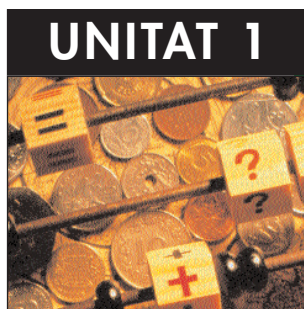




UNITAT 1

SISTEMES D'EQUACIONS. MÈTODE DE GAUSS

Pàgina 11

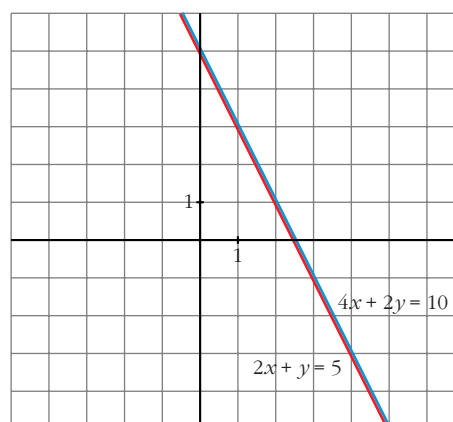
Equacions i sistemes d'equacions amb dues incògnites

1. Podem dir que les dues equacions següents són dues “dades diferents”? No és cert que la segona diu el mateix que la primera?

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 4x + 2y = 10 \end{cases}$$

- Representa-les gràficament i observa que es tracta de la mateixa recta.

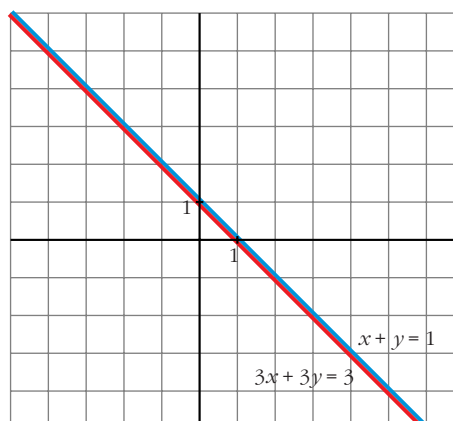
Es tracta de la mateixa recta.



- Posa un altre sistema de dues equacions amb dues incògnites en què la segona equació sigui, en essència, igual que la primera. Interpreta'l gràficament.

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 3 \end{cases}$$

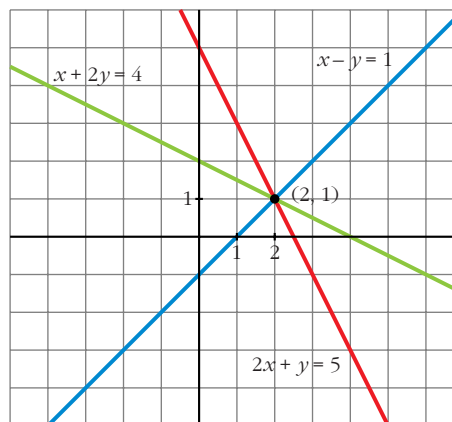
Gràficament són la mateixa recta:



2. Observa les equacions següents:

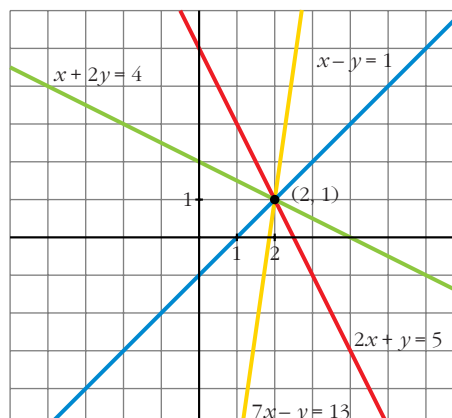
$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - y = 1 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

- Representa-les i observa que les dues primeres rectes determinen un punt (amb aquestes dues dades es responen les dues preguntes: $x = 2, y = 1$) i que la tercera recta també passa per aquest punt.



- Pensa una altra equació que també sigui “conseqüència” de les dues primeres (per exemple: $2 \cdot (1a) + 3 \cdot (2a)$), representa-la i observa que també passa per $x = 2, y = 1$.

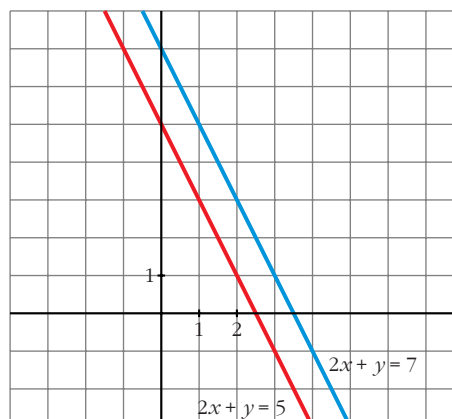
$$2 \cdot 1a + 3 \cdot 2a \rightarrow 7x - y = 13$$



