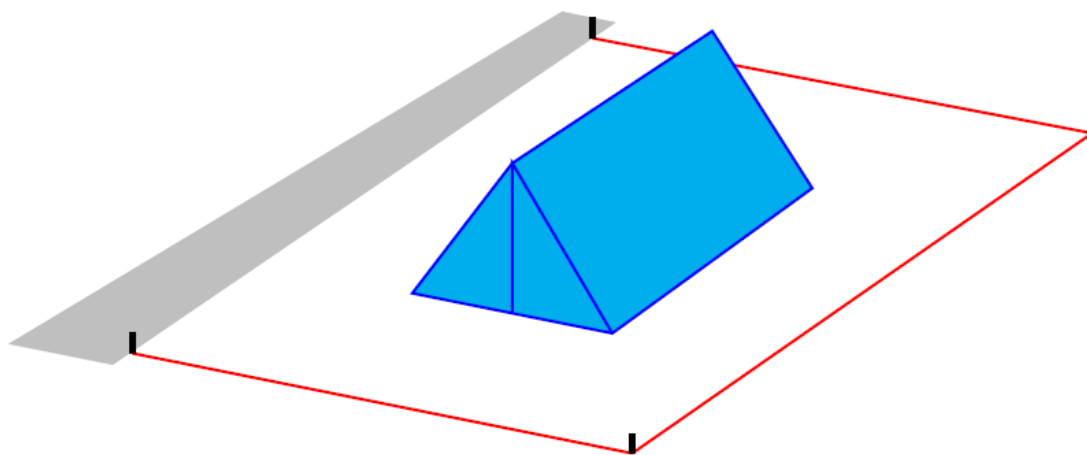


EQUACIONS DE $2n$ GRAU. LA FUNCIÓ QUADRÀTICA

1. Estudi d'algunes situacions

1.1. L'àrea d'un tancat

Uns campistes, després de demanar permís al propietari del terreny, planten la seva tenda a prop d'un riu. Decideixen de fer un tancat rectangular, aprofitant el riu com un dels costats; així, sols ha de pensar en els altres tres costats.



Aquests campistes tenen 100 metres de fil, i els interessa que l'àrea del tancat sigui el més gran possible.

- Si al recinte li donen una amplada de 10 metres, quina serà la llargada?
- Quins són els valors màxims i mínims de l'amplada?
- Com varia la llargada del tancat quan l'amplada pren tots els valors possibles.
- Calcula l'àrea del tancat per a una amplada de 10 metres. Calcula-la també per alguns altres valors de l'amplada.
- Fes un esbós de la gràfica que mostri com varia l'àrea del tancat en funció de la seva amplada.
- Construeix una taula de valors que doni l'àrea a partir de l'amplada del recinte.
- Representa gràficament les dades de la taula de valors.
- Troba l'expressió algebraica de l'àrea en funció de l'amplada. (Anomena y a l'àrea i x a l'amplada).
- Per a quines dimensions (ample i llarg) l'àrea del tancat serà màxima?
- Què passaria si no hi hagués el riu i s'hagués de posar filat pels quatre costats del tancat?

1.2. Bigues

Una empresa de construcció fabrica bigues de 10 metres de longitud i secció quadrada. Sabem que la seva densitat és 5 Tm/m^3 , és a dir, cada m^3 pesa 5 Tm.

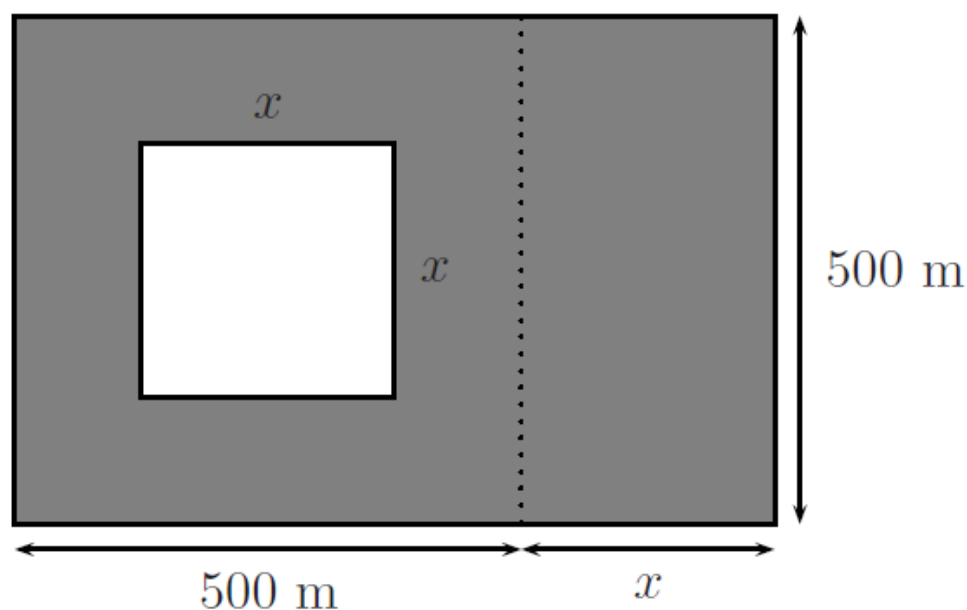
- a) Si anomenem x al costat del quadrat i y a la variable pes, completa la taula següent:

$x \text{ (m)}$	0	0,5	1	1,5	2	2,5
$y \text{ (Tm)}$						

- b) Representa gràficament les dades que has obtingut a la taula anterior.
- c) Pots expressar amb una fórmula la relació funcional entre el pes (y) i la longitud del costat del quadrat de la secció (x)?

1.3. Estudi d'una àrea

Volem estudiar l'àrea de la figura següent en funció dels valors de x .



- a) Anomena y a l'àrea de la figura. Observa entre quins valors pot variar x i construeix una taula que doni l'àrea (y) en funció de x .
- b) Representa gràficament l'àrea del recinte en funció de x .
- c) Comenta el que observes.
- d) Pots trobar una fórmula que expressi l'àrea de la figura en funció de x ?

1.4. Si variem els preus...

A l'Ateneu es fan sessions de cinema. El gerent té comprovat que amb un preu per entrada de 5 euros, la mitjana d'assistents és de 120 espectadors. El gerent estima que per cada 10 cèntims que pugi el preu, vindran 8 persones menys.

Analitza la situació. Calcula el nombre d'assistents per a diferents preus de l'entrada i raona si hi ha un preu en el que els guanys siguin màxims.

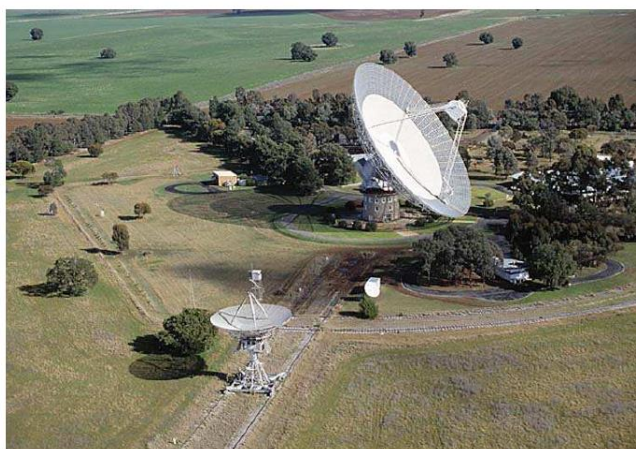
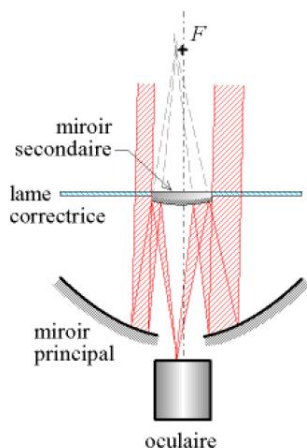
2. Reconèixer la paràbola a l'entorn

La paràbola és una corba que apareix en moltes situacions a la natura, a l'art i l'enginyeria. Aquí tens uns quants exemples:

- Una pilota de futbol en un llançament de falta sense efecte segueix una trajectòria en forma de paràbola.
- Si enfoquem perpendicularment una llanterna a una paret obtenim un cercle. Si la inclinem lleugerament, el cercle es deforma adquirint la forma d'una el·lipse. Si continuem inclinant la llanterna fins que un extrem de l'el·lipse desaparegui haurem obtingut una paràbola.
- Les paràboles tenen una propietat molt important que explica moltes de les seves aplicacions. Qualsevol raig paral·lel a una recta anomenada eix que incideix a la paràbola, es reflectirà en un raig que sempre passa per un mateix punt anomenat focus.

Els telescopis astronòmics, per tal d'obtenir una imatge més nítida, concentren els raigs en sol punt. Això es pot aconseguir fent servir miralls parabòlics, gràcies a la propietat abans esmentada.

