

**COSOS I
VOLVMS**

1. Els cossos perfectes

1.1. Plató i els seus cossos

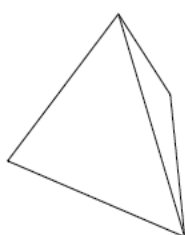
Plató va ser un filòsof grec de molta influència a la seva societat.

Un dels seus molts estudis es va centrar en determinar les estructures bàsiques de l'univers: el foc, la terra, l'aire i l'aigua.

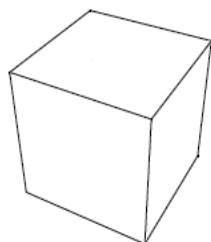
Va ser capaç de determinar les següents estructures:



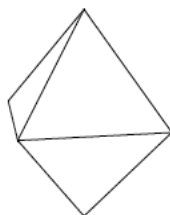
Plató va viure del 427 al 347 a.C.
A quina edat va morir?



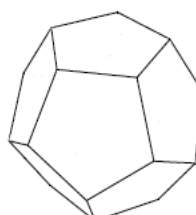
Tetraedre
foc



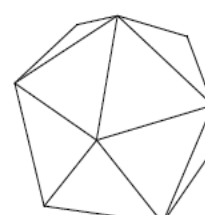
Cub o hexaedre
terra



Octaedre
aire



Dodecaedre
univers



Icosàedre
aigua

A l'aula de matemàtiques trobareu material per a construir aquests cossos. En petits grups construïu un tetraedre, un hexaedre i un octaedre. Opcionalment podeu construir també un dodecaedre o un icosaèdre.

1.2. Algunes definicions

Aquestes cinc estructures es coneixen com a *cossos o sòlids platònics* o també com a **poliedres regulars**.

Per la paraula **poliedre** hem d'entendre que és una figura tridimensional acotada o delimitada per polígons, i un *polígon* és una figura plana delimitada per segments rectilinis.

Etimològicament, la paraula *poliedre* (Πολυεδρος) deriva dels termes grecs Πολυς (molt) i ἔδρα (pla), per tant quelcom que té molts plans.

La paraula **regular** fa referència a com són els polígons del poliedre (les longituds dels costats iguals i els angles també iguals)

Així doncs, el que Plató va estudiar és que utilitzant només polígons regulars i tots iguals (del mateix tipus i de la mateixa mida) només es podien construir aquestes cinc estructures. Sorprenent, no?

1.3. Un poliedre amb hexàgons?

Debateu sobre si és possible construir un poliedre només amb hexàgons regulars. Per què no?

1.4. Quin és més rígid?

Debateu sobre quins d'aquests poliedres regulars us semblen més estables (rígids i sòlids) i per què.

1.5. Contem cares, vèrtexs i arestes

Abans de començar dóna una definició de les següents paraules: cara, vèrtex i aresta. Totes elles relacionades als poliedres.

Ara completa la següent taula amb el nombre de cares, vèrtexs i arestes que té cada poliedre.

Poliedre	Nom	Cares	Vèrtexs	Arestes
				
				
				
				
				

Hi veus alguna relació entre el nombre de cares, vèrtexs i arestes per cada un dels poliedres regulars?

Si sumes el nombre de cares i vèrtex d'un mateix poliedre regular sabries dir quantes arestes té? Potes establir una fórmula per això?

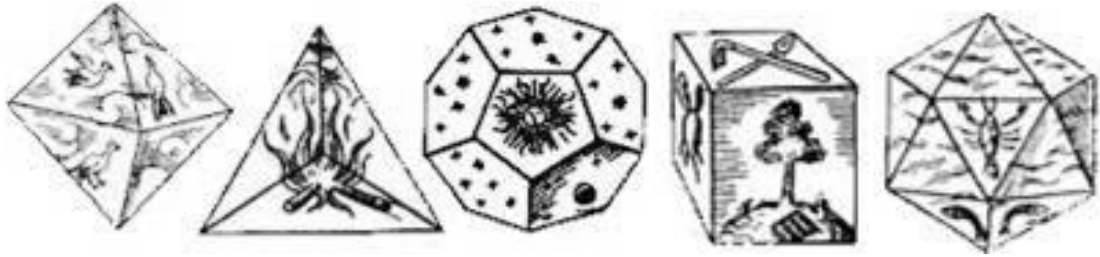
Acabes d'enunciar el teorema d'Euler (matemàtic del segle XVIII).

