluna és 1738 km. Quina és la grandària aparent de la Lluna?

Exercici 85. La distància mitjana entre la Terra i el Sol és de $1{,}49 \cdot 10^{11}$ metres i el diàmetre del Sol és $1{,}39 \cdot 10^{9}$ metres. Quina és la grandària aparent del Sol?

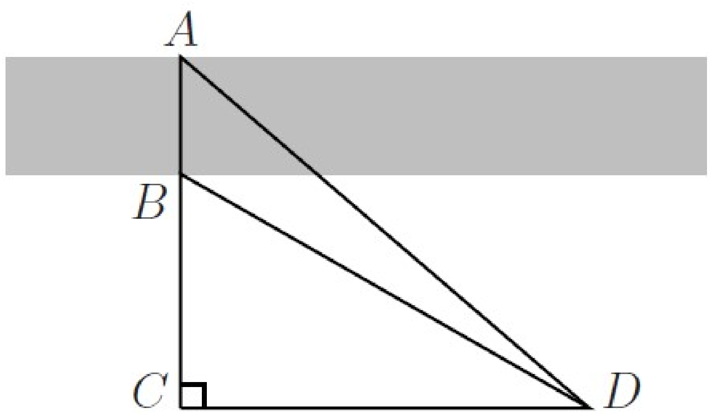
Exercici 86. L'amplada d'un camp de futbol és de 50 metres i la de la porteria és de 8 metres. Si un jugador està situat a 18 metres de la línia de fons i sobre la línia de banda, amb quin angle veu la porteria?

Exercici 87. Estem situats davant d'un monument. Si mirem el seu punt més alt, hem d'aixecar la vista 30º. Si ens apropem 40 metres, hem d'aixecar la vista 60º. Quina altura té el monument?

Exercici 88. Dues persones, que estan separades 2500 metres, observen un globus aerostàtic volant entre elles. Una persona ha d'aixecar la vista 40º i l'altra persona 60º. A quina altura vola el globus?

Exercici 89. Dues persones es troben a la platja i, mirant el mar, descobreixen un vaixell força allunyat de la costa. Tenen curiositat de saber a quina distància de la platja es deu trobar. Per calcular-ho fan el següent: es separen 50 metres seguint una línia paral·lela al mar deixant el vaixell entre mig dels dos. Mesuren l'angle que forma la visual amb la recta que determinen ells dos: un és de 55º i l'altre és de 75º. Calcula la distància a la que es troba el vaixell de la costa.

Exercici 90. Volem mesurar l'amplària d'un riu. Per fer-ho triem un punt C alineat amb A i B, i un altre D de manera que l'angle DCA mesuri 90º. Després mesurem la distància CD = 200 metres i els angles BDC = 25,4º, ADC = 40,5º. Calcula l'amplària AB.

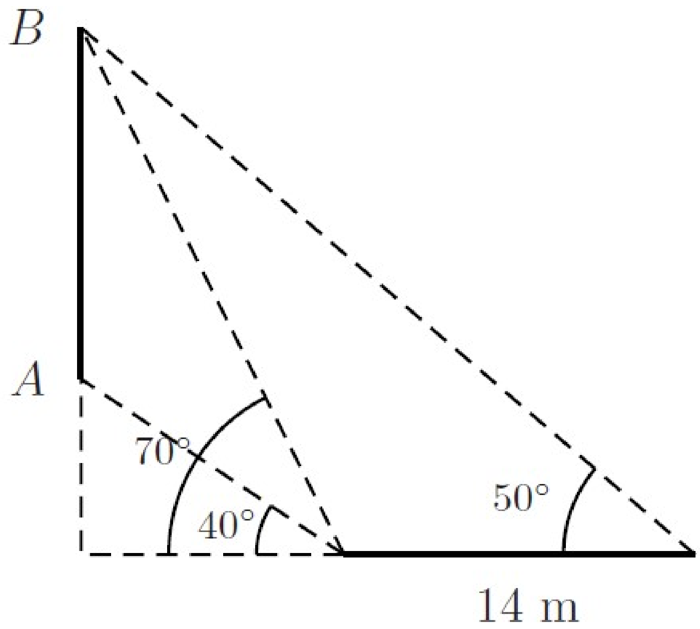


Exercici 91. Un avet fa una ombra de 8 metres de llarg sobre el pendent d'una muntanya. La muntanya té una inclinació de 30º respecte l'horitzontal i l'altura del sol sobre l'horitzó és de 40º. Quina altura té l'arbre?