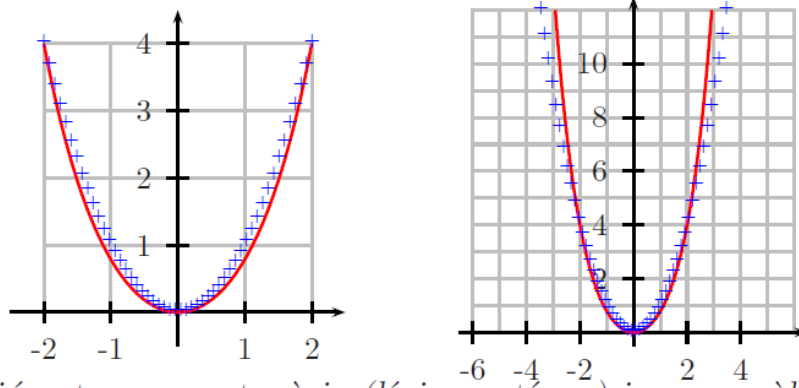
Altres aparells que fan servir la propietat del focus i per aquest motiu tenen forma parabòlica són les antenes parabòliques, els radars i radiotelescopis, els micròfons de llarg abast, els miralls de les llanternes i dels fars, etc.



Disseny d'un telescopi astronòmic (esq.) i radiotelescopis de Parkes, Nova Gales del Sud, Austràlia (dr.).

(Autors: C. Dang i A. Pingstone-CSIRO, respectivament; fotografies obtingudes de la Viquipèdia.)

Una altra forma molt semblant a la paràbola és la catenària: és la que pren una cadena o una corda que penja dels seus dos extrems.



Comparació entre una catenària (línia contínua) i una paràbola (creus).

Precisament aquesta és la forma ideal per construir un marc de porta o d'una finestra. La catenària és la forma que prendrà un objecte essencialment lineal (com una corda) per tal de suportar el mínim de tensions. Per aquest motiu, l'arc catenari (la catenària invertida) serà l'arc que suportarà el mínim de traccions. Quan un arquitecte projecta un arc, ha de tenir en compte totes les forces que es generen pel fet d'haver creat aquesta obertura, i per això hi posa contraforts. En el cas de l'arc catenari no calen contraforts: l'arc s'aguanta a si mateix!

L'arquitecte Antoni Gaudí va fer servir molts arcs catenaris en les seves construccions, com les arcades de les golfes de La Pedrera. Observa que el perfil dels campanars de la Sagrada Família segueix també una catenària.



Arcs catenaris a les golfes de La Pedrera (Barcelona) i a la Sagrada Família.

(Autors: desconegut i A. Gaillard, respectivament; fotografies obtingudes de la Viquipèdia.)

3. Estudi de la funció quadràtica

Les funcions quadràtiques són aquelles que venen definides per expressions quadràtiques, és a dir, són de la forma $y = ax^2 + bx + c$, on a , b , c són uns nombres fixos que s'anomenen coeficients. Començarem el seu estudi sistemàtic deduint quines relacions hi ha entre els seus coeficients i la gràfica.

3.1. La forma de la gràfica

Representa les funcions i, a la vista de les gràfiques, respon:

a) $y = x^2 - 4x + 1$

b) $y = -2x^2 + 6x$

c) $y = 3x^2 - x + 6$

d) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$

e) $y = -3x^2$

f) $y = x^2 + 1$

g) $y = -5x^2 + 11x - 1$

h) $y = \frac{1}{5}x^2 - x + 1$

i) $y = 4x^2 - 7x - 11$

- Quina és la forma que apareix en el gràfic? Descriu-la.
- Quines diferències hi ha entre elles?
- Localitza els punts de tall amb els eixos. Dóna les seves coordenades.
- Les gràfiques, són creixents o decreixents?

3.2. La influència del terme independent

En aquest apartat estudiarem com canvia la gràfica de $y = ax^2 + bx + c$ a mida que canviem el valor c . Aquest terme c de l'expressió s'anomena terme independent.

Representa les funcions següents:

a) $y = 2x^2 - 5x + 1$

b) $y = 2x^2 - 5x + 4$

c) $y = 2x^2 - 5x + 6$

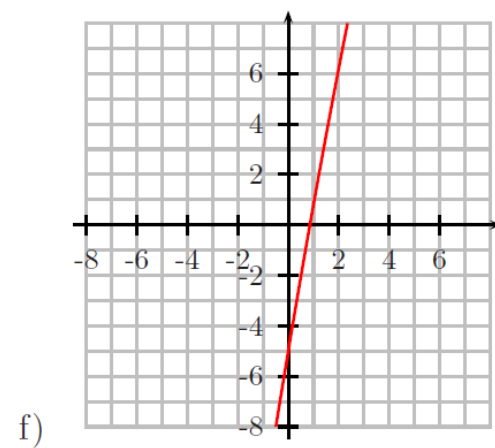
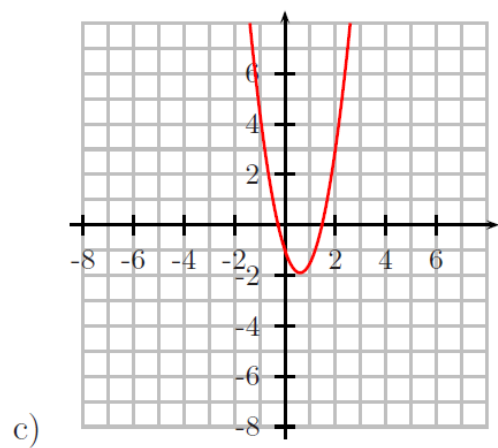
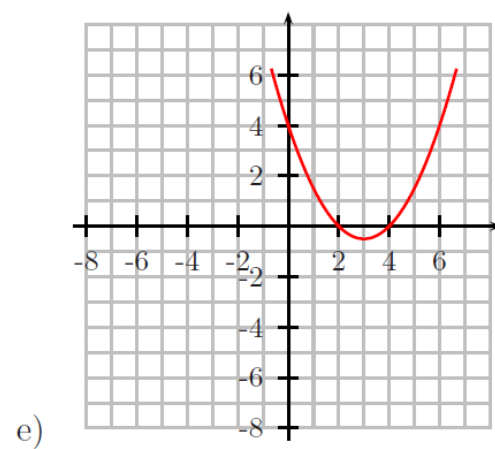
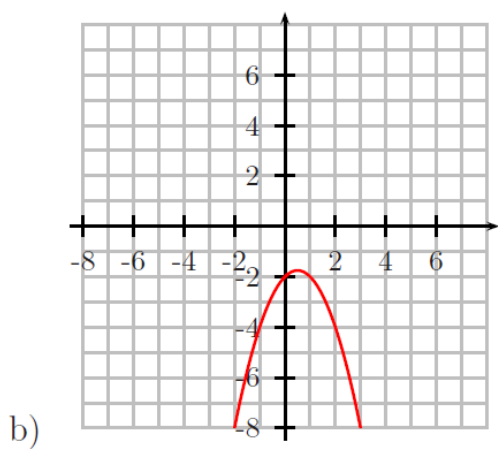
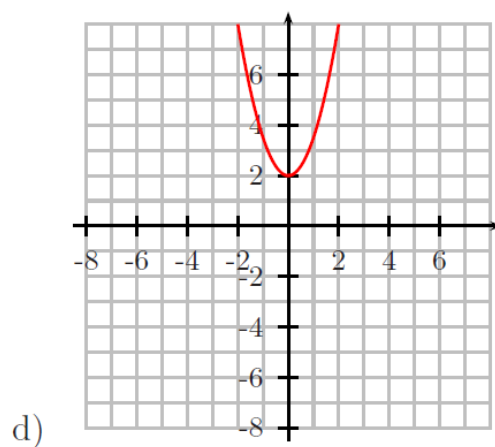
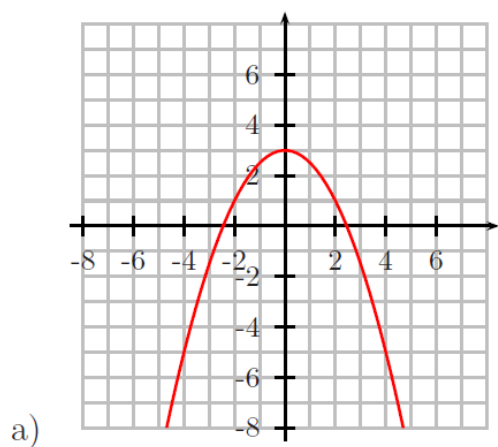
d) $y = 2x^2 - 5x - 2$

e) $y = 2x^2 - 5x - 3$

f) $y = 2x^2 - 5x - 5$

Fixa't que les expressions són idèntiques tret del seu terme independent; per tant, les diferències que observis en les gràfiques només seran atribuïbles al terme independent. Escribeu la teva conclusió.

Exercici 1. Raona de quina manera pots identificar el terme independent c de les gràfiques següents i calcula'l en cada cas:



3.3. La influència del coeficient quadràtic

Ara investigarem la influència del coeficient a en l'expressió $y = ax^2 + bx + c$.