$C + V =$

1.6. Poliedres duals

Si construïm un poliedre utilitzant com a vèrtexs el centre de les cares d'un poliedre regular s'obté un altre poliedre regular.

Estudieu quins són els poliedres duals de cada un dels poliedres regulars



Curiosament el poliedre dual d'un tetraedre és un altre tetraedre. Per què creus que aquesta estructura és el **foc**? El foc no es pot transformar en cap altre element.

1.7. Per acabar

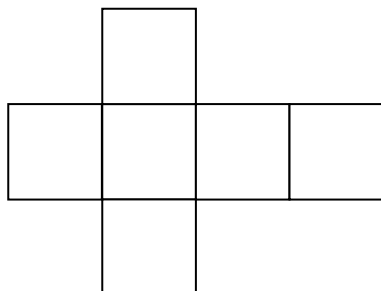
Els poliedres regulars s'han utilitzat al llarg de la història en nombroses aplicacions: com a daus de joc, elements decoratius...



Alguns d'aquests poliedres ens envolten sense saber-ho. Durant els pròxims dies fixa't en el teu entorn i anota quins poliedres regulars has vist i quina funció tenien.

1.8. Exercicis

Exercici 1. A continuació tens el desenvolupament pla d'un hexaedre. Dibuixa un altre desenvolupament pla.



Exercici 2. Fes un dibuix del desenvolupament pla del tetraedre.

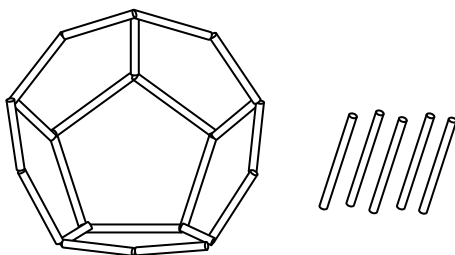
Exercici 3. Fes un dibuix del desenvolupament pla de l'octaedre.

Exercici 4. Omple la taula següent:

Poliedre	A cada vèrtex quantes cares hi arriben?	A cada vèrtex quantes arestes hi arriben?
		
		
		
		
		

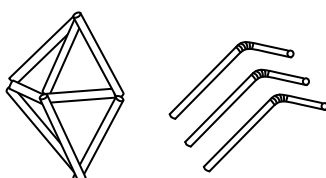
Exercici 5. Construeix algun poliedre regular utilitzant la següent tècnica:

- Reuniu uns quants papers reciclats de mida A4.
- Enrotllant-los en diagonal feu xurros de paper, com a canalons, el més fins i compactes possible.
- Amb un trosset de celo enganxeu-los per que no es desenrotllin.
- Talleu els extrems (les puntes) més febles i feu-ne tants (tots iguals de llarg) com cregueu que en necessiteu per fer el poliedre que heu decidit construir.
- Amb celo i paciència uniu els canalons (arestes del poliedre).



Exercici 6. Construeix algun poliedre regular utilitzant la següent tècnica:

- Reuniu unes quantes canyes de xuclar.
- Marqueu-les totes a una mateixa mida però no les talleu.
- Amb ajuda de celo i paciència uniu-les creant el poliedre escollit.



2. El cub, prismes i piràmides

2.1. El cub

Què en saps del cub? Recordeu les principals característiques d'aquest poliedre.

Quantes cares té un dau? I vèrtexs? I arestes?

Dibuixa el desenvolupament pla d'aquest dau.

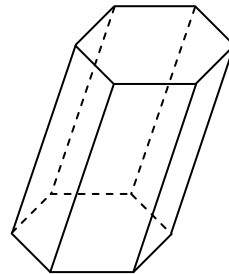
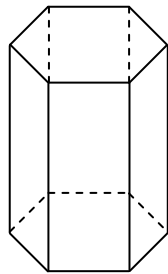


Si l'aresta del dau mesura 1 centímetre què mesura l'àrea (superfície) total del dau?
Quin volum té aquest dau?

2.2. Els prismes

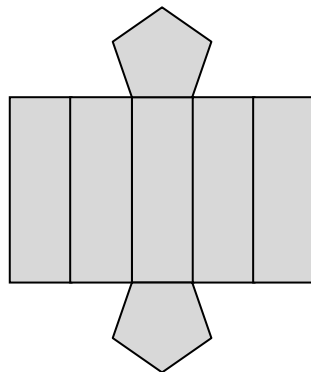
Anomenem *prisma* al poliedre que té dues cares iguals i paral·leles (anomenades bases), mentre que les altres cares (anomenades cares laterals) són paral·lelograms.