3. Observa que *el que diu la segona equació és contradictori amb el que diu la primera:*

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$$

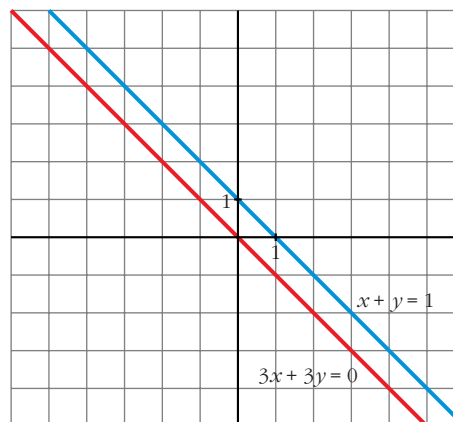
- Representa-les i observa que es tracta de dues rectes paral·leles, és a dir, no tenen solució comuna, perquè les rectes no es tallen en cap punt.



- Modifica el terme independent de la segona equació del sistema que has inventat en l'exercici 1 i representa de nou les dues rectes.

Observa que el que diuen ambdues equacions és ara contradictori i que es representen mitjançant rectes paral·leles.

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 1 \\ 3x + 3y = 0 \end{array} \right\} \text{ Rectes paral·leles:}$$



Pàgina 13

EXERCICIS PROPOSATS

1. Sense resoldre'ls, explica per què són equivalents aquests sistemes:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 2x - y = 7 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \end{array} \right. \quad \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 5 \\ x + y = 7 \\ 2x + 2y - z = 12 \end{array} \right. \quad \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 11 \\ x + 2y - z = 7 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ 3x = 12 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 2 \\ x + y = 7 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} z = 2 \\ x + y = 7 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x + y - z = 11 \\ y = -4 \end{array} \right.$$

- a) Hem substituït la segona equació pel resultat de sumar les dues que teníem.
 b) Hem substituït la primera equació pel resultat de restar a la segona equació la primera.
 c) En el primer sistema, la tercera equació s'obté sumant les dues primeres. La resta és igual que a b).
 d) Hem substituït la segona equació pel resultat de restar a la segona equació la primera.

Pàgina 15

2. Resol i interpreta geomètricament els sistemes següents:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right. \quad \text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right. \quad \text{d) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2x + y = 1 \\ 3x + 2y = 4 \\ x + y = 3 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y = 1 - 2x \\ y = 3 - x \end{array} \right. \rightarrow 1 - 2x = 3 - x \rightarrow x = -2, \quad y = 3 - (-2) = 5$$

Comprovem si compleix la 2a equació: $3 \cdot (-2) + 2 \cdot 5 = -6 + 10 = 4$.

Solució: $x = -2$, $y = 5$. Són tres rectes que es tallen en el punt $(-2, 5)$.

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ x + 2y = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{La 3a equació s'obté sumant les dues primeres;} \\ \text{podem prescindir-ne.} \end{array}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 6 - z \\ y = 1 + z \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 6 - z - y = 6 - z - 1 - z = 5 - 2z \\ y = 1 + z \end{array}$$

Solució: $x = 5 - 2\lambda$, $y = 1 + \lambda$, $z = \lambda$. Són tres plans que es tallen en una recta.

$$\text{c) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ x + y + z = 0 \\ x - z = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Les dues primeres equacions són contradictòries.} \\ \text{El sistema és incompatible.} \\ \text{Els dos primers plans són paral·lels i el tercer els talla.} \end{array}$$

$$\text{d) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 6 \\ y - z = 1 \\ z = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = 1 \\ y = 1 + z = 2 \\ x = 6 - y - z = 6 - 2 - 1 = 3 \end{array}$$

Solució: $x = 3$, $y = 2$, $z = 1$. Són tres plans que es tallen en el punt $(3, 2, 1)$.

3. a) Resol el sistema:
$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{cases}$$

b) Afegeix-hi una tercera equació de manera que continuï essent compatible.

c) Afegeix-hi una tercera equació de manera que sigui incompatible.

d) Interpreta geomètricament el que has fet en cada cas.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ x - y = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 - 2y \\ x = 4 + y \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 3 - 2y = 4 + y \rightarrow -1 = 3y \rightarrow y = -\frac{1}{3} \\ x = 4 + y = 4 - \frac{1}{3} = \frac{11}{3} \end{array} \right.$$

Solució: $x = \frac{11}{3}$, $y = -\frac{1}{3}$

b) Per exemple: $2x + y = 7$ (suma de les dues anteriors).

c) Per exemple: $2x + y = 9$.

d) En a) $\rightarrow$ Són dues rectes que es tallen en $\left(\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

En b) $\rightarrow$ La nova recta també passa per $\left(\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

En c) $\rightarrow$ La nova recta no passa per $\left(\frac{11}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. No existeix cap punt comú en les tres rectes. Es tallen dues a dues.