Representa gràficament les funcions següents:

a) $y = x^2$

b) $y = 2x^2$

c) $y = 3x^2$

d) $y = 4x^2$

e) $y = -x^2$

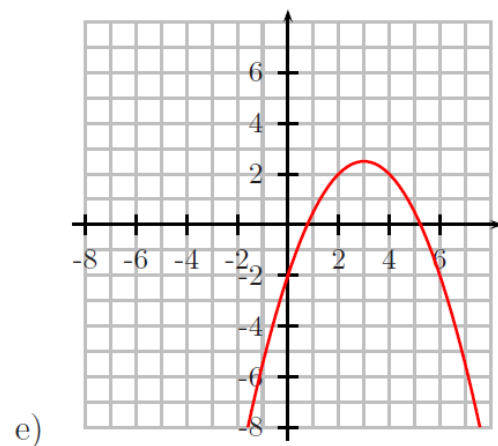
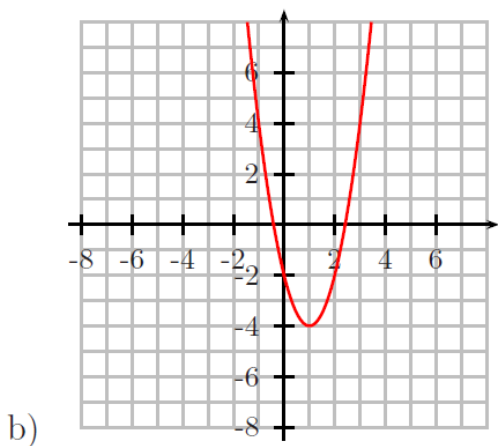
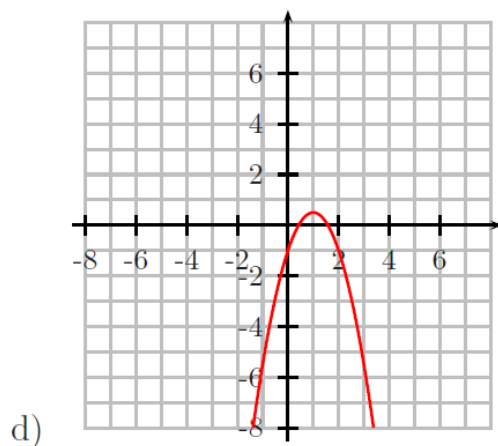
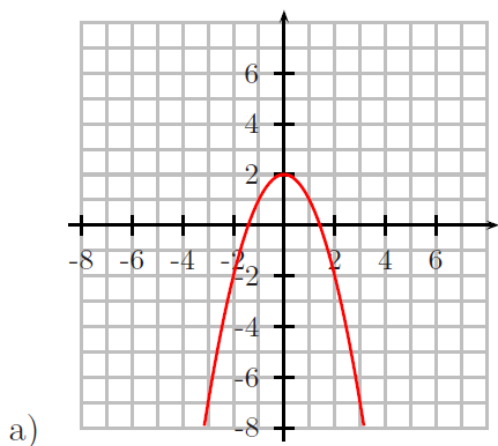
f) $y = -2x^2$

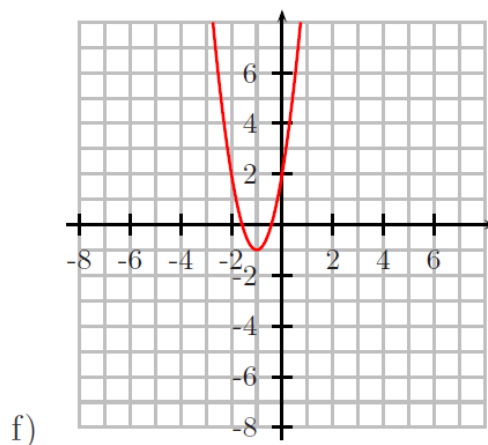
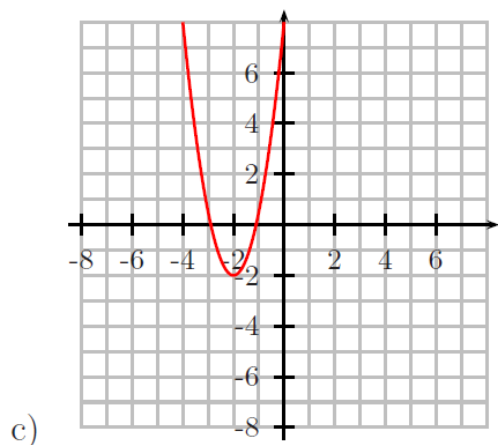
g) $y = -3x^2$

h) $y = -4x^2$

Les semblances i diferències només poden ser degudes al coeficient quadràtic (perquè els altres no canvien de valor). Què observes? Confirma les teves conclusions amb les observacions de les gràfiques de $y = x^2$, $y = x^2 + 5x - 2$, $y = 3x^2$, $y = 3x^2 - 2x - 1$, $y = -x^2$ i $y = -x^2 + 3x - 4$.

Exercici 2. Raona de quina manera pots identificar el coeficient quadràtic a a partir de les gràfiques següents:





3.4. La influència del terme lineal

Acabarem estudiant la influència del terme lineal b en la gràfica de $y = ax^2 + bx + c$. Hem deixat pel final aquest terme perquè és el que té la interpretació menys evident.

Representa una a una les funcions següents i ves anotant les diferències que apareixen:

a) $y = x^2 + 2x + 1$

b) $y = x^2 + 4x + 1$

c) $y = x^2 + 6x + 1$

d) $y = x^2 + 8x + 1$

e) $y = x^2 + 1$

f) $y = x^2 - x + 1$

g) $y = x^2 - 2x + 1$

h) $y = x^2 - 3x + 1$

i) $y = x^2 - 4x + 1$

A quina conclusió arribes? Confirma-la a la vista de aquestes altres gràfiques:

j) $y = 2x^2 + 1$

k) $y = 2x^2 + 2x + 1$

l) $y = 2x^2 + 4x + 1$

m) $y = 2x^2 + 6x + 1$

n) $y = 2x^2 + 8x + 1$

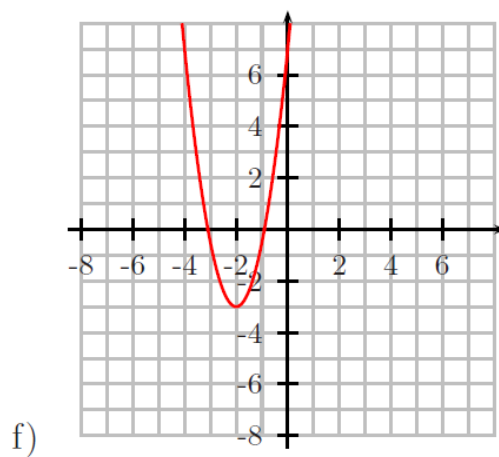
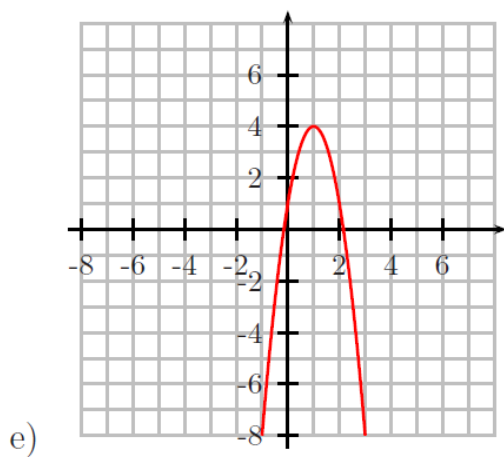
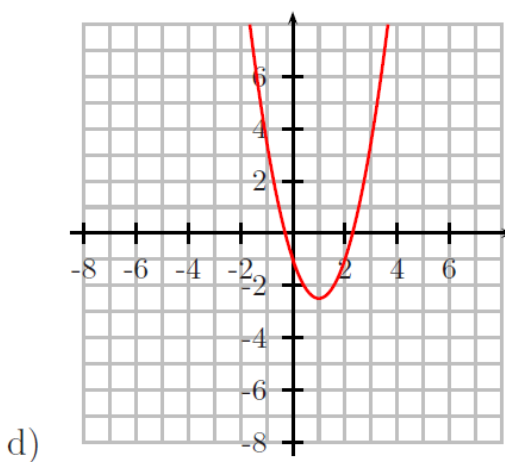
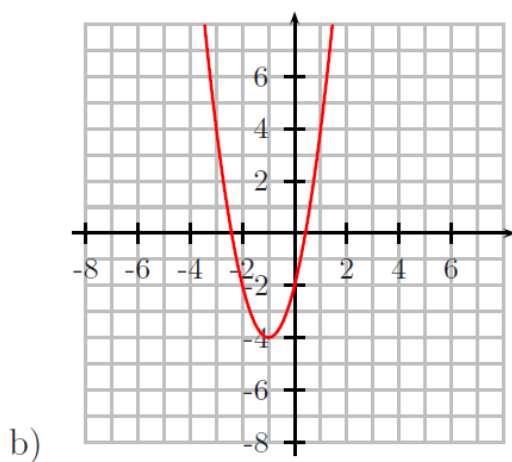
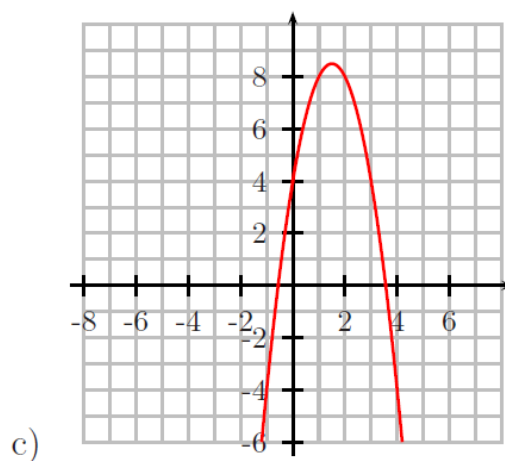
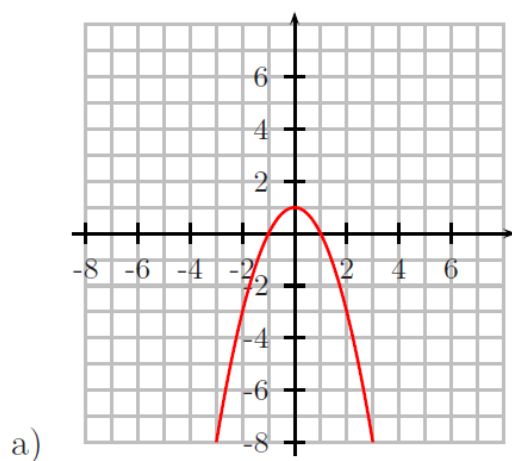
o) $y = 3x^2 + 3x + 1$