Els prismes poden ser *rectes* o *oblics*. Si les cares laterals són rectangles o quadrats el prisma és recte, i si no ho són és oblic.



Els prismes també poden ser *regulars* o *irregulars*. Els prismes són regulars quan són rectes i les seves bases són polígons regulars, en cas contrari diem que són prismes irregulars. Els prismes regulars s'anomenen segons el polígon de les seves bases: prisma triangular, prisma quadrangular, prisma pentagonal, prisma hexagonal.

Aquí tens el desenvolupament pla d'un prisma pentagonal regular:



Un *ortoedre* és un prisma recte que té per bases dos rectangles.

Com definiries un cub?

Un *cub* és un ortoedre on totes les seves cares són quadrades.

2.3. Contem cares, vèrtexs i arestes d'alguns prismes

Completa aquesta taula amb el nombre de cares, vèrtexs i arestes que té cada prisma.

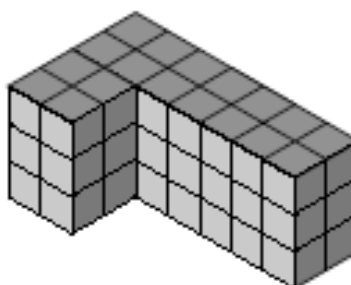
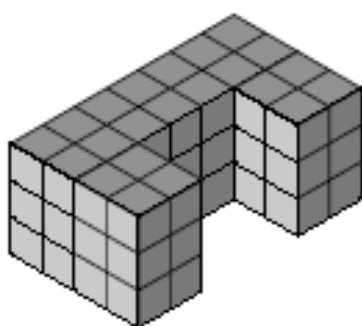
Prisma	Cares	Vèrtexs	Arestes
Triangular			
Pentagonal			
Octogonal			
Hexagonal			

Observes alguna cosa?

Recordes la fórmula de Euler? Creus que la fórmula és vàlida per als prismes?

2.4. La mesura del volum

Exercici 7. Calcula el volum dels següents cossos, sabent que cada cubet mesura 1 cm d'aresta:



Exercici 8. Dissenya un ortoedre que tingui 72 cubets de volum. Quantes solucions hi ha?

Exercici 9. Transforma les següents mesures en unitats de volum a litres:

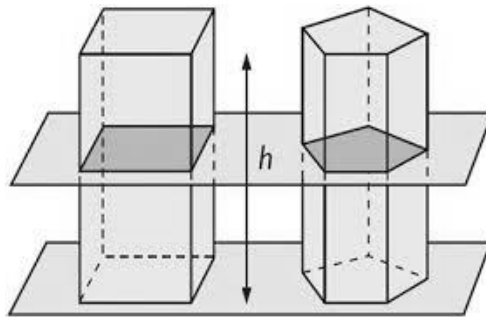
- a. 2 dm^3
- b. 40 m^3
- c. 1 hm^3
- d. 250 cm^3
- e. 1 km^3
- f. 2 mm^3

2.5. El volum dels prismes

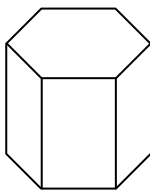
El volum d'un cos és la mesura del que ocupa a l'espai

En el cas d'un ortoedre, el volum serà fàcil de calcular, usant la llargària, alçària i amplària. Quan aquest ortoedre és un cub, elevat a la tercera potència l'aresta el trobarem també.

Però les coses comencen a complicar-se quan parlem de prismes de bases pentagonals, o prismes oblics...



Per calcular el volum d'un prisma multiplicarem l'àrea de la base per l'altura:

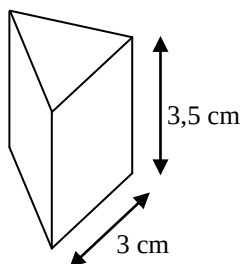


$$V_{PRISMA} = A_{BASE} \cdot h_{PRISMA}$$

2.6. Exercicis

Exercici 10. Calcula el volum d'una piscina de 30 m de llargada, 15 m d'amplada i 2 m de profunditat.

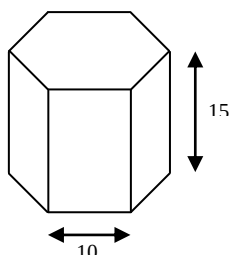
Exercici 11. Calcula la superfície de paper que necessitem per construir un prisma regular triangular, sabent que l'altura del triangle de la base amida 2,6 cm.