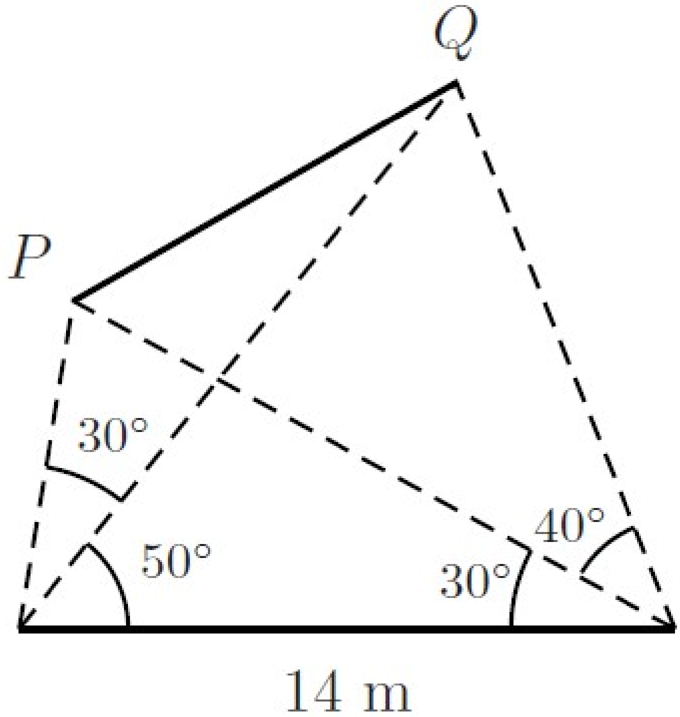
Exercici 92. Des d'un punt situat en un pla horitzontal, es veu el cim d'una torre sota un angle de 30º. Si ens acostem 75 metres cap al peu de la torre, aquesta es veu sota un angle de 60º. Troba'n l'altura.

Exercici 93. L'angle d'observació del cim d'una muntanya des d'un punt situat al pla és de 50º. Si ens acostem 30 metres cap a la muntanya, l'angle és de 54º. Troba l'altura de la muntanya.

Exercici 94. Observa les dades de la figura i calcula la longitud AB:



Exercici 95. Utilitza les dades que trobaràs en el dibuix per calcular la distància entre P i Q.



7. Solucions dels exercicis

30. (14) a) 0,466; b) 0,625; c) 0,287; d) 0,839; e) 1,608; f) 1,192
31. (15) 14,4 m
32. (16) 10,8 m
33. (17) 26 m
34. (18) 0,3636 i 1,1917
36. (20) 3,11 i 7,66; 58,9 i 74,7
37. (21) 37,3 m
38. (22) 87,17 m
39. (23) a) 3,28 m, 2,29 m i 55º; b) 14,65 m, 8,40 m i 35º; c) 10,7 m, 6,88 m i 50º; d) 8,66 m, 5 m i 30º
40. (24) 2,6 m i 5,5 m
41. (25) a) 30º; b) 84,26º; c) 68,19º; d) no té solució; e) no té solució; f) 45º; g) 63,7º; h) 84,3º; i) 5,7º; j) 31,8º; k) 11,31º; l) 11,54º
42. (26) a) a = 2,2 b = 3,6 β = 59º; b) c = 2 b = 1,41 β = 45º; c) c = 4 a = 3,46 β = 30º; d) a = 4,47 α = 42º β = 48º; e) c = 5,7 α = 60,5º β = 29,5º
43. (27) 29,74º i 60,26º
44. (28) x = cos 30º, y = sin 30º, z = tan 30º
45. (29) $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\tan\alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$
46. (30) $\sin\beta = \frac{\sqrt{5}}{9}$; $\tan\beta = \frac{\sqrt{5}}{6}$
47. (31) $\sin\gamma = \frac{\sqrt{10}}{10}$; $\cos\gamma = \frac{3\sqrt{10}}{10}$
48. (32) $\cos\delta = \frac{\sqrt{6}}{3}$; $\tan\delta = \frac{\sqrt{2}}{2}$
49. (33) $\sin\phi = \frac{\sqrt{14}}{4}$; $\tan\phi = \sqrt{7}$
50. (34) $\sin\mu = \frac{\sqrt{22}}{11}$; $\cos\mu = \frac{3\sqrt{11}}{11}$
51. (35) $\cos\varpi = \sqrt{1-a^2}$; $\tan\varpi = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}}$
52. (36) $\sin\rho = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$; $\cos\rho = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}$
55. (39) a) 6,56 m, 4,58 m i 55º; b) 29,3 m, 16,8 m i 35º; c) 21,4 m, 13,76 m i 50º; d) 17,32 m, 10 m i 30º
56. (40) a) 30º; b) 56,44º◦; c) 31,37º; d) 70º
57. (41) 6,4 cm
58. (42) 41 cm
59. (43) 35 cm
60. (44) sinB = cosC = 0,38, cosB = sinC = 0,92, tanB = 0,42 i tanC = 2,40
61. (45) 23,3 m
62. (46) 1500 m
63. (47) 30,6 i 25,7 cm
64. (48) 2 m
65. (49) 49º
66. (50) 2,3% i 13º

67. (51) 4,45% i 2,55º
68. (52) 41,7 m i 29,11
69. (53) 9 m
70. (54) 3,1 m
71. (55) a) x =8,48 b) x =2,37
72. (56) a) 90º, 90º, 50,2º, 129,8º; b) 31,3º, 31,3º, 117,4º
73. (57) a) x =14,64; b) x =22,52
74. (58) 7,5 m
75. (59) 44º
76. (60) 7 m
77. (61) A partir de 5,6 m
78. (62) 41º
79. (63) 146,2 m
80. (64) 38,6 cm per 29 cm
81. (65) 17,3 cm
82. (66) 28,3 cm
83. (67) 38,1 m
84. (68) 0,52º
85. (69) 0,53º
86. (70) 9º
87. (71) 17,32 m resp. ulls
88. (72) 1413 m
89. (73) 68,1 m
90. (74) 75,85 m
91. (75) 1,8 m
92. (76) 65 m
93. (77) 266,5 m
94. (78) 10,39 m
95. (79) 9,5 m