p) $y = 3x^2 + 6x + 1$

q) $y = 3x^2 - 6x + 1$

r) $y = 4x^2 - 4x + 1$

Exercici 3. Raona de quina manera pots identificar el coeficient lineal b a partir de les gràfiques següents:

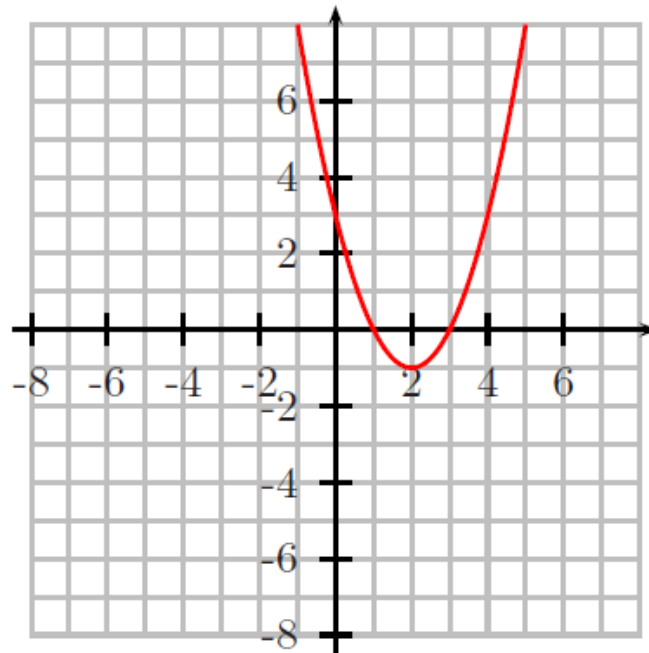


3.5. De la gràfica a l'expressió

Recordaràs que a partir de l'expressió de la funció quadràtica es podien deduir propietats de la gràfica com el grau d'obertura de la paràbola, si la paràbola era còncava o convexa, el punt de tall amb l'eix y, els punts de tall amb l'eix x (quan hi eren), o les coordenades del vèrtex.

Ara ens proposem de fer el pas contrari, és a dir, a la vista de la gràfica i veient les propietats abans esmentades, deduir l'expressió de la funció quadràtica.

Comencem per recordar aquestes propietats. A la vista d'aquesta gràfica



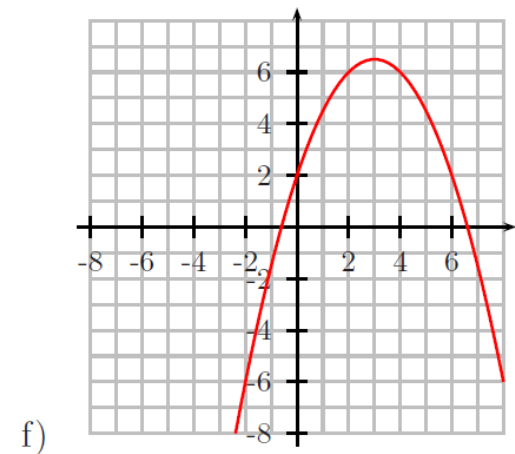
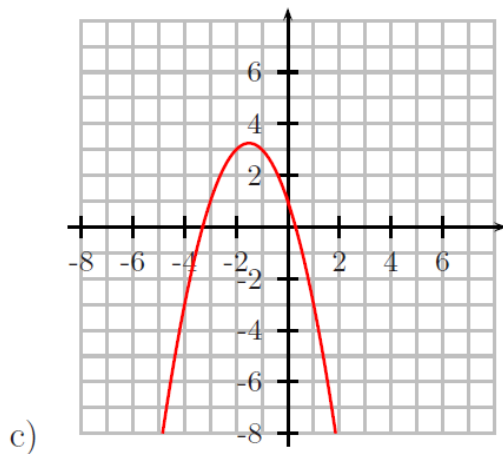
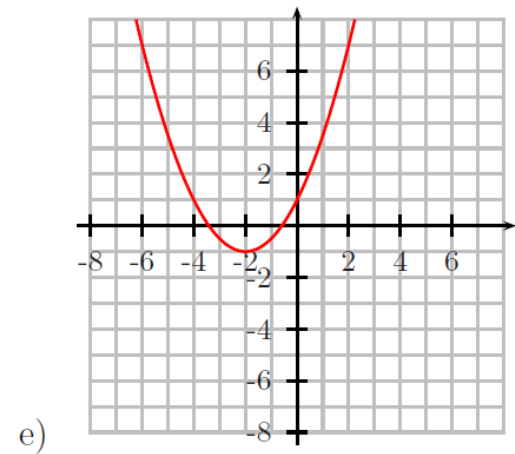
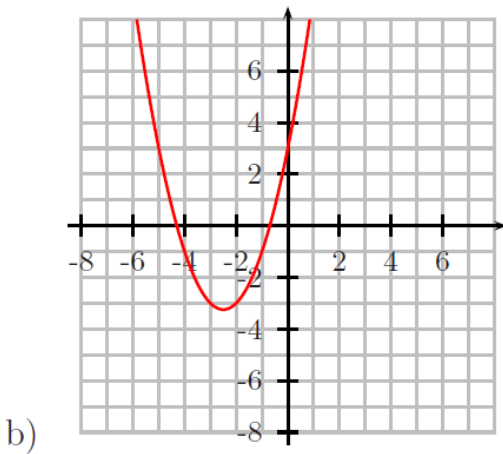
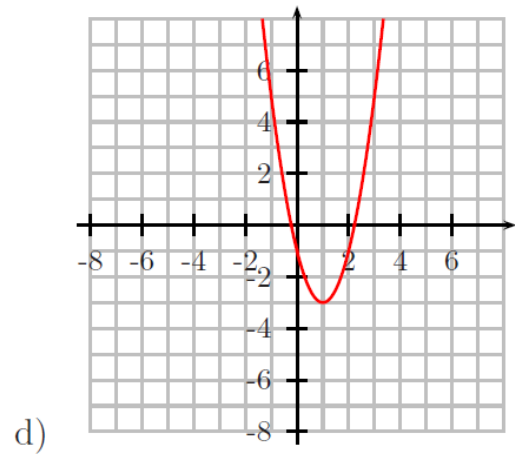
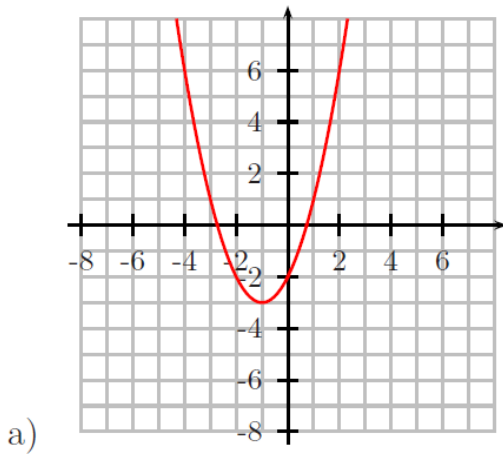
dedueix:

- el punt de tall amb l'eix y,
- el grau d'obertura, i
- la coordenada x del vèrtex.

La gràfica anterior correspon a la funció $y = x^2 - 4x + 3$. Recorda com es dedueixen aquestes propietats a partir de l'expressió de la funció i treu conclusions:

- del punt de tall amb l'eix y es pot deduir que...
- del grau d'obertura de la paràbola es pot deduir que...
- de la coordenada x del vèrtex es pot deduir que...