Exercici 12. Calcula el volum del prisma triangular de l'exercici anterior.

Exercici 13. Dibuixa el desenvolupament pla del prisma triangular de l'exercici anterior.

Exercici 14. Calcula l'àrea i el volum d'un dipòsit en forma de prisma recte hexagonal regular, sabent que cada aresta de la base amida 10 metres, l'apotema de la base amida 8,5 metres i l'altura del prisma és de 15 metres. A més, quans litres té de capacitat.



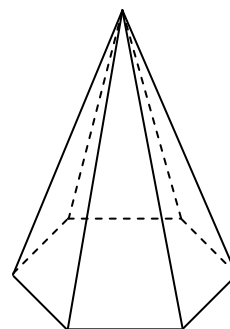
Exercici 15. Construeix un prisma qualsevol de 225 cm^3 . Et caldrà pensar les mides, dibuixar-ho sobre paper, retallar i després enganxar. Pensa en les llengüetes...

2.7. Les piràmides

Anomenem *piràmide* al poliedre on una cara és un polígon (anomenat base de la piràmide) i la resta de cares són triangles (anomenats cares de la piràmide).

Les piràmides s'anomenen segons el polígon de la base: piràmides triangulars, quadrangulars, pentagonals, hexagonals, etc.

Les piràmides es classifiquen en *regulars* i *irregulars*. Una piràmide és regular si ho és el polígon de la base i totes les cares laterals són triangles equilàters o isòsceles. Una piràmide és irregular quan no és regular.



2.8. Contem cares, vèrtexs i arestes d'algunes piràmides

Completa aquesta taula amb el nombre de cares, vèrtexs i arestes que té cada piràmide.

Piràmide	Cares	Vèrtexs	Arestes
Triangular			
Pentagonal			
Octogonal			
Hexagonal			

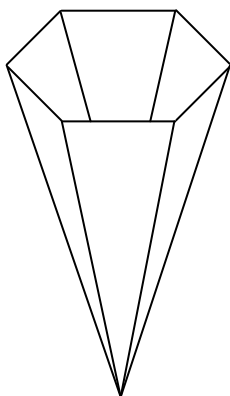
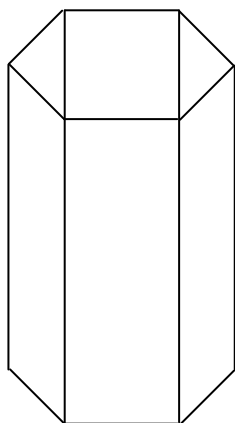
Observes alguna cosa?

Recordes la fórmula de Euler? Creus que la fórmula és vàlida per a les piràmides?

2.9. El volum d'una piràmide

Saps calcular el volum d'un prisma, oi? Has pensat quin volum tindrà una piràmide que tingui igual base i alçada que el prisma hexagonal? La meitat de volum?

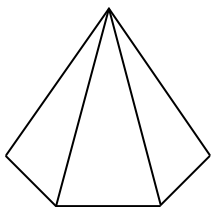
Comprovem-ho!!



$$V_{\text{PIRÀMIDE}} = \frac{A_{\text{BASE}} \cdot h_{\text{PIRÀMIDE}}}{3}$$

2.10. Exercicis

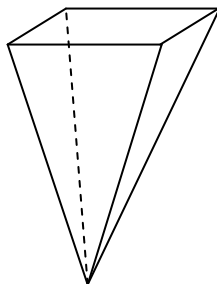
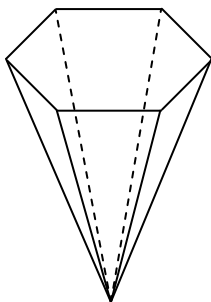
Exercici 16. Dibuixa el desenvolupament pla d'una piràmide hexagonal.



Exercici 17. Una piràmide de base quadrada té 1 metre de costat i 1 metre d'altura. Quants m³ té de volum? I quants cm³ té de volum?

Exercici 18. Calcula el volum de la piràmide egípcia de Keops sabent que la seva altura és de 146 metres i el costat de la seva base quadrada amida 230 metres.

Exercici 19. Calcula el volum dels dipòsit següents: el primer de base hexagonal mesura 6 metres d'altura, 3 metres de costat i 2,6 metres d'apotema, i el segon de de base quadrada mesura 6 metres d'altura i 4 metres de costat. Quants litres hi caben?