Exercici 4. Ara, sense pistes, només amb el que hagi deduït tu. Dedueix les expressions que corresponen a aquestes gràfiques. Pots comprovar les teves solucions amb ajut d'un programa de representació de funcions.

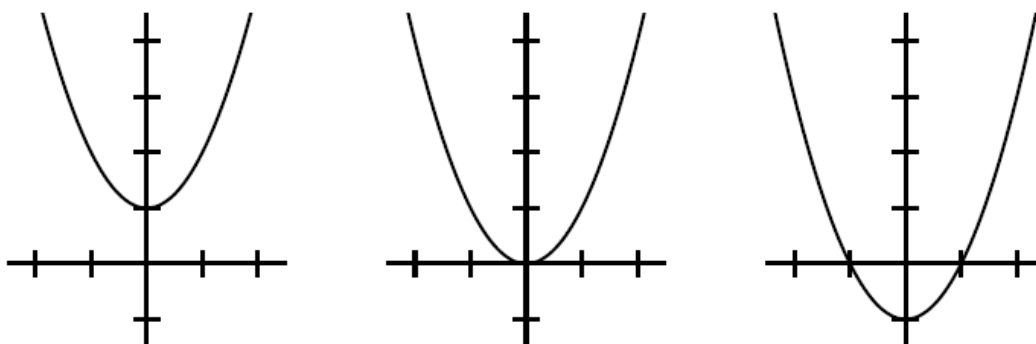


3.6. Resum: caracterització d'una funció quadràtica

Punt de tall eix OY: Tota funció quadràtica té un únic punt de tall amb l'eix de les y o eix d'ordenades. Trobar aquest punt a partir de l'expressió de la funció quadràtica és molt senzill: només cal substituir la x per zero.

$$\left. \begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c \rightarrow (0, c)$$

Punts de tall eix OX: Una funció quadràtica no sempre té punts de tall amb l'eix x o eix d'abscisses. Observa les gràfiques de sota: n'hi ha una que no talla l'eix de les x, una altra que el talla en un sol punt i una altra que el talla en dos punts.



Gràfiques de les funcions $y = x^2 + 1$, $y = x^2$ i $y = x^2 - 1$

Per saber on són no cal fer cada vegada el gràfic de la funció. Sabem que quan la funció talla a l'eix de les x, la y val zero. Per tant es tracta d'igualar la funció a zero i resoldre l'equació de segon grau que s'obté.

$$ax^2 + bx + c = 0 \rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

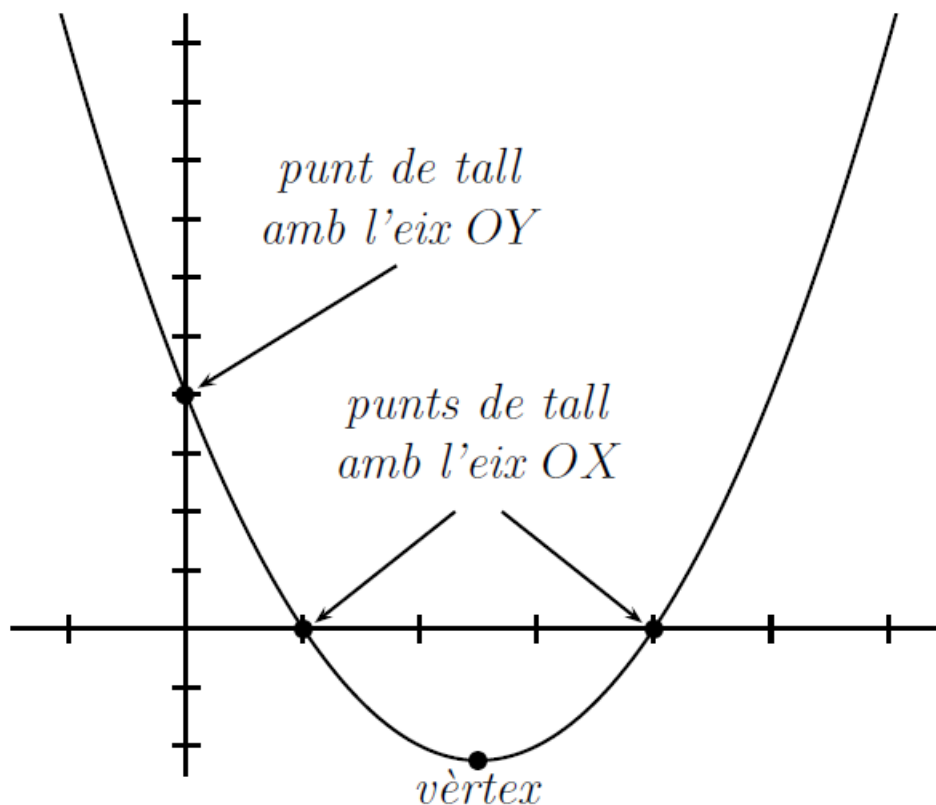
Recorda que el nombre de solucions depenia del signe del discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'equació. Si $\Delta > 0$ té 2 solucions, si $\Delta = 0$ té només una solució, i si $\Delta < 0$ no en té cap.

Vèrtex: La deducció de les coordenades del vèrtex no és tan simple. Si la gràfica presenta dos punts de tall amb l'eix x, el vèrtex està just al mig; si la gràfica presenta un sol punt de tall, aquell és el vèrtex; però, i si no hi ha punts de tall?

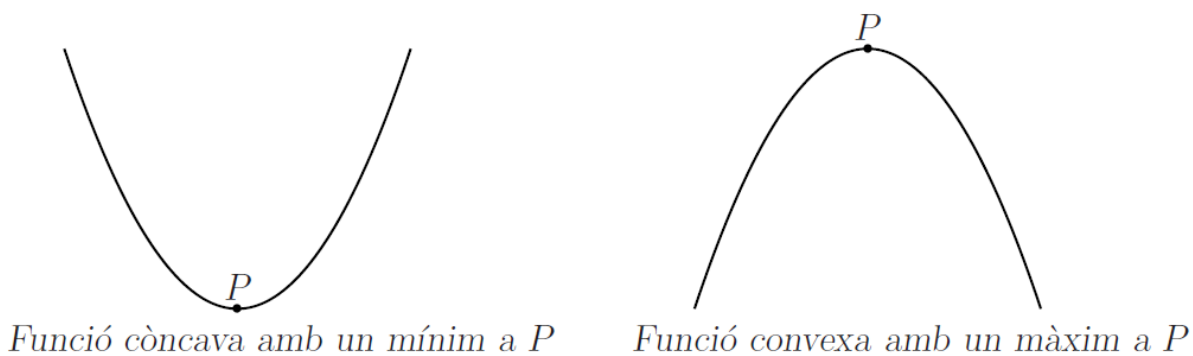
A més, això no ens dona informació de l'ordenada del vèrtex. Per això, sol ser més còmode emprar la fórmula que dona la coordenada x del vèrtex:

$$x_v = -\frac{b}{2a}$$

on b representa el coeficient de la x i a el coeficient de la x^2 en la funció quadràtica. La coordenada y del vèrtex es troba substituint x_v a l'expressió de la funció.



Concavitat o convexitat: Una funció és còncava quan la seva gràfica té una forma semblant a una “u” o una vall, i és convexa quan s’assembla al perfil d’una muntanya.



El signe del coeficient quadràtic a és el que determina aquesta propietat: si $a > 0$ és còncava, si $a < 0$ és convexa.

Creixement i decreixement: Quan en mirar el gràfic d'una funció d'esquerra a dreta veiem que fa pujada direm que la funció creix. Això significa que quan la variable independent (x) creix, la variable dependent (y) també augmenta.

Quan en mirar el gràfic d'una funció d'esquerra a dreta veiem que fa baixada direm que la funció decreix. Això significa que quan la variable independent (x) creix, la variable dependent (y) decreix.

Les funcions afins només presenten un comportament: o són creixents o són decreixents. Les funcions quadràtiques no. Per això parlem d'interval de creixement i de decreixement.

Els intervals de valors de les x pels quals la funció és creixent constitueixen l'*interval de creixement*. Els intervals de valors de les x pels quals la funció és decreixent constitueixen l'*interval de decreixement*.

Un *màxim relatiu* és un punt en el qual el valor de la funció (la y) és més gran que qualsevol altre punt pròxim a ell tant a la dreta com a l'esquerra.

Un *mínim relatiu* és un punt en el qual el valor de la funció (la y) és més petit que qualsevol altre punt pròxim a ell tant a la dreta com a l'esquerra.

En el cas de la paràbola, el màxim o mínim que té s'anomena vèrtex.

Si la paràbola és còncaua, el vèrtex és un mínim, i la funció presenta primer un interval de decreixement i després un de creixement. Si la paràbola és convexa, passa el contrari.

3.7. Exercicis

Exercici 5. Una petita empresa ha fet un estudi sobre el seu mercat i ha arribat a la conclusió que si x és el nombre d'articles produïts mensualment, els seus beneficis y (en milers d'euros) són aproximadament $y = -2x^2 + 1000x$.

- Representa aproximadament la gràfica dels beneficis en funció del nombre d'articles produïts.
- Quina ha de ser la producció mensual d'articles per tal que el benefici sigui màxim.
- Quin és el benefici màxim mensual que pot obtenir l'empresa segons aquest estudi?

Exercici 6. Es llança un coet i al cap d'un temps cau a terra. Sabem que l'altura y mesurada en metres al segon x després del llançament ve donada per la funció $y = -10x^2 + 100x$

- Fes la gràfica de l'altura en funció del temps.
- Quina és l'altura més gran que assoleix el coet?
- En quin instant el coet cau a terra?

Exercici 7. Una empresa està interessada en construir una estructura amb la forma d'un ortòedre (capsa de sabates). Les especificacions tècniques són que ha de tenir 1 m d'altura i les arestes estan reforçades amb un cable de acer. Sabent que només tenim 12 m de cable, quina amplada i llargada ha de tenir l'estructura per tal que el seu volum sigui màxim?

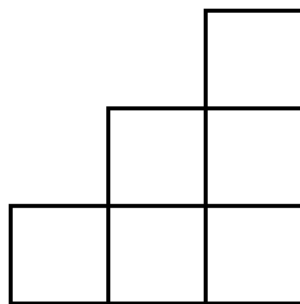
Exercici 8. En una explotació agropecuària s'han recollit 20 tones de poma camosa. El problema és que, encara que la guardin a les cambres frigorífiques, es deterioren uns 10 kg al dia. Per altra banda, el preu actual és de 1,5 euros el kg, i està previst que augmenti uns 3 cèntims cada dia.

Analitza la situació. Calcula per a uns quants dies consecutius, quanta poma bona hi ha al magatzem, quin preu té el kg de poma i quins guanys té aquesta explotació. Raona en quin moment li convé vendre la poma.

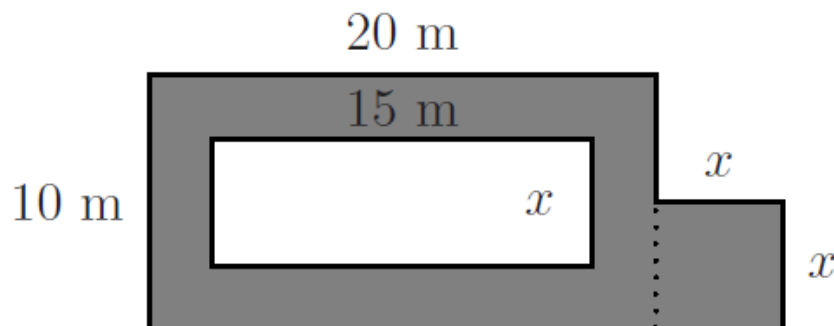
Exercici 9. Una llibreria ha fet tractes amb l'AMPA d'un institut per a vendre un lot de llibres. En principi, cada llibre es vendrà a 20 euros, però es descomptaran 4 cèntims per cada llibre que passi dels 100 venuts; o sigui: si es venen 100 llibres, el preu és de 20 euros; si es venen 101 llibres, el preu és de 19,96 euros; si es venen 102 llibres, el preu és de 19,92 euros. A la llibreria, cada llibre li costa 6 euros. Estudia la situació i raona si hi ha algun moment en el que els beneficis de la llibreria siguin màxims.

Exercici 10. Investiga què passa quan sumem nombres consecutius començant des de 1.

Aquí hi ha una pista: representa cada nombre amb una columna de quadradets, així la suma de nombres consecutius es pot representar en forma d'escala; fixa't què passa quan juntes dues escales iguals.



Exercici 11. Volem estudiar l'àrea d'aquesta figura en funció dels valors de x .



- a) Entre quins valors pot variar x ?
- b) Si y és l'àrea del recinte, construeix una taula amb els valors de l'àrea corresponents a diferents valors de x .
- c) Dibuixa la gràfica.
- d) Troba l'expressió d'aquesta funció.

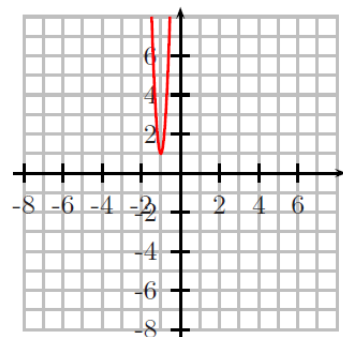
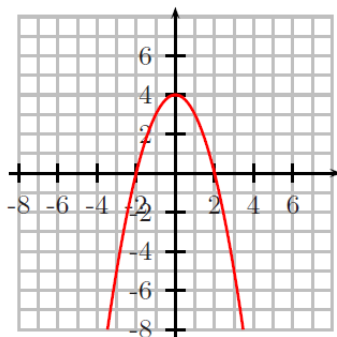
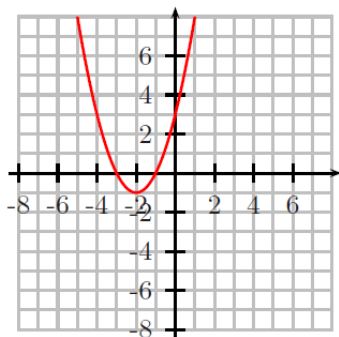
Exercici 12. Representa aproximadament les funcions següents:

- | | | |
|----------------------------|------------------------|-------------------------|
| a) $y = x^2 - 4$ | b) $y = -x^2 + 9$ | c) $y = x^2 - 2x$ |
| d) $y = -2x^2 + 6x$ | e) $y = x^2 - x$ | f) $y = x^2 - 9x + 14$ |
| g) $y = -x^2 + 8x - 16$ | h) $y = x^2 - 2x + 5$ | i) $y = -2x^2 + 3x - 8$ |
| j) $y = x^2 - 4x - 12$ | k) $y = 3x^2 + 3x - 6$ | l) $y = -2x^2 - 4x - 2$ |
| m) $y = -x^2 + 6,3x + 2,5$ | n) $y = 3,4x^2 + 5,7$ | o) $y = -x^2 + 9,2x$ |

Exercici 13. Dibuixa les gràfiques de les funcions següents sense fer taula de valors, indicant els punts característics:

- | | | |
|-------------------------|-------------------------|-------------------------|
| a) $y = x^2 - 2x - 3$ | b) $y = -x^2 + 4x + 6$ | c) $y = x^2 - 2$ |
| d) $y = -x^2 + 2x$ | e) $y = -x^2 - 2x - 4$ | f) $y = -x^2 + 4$ |
| g) $y = -x^2 - 8x + 16$ | h) $y = 6x^2 + 12x$ | i) $y = -2x^2 + 3x - 4$ |
| j) $y = x^2 - 4x - 2$ | k) $y = 6x^2 - 2$ | l) $y = -2x^2 + 4x - 1$ |
| m) $y = 2x^2 - 1 + 4x$ | n) $y = -3x^2 + 2 - 8x$ | o) $y = -x^2 - 5x + 2x$ |

Exercici 14. Observa les gràfiques d'aquestes funcions quadràtiques i fes una descripció de les funcions fent ús de la terminologia correcta:



Exercici 15. Representa les gràfiques de les funcions següents i descriu-les fent ús de la terminologia correcta:

a) $y = x^2 - 2x - 3$

b) $y = x^2 + x - 6$

c) $y = -x^2 - 2$

d) $y = x^2 + 5x$

e) $y = -x^2 + 2x - 4$

f) $y = x^2 + 2x + 3$

Exercici 16. Busca el punt o punts de tall (si en tenen) de les rectes i paràboles següents:

a) $y = x - 1$ i $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = 5x - 5$ i $y = 2x^2 + x - 3$

c) $y = 2x + 2$ i $y = -x^2 + 2x - 3$

d) $y = -2,3x + 1,2$ i $y = 2,4x^2 + 1,3x - 2$

Exercici 17. Esbrina en quins punts es tallen les paràboles següents (si és que es tallen):

a) $y = x^2 - x - 5$ i $y = -x^2 + x + 7$

b) $y = x^2 + 2x + 3$ i $y = -x^2 - 2x + 1$

c) $y = -2x^2 + 4x - 3$ i $y = x^2 + 5x + 1$

d) $y = x^2 - x - 5$ i $y = -x^2 + x + 7$

Exercici 18. Digues quants punts de tall tenen les rectes i paràboles següents, sense calcular-los:

a) $y = x^2 + 4$ i $y = 2x - 1$

b) $y = -x^2 + 9$ i $y = x^2 - 3x + 9$

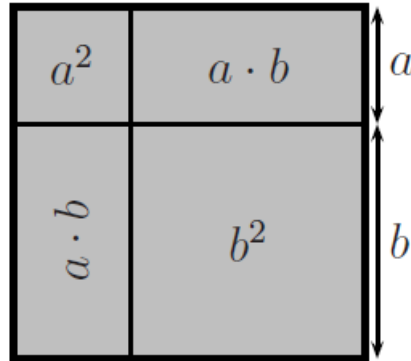
c) $y = 3x$ i $y = x^2 - 4$

d) $y = 4x - 1,8$ i $y = 7,9x^2 - 2x + 4$

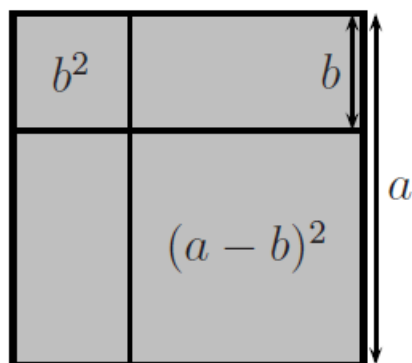
4. Altres expressions de la funció quadràtica