Exercici 20. Construeix el desenvolupament pla d'una piràmide obliqua qualsevol.

3. Altres poliedres

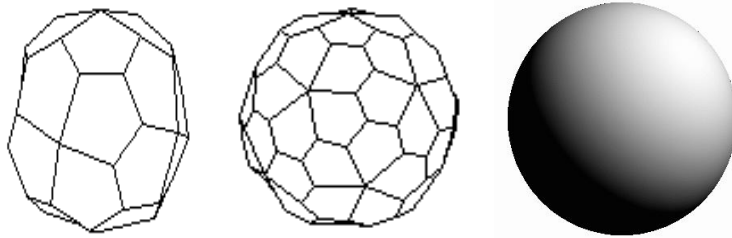
3.1. La pilota de futbol i Arquímedes

Observa una pilota de futbol reglamentaria. Quins polígons formen la seva superfície?

És un poliedre regular? No, perquè hi ha polígons regulars però no tots són del mateix tipus. Aquest tipus de poliedres construïts amb polígons regulars però no tots iguals és coneixen com a poliedres arquimedians, d'Arquímedes.



Per tant, podem considerar l'esfera el cas límit d'una pilota feta de molts poliedres regulars:



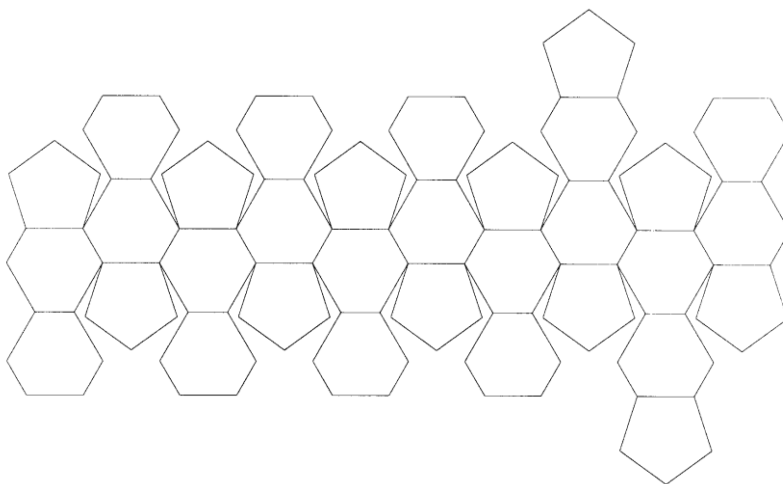
El volum de l'esfera és:

$$V_{ESFERA} = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

I la superfície de l'esfera és:

$$A_{ESFERA} = 4 \cdot \pi \cdot r^2$$

Aquí tens el desenvolupament pla d'una "pilota de futbol":



Quantes cares de cada tipus hi ha? I en total?

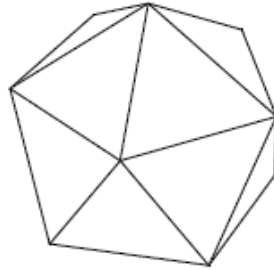
Aproxima la superfície d'aquesta pilota a partir del desenvolupament pla.

Ara aproxima el volum.

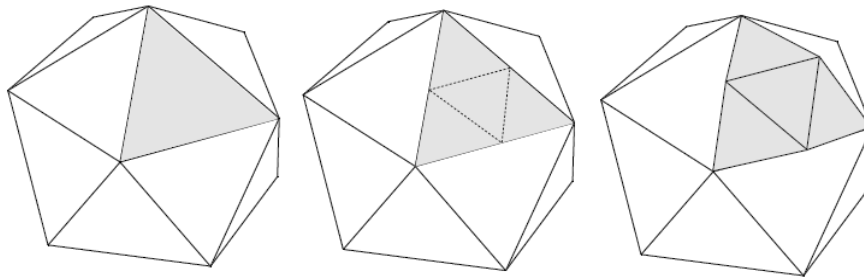
Reproduïu el desenvolupament a un altre full i mireu de construir aquesta pilota, penseu que necessitareu algunes llengüetes per unir les cares. També podeu construir aquest poliedre amb la mateixa tècnica que heu construït els poliedres regulars.

3.2. Esferes geodèsiques icosaèdriques

Si partim d'una figura ja coneguda com és l'icosàedre, està format per 20 cares que són triangles equilàters.