4.1. Igualtats notables

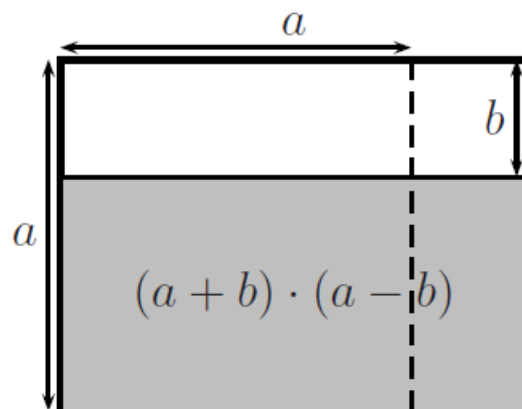
Per què podem dir que la igualtat $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ és certa només mirant aquesta figura?



Per què podem dir que la igualtat $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ és certa només mirant aquesta figura?



Per què podem dir que la igualtat $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$ és certa només mirant aquesta figura?



Sabries provar-ho sense ajudar-te de les figures?

Exercici 19. Desenvolupa aquestes expressions:

a) $(x+2)^2$

b) $(x-2)^2$

c) $(x+4)^2$

d) $(2x+3)^2$

e) $(2x-3)^2$

f) $(-2-5x)^2$

g) $(x+3) \cdot (x-3)$

h) $(x-1) \cdot (x+1)$

i) $(2x-7) \cdot (2x+7)$

j) $(x+1)^2 + (x-1)^2$

k) $(2x-1)^2 + (x+3)^2$

l) $(5x-3)^2 - (3-x)^2$

4.2. Translacions

Representa les funcions

a) $y = x^2$

b) $y = (x-1)^2$

c) $y = (x-2)^2$

d) $y = (x-3)^2$

e) $y = (x-4)^2$

f) $y = (x-5)^2$

Explica què hi veus.

Ara amb aquestes (representa les funcions i explica què hi veus):

a) $y = x^2$

b) $y = (x+1)^2$

c) $y = (x+2)^2$

d) $y = (x+3)^2$

e) $y = (x+4)^2$

f) $y = (x+5)^2$

Quina és la influència del valor α en la funció $y = (x - \alpha)^2$?

I si afegim ara un factor?

a) $y = 3x^2$

b) $y = 3(x-1)^2$

c) $y = 3(x-2)^2$

d) $y = 3(x-3)^2$

Explica què hi veus.

I si afegim un sumand acompanyant a la y ? Representa aquestes funcions (probablement el programa que estaràs utilitzant voldrà que li escriguis la forma explícita: simplement passa a l'altre membre el terme que acompanya a la y).

Explica què hi veus.

a) $y = x^2$

b) $y - 1 = x^2$

c) $y + 2 = x^2$

d) $y - 3 = x^2$

e) $y + 4 = x^2$

Quina és la influència del valor β en la funció $y - \beta = x^2$?

I si afegim ara un factor? Explica què hi veus.

a) $y = 2x^2$ b) $y - 1 = 2x^2$ c) $y + 2 = 2x^2$ d) $y - 3 = 2x^2$

Exercici 20. Dedueix, abans de veure la gràfica, com serà:

a) $y + 9 = (x - 7)^2$ b) $y + 3 = 4(x + 16)^2$
c) $y - 5 = 0,2 \cdot (x + 9)^2$ d) $y - 11 = -(x - 32)^2$

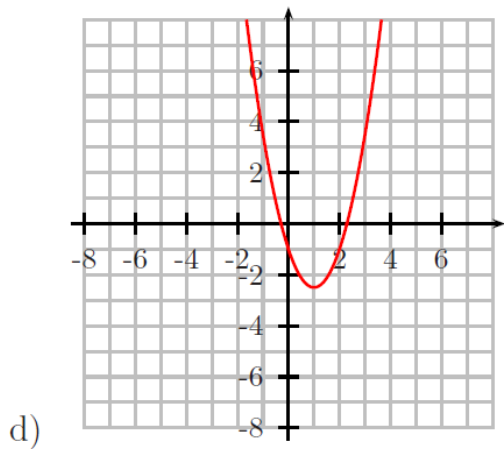
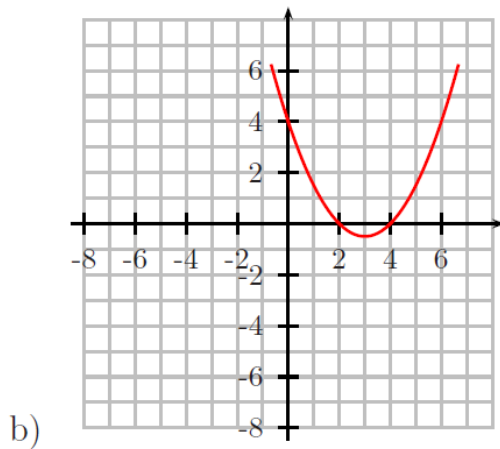
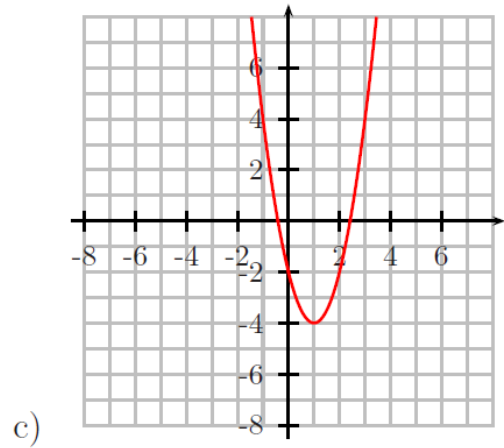
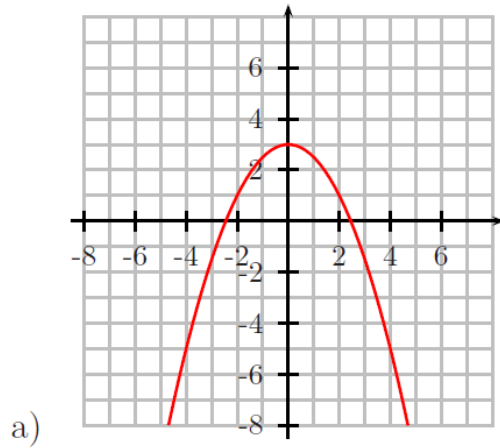
Quines de les propietats estudiades són les que es manifesten més clarament en aquesta manera d'expressar la funció quadràtica?

Exercici 21. Escribe les anteriors expressions en la forma habitual.

Exercici 22.

- a) Troba el terme independent de la funció $y - 1 = (x - 2)^2$
- b) Troba el coeficient de primer grau de la funció $y + 3 = (x - 12)^2$
- c) Troba el punt de tall amb l'eix y de la funció $y + 1 = 3(x + 1)^2$
- d) Troba els punts de tall amb l'eix x de la funció $y + 4 = -2(x - 2)^2$
- e) Troba el terme independent de la funció $y - 6 = 3(x + 7)^2$
- f) Troba el coeficient de primer grau de la funció $y - 11 = \frac{1}{2}(x - 6)^2$
- g) Troba el punt de tall amb l'eix y de la funció $y - 3 = -4(x - 1)^2$
- h) Troba els punts de tall amb l'eix x de la funció $y - 8 = 5(x - 1)^2$

Exercici 23. Dedueix l'expressió a partir de la gràfica:



4.3. Factorització

Troba el punts de tall amb l'eix de les x de la funció $y = x^2 - 4x + 3$.

Ara representa les funcions:

a) $y = (x + 1) \cdot (x + 3)$

b) $y = (x + 1) \cdot (x - 3)$

c) $y = (x - 1) \cdot (x + 3)$

d) $y = (x - 1) \cdot (x - 3)$

Quina d'aquestes expressions factoritzades dóna la mateixa gràfica que $y = x^2 - 4x + 3$? Per què?

Davant d'una expressió factoritzada d'una funció quadràtica, què és més fàcil de deduir: el vèrtex? els punts de tall amb l'eix x ? el coeficient quadràtic? el punt de tall amb l'eix y ? el coeficient de primer grau?

Esbrina quina relació hi ha entre els coeficients que apareixen en aquest format i els que apareixien en el format anterior.

Exercici 24. Troba l'expressió factoritzada de:

a) $y = x^2 - x - 1$

b) $y = x^2 + 6x - 3$

c) $y = 2x^2 + 8x - 10$

d) $y = -3x^2 + 8x + 9$

e) $y = x^2 - 5x - 2$

f) $y = x^2 + 9x - 6$

g) $y = 4x^2 - 8x + 1$

h) $y = x^2 + 7x + 2$

i) $y = x^2 - 4x + 4$

j) $y = x^2 - 2x + 2$

k) $y = x^2 - 8x + 1$

l) $y = 2x^2 - 3x - 1$

Comprova les teves respostes fent la representació gràfica.

Exercici 25. Troba l'expressió habitual corresponent a les expressions factoritzades següents:

a) $y = (x - 2) \cdot (x - 3)$

b) $y = 2(x + 4) \cdot (x - 1)$

c) $y = -4(x - 7) \cdot (x + 1)$

d) $y = (x + 2) \cdot (x - 4)$

e) $y = -5(x + 1) \cdot (x + 2)$

f) $y = 0,5(x - 6) \cdot (x - 1)$

g) $y = 0,25(x - 12) \cdot (x - 3)$

h) $y = -3(x - 4) \cdot (x + 4)$

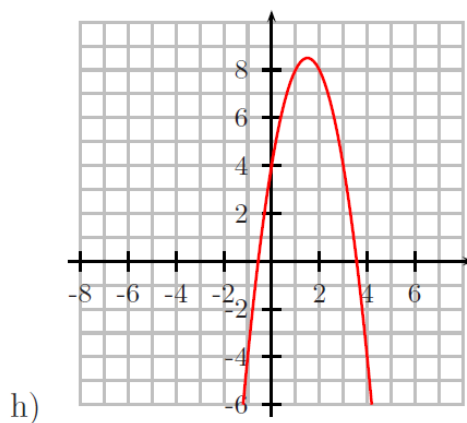
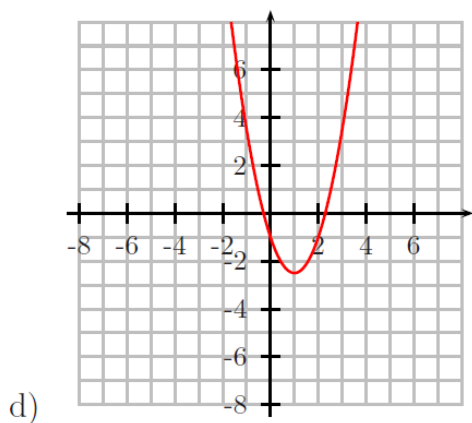
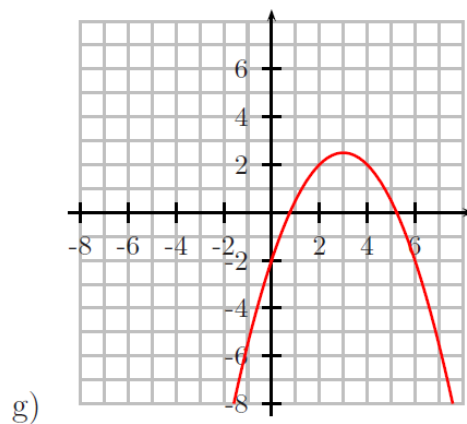
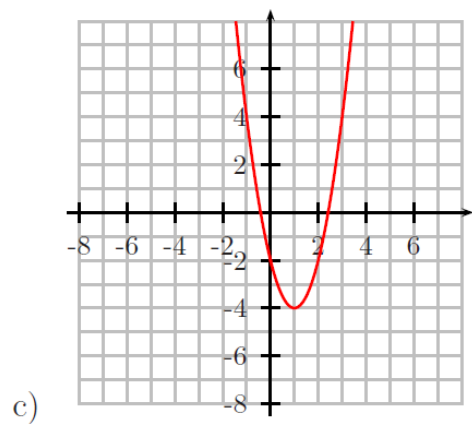
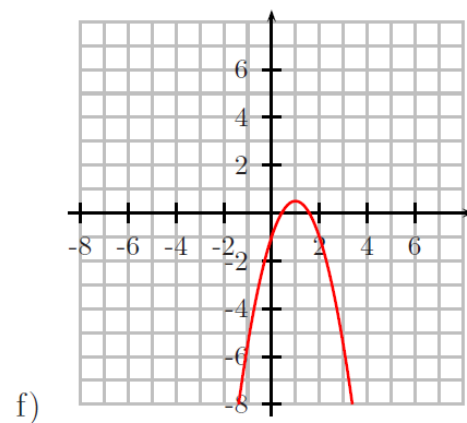
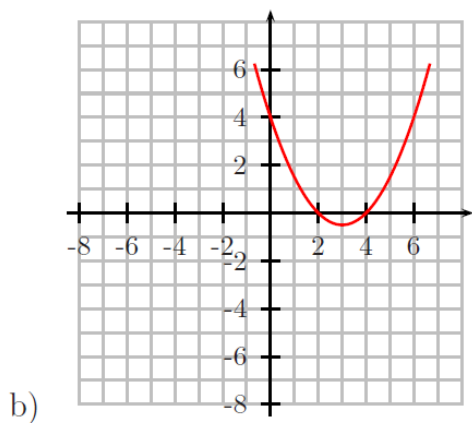
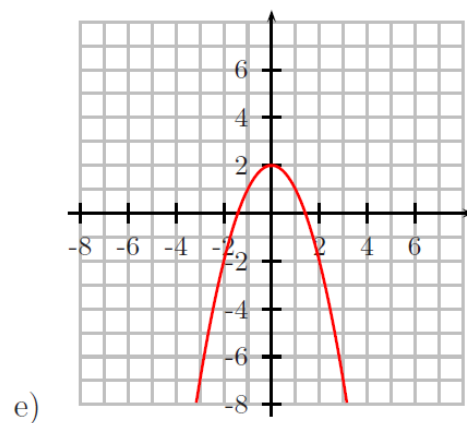
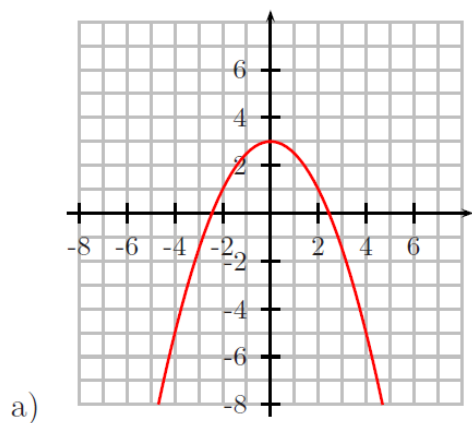
i) $y = 2(x - 6) \cdot (x - 8)$

j) $y = (x - 3) \cdot (x + 3)$

k) $y = -(x + 1) \cdot (x + 2)$

l) $y = \frac{1}{2}(x - 2) \cdot (x + 7)$

Exercici 26. Dedueix l'expressió a partir de la gràfica:



5. Solucions dels exercicis

1. (80) a) 3 b) -2 c) -1 d) 2 e) 4 f) -5
2. (81) a) -1 b) 2 c) 2,5 d) -1,5 e) -0,5 f) 3
3. (82) a) 0 b) 4 c) 6 d) -3 e) 6 f) 10
5. (84) b) 250 unitats c) 751.265,13 euros
6. (85) b) 250m c) al cap de 10 segons
7. (86) Ha de ser un cub d'1m d'aresta
16. (95) a) (1, 0) i (4, 3) b) (1, 0) c) No en té d) (-2.12689, 6.09185) i (0.6268926, -0.241853)
17. (96) a) (-2, 1) i (3, 1) b) (-1, 2) c) No en tenen d) (-2.35, -1.53) i (0.85, 3.28)
18. (97) a) cap b) dos c) dos d) un
23. (102) a) $y - 3 = -\frac{1}{2}x^2$ b) $y + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(x - 3)^2$ c) $y + 4 = 2(x - 1)^2$
d) $y + 2,5 = \frac{3}{2}(x - 1)^2$
26. (105) a) $y = -\frac{1}{2}(x - \sqrt{6}) \cdot (x + \sqrt{6})$ b) $y = \frac{1}{2}(x - 2) \cdot (x - 4)$
c) $y = 2(x - 1 - \sqrt{2}) \cdot (x - 1 + \sqrt{2})$ d) $y = \frac{3}{2}(x - 1 - \sqrt{\frac{5}{3}}) \cdot (x - 1 + \sqrt{\frac{5}{3}})$
e) $y = -(x - \sqrt{2}) \cdot (x + \sqrt{2})$ f) $y = -\frac{3}{2}(x - 1 - \sqrt{\frac{1}{3}}) \cdot (x - 1 + \sqrt{\frac{1}{3}})$
g) $y = -\frac{1}{2}(x - 3 - \sqrt{5}) \cdot (x - 3 + \sqrt{5})$ h) $y = -2(x + 0,5616) \cdot (x - 3,5616)$