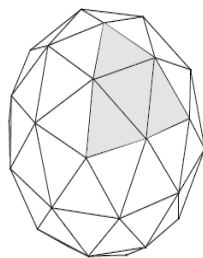


Centrem-nos per un moment en una d'aquestes cares i pensem en substituir-la per quatre cares triangulars regulars tal com es mostra a la següent imatge:

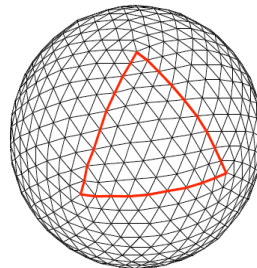


Si fem això per cada una de les 20 cares obtindríem el que es coneix com geodèsica icosaèdrica de freqüència 2 (hem dividit cada aresta en 2 parts).

D'aquesta manera, anant ampliant la freqüència, podem construir poliedres que cada cop són més pròxims a una esfera.



freqüència 2



freqüència 9

Creus que aquesta manera de fer es pot aplicar a altres poliedres? Debateu aquesta qüestió a classe.

Des d'un punt de vista arquitectònic és una estructura que ben sovint s'utilitza, bé tota ella o bé part d'ella.

Has vist mai una cúpula geodèsica d'aquest estil?



Podeu construir una cúpula geodèsica de freqüència 3 o 4 amb la tècnica dels canals de paper o bé amb la tècnica de les canyes de xuclar.

Al museu de Dalí de Figueres n'hi ha una.



Allisteu alguns avantatges i inconvenients que cregueu que puguin tenir aquest tipus d'estructures.

3.3. Poliedres estrellats

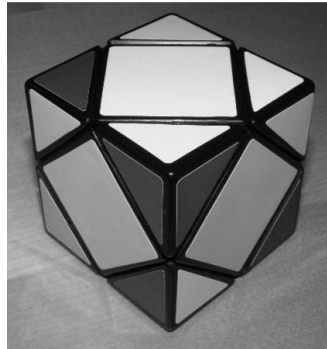
Observa els següents poliedres i digues si verifiquen el teorema de Euler.



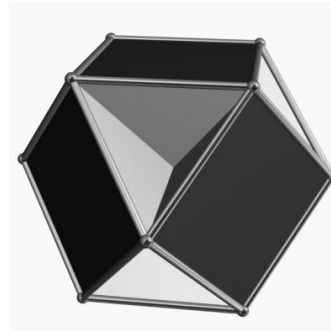
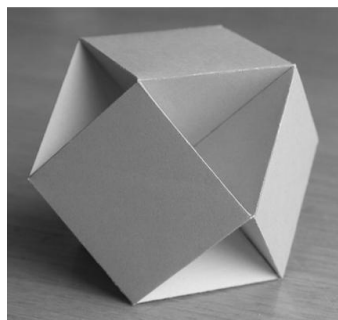
Aquests poliedres es coneixen com a *poliedres estrellats* i a diferència dels que has vist fins ara són *còncavos*, és a dir tenen cares “cap endins”.

3.4. Poliedres no eulerians

Imagina que agafes un cub i cada una de la seves cares la divideixes com es veu a la següent figura:



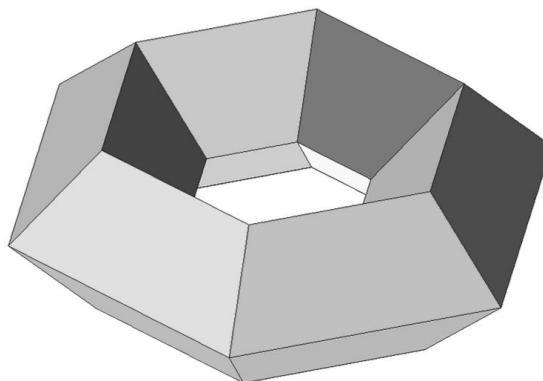
Ara imagina que enfonses cap endins cada vèrtex del cub fins a unir-los tots vuit en un únic vèrtex al centre, obtens un el següent poliedre:



cubohemioctahedron

Fes l'esforç de contar les cares, els vèrtexs i les arestes. Es compleix el teorema de Euler?

Els poliedres que no verifiquen el teorema de Euler es coneixen amb el nom de *poliedres no eulerians*. A continuació se'n mostra un altre:



Així com explicaries com han de ser els poliedres per que no verifiquin el teorema de Euler?