Pàgina 16

4. Reconeix com a escalonats els sistemes següents i resol-los:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 3x = 7 \\ x - 2y = 5 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{7}{3} \\ y = \frac{x-5}{2} = \frac{-4}{3} \end{array} \right\} \quad \text{Solució: } x = \frac{7}{3}, y = \frac{-4}{3}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z = 4 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 2x = 6 \\ 5x - z = 4 \\ x + y + 3z = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 \\ z = 5x - 4 = 11 \\ y = 7 - x - 3z = 7 - 3 - 33 = -29 \end{array}$$

Solució: $x = 3, y = -29, z = 11$

$$\text{c) } \begin{cases} 2x - 2t = 6 \\ x + y + 3z = 7 \\ 5x - z + t = 4 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 2x = 6 + 2t \\ 5x - z = 4 - t \\ x + y + 3z = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 3 + t \\ z = 5x - 4 + t = 11 + 6t \\ y = 7 - x - 3z = -29 - 19t \end{array}$$

Solucions: $x = 3 + \lambda, y = -29 - 19\lambda, z = 11 + 6\lambda, t = \lambda$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \\ 4x = 4 \end{cases} \left\{ \begin{array}{l} 4x = 4 \\ 2x + 3z = 0 \\ x + 3y - z = 7 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 1 \\ z = \frac{-2x}{3} = \frac{-2}{3} \\ y = \frac{7 - x + z}{3} = \frac{16}{9} \end{array}$$

Solució: $x = 1, y = \frac{16}{9}, z = \frac{-2}{3}$

5. Són escalonats aquests sistemes? Resol-los:

$$\text{a) } \begin{cases} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{cases}$$

Tots els sistemes són escalonats. Els resollem.

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2y + z = 1 \\ 2y = 1 \\ x + 2y + 2z = 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2y = 1 \\ 2y + z = 1 \\ x + 2y + z = 1 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ z = 1 - 2y = 0 \\ x = 1 - 2y - z = 0 \end{array} \right.$$

Solució: $x = 0$, $y = \frac{1}{2}$, $z = 0$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 7 \\ 2x - z = 4 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2x = 4 + z \\ x + y = 7 - z \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + \frac{z}{2} \\ y = 7 - z - x = 5 - \frac{3z}{2} \end{array} \right.$$

Solucions: $x = 2 + \lambda$, $y = 5 - 3\lambda$, $z = 2\lambda$

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z + t = 3 \\ x - y = 2 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + y \\ x + z = 3 - y - t \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} x = 2 + y \\ z = 3 - y - t - 2 - y = 1 - 2y - t \end{array} \right.$$

Solucions: $x = 2 + \lambda$, $y = \lambda$, $z = 1 - 2\lambda - \mu$, $t = \mu$

$$\text{d) } \left\{ \begin{array}{l} z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ 2z = 2 \\ x - z + 2t = 5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} 2z = 2 \\ z + t = 3 \\ y + 3z - 2t = 4 \\ x - z + 2t = 5 \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} z = 1 \\ t = 3 - z = 2 \\ y = 4 - 3z + 2t = 5 \\ x = 5 + z - 2t = 2 \end{array} \right.$$

Solució: $x = 2$, $y = 5$, $z = 1$, $t = 2$

Pàgina 17

6. Transforma en escalonats i resol:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 5x - 4y = 23 \\ 3x + 2y = 27 \end{array} \right.$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 3x + y = 4 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 3 \cdot (2a) \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 9x + 3y = 12 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 1a + 2a \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y = 21 \\ 11x = 33 \end{array} \right.$$

Solució: $x = 3$, $y = -5$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 5x - 4y = 23 \\ 3x + 2y = 27 \end{array} \right. \xrightarrow{\begin{array}{l} 1a \\ 1a + 2 \cdot (2a) \end{array}} \left\{ \begin{array}{l} 5x - 4y = 23 \\ 11x = 77 \end{array} \right.$$

Solució: $x = 7$, $y = 3$

7. Transforma en escalonats i resol:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ x + y + z = 2 \\ x + 2y - z = 6 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \end{matrix}} \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ 2y - 2z = 6 \\ 3y - 4z = 10 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2a : 2 \\ 3a \end{matrix}} \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ 3y - 4z = 10 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a - 3 \cdot 2a \end{matrix}} \begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ y - z = 3 \\ -z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = -1 \\ y = 3 + z = 2 \\ x = -4 + y - 3z = 1 \end{cases}$$

Solució: $x = 1$, $y = 2$, $z = -1$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 3x + y + z = 8 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ -2y - 2z = -10 \\ -2y - 2z = -10 \end{cases} \xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2a : (-2) \end{matrix}} \begin{cases} x + y + z = 6 \\ y + z = 5 \end{cases}$$

(Podem prescindir de la 3a, ja que és igual que la 2a)

$$\begin{cases} x + y = 6 - z \\ y = 5 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 6 - z - y = 6 - z - 5 + z = 1 \\ y = 5 - z \end{cases}$$

Solucions: $x = 1$, $y = 5 - \lambda$, $z = \lambda$

Pàgina 20

8. Resol aquests sistemes d'equacions mitjançant el mètode de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 3x - 2y - z = 4 \\ -2x + y + 2z = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 & 4 \\ -2 & 1 & 2 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2a - 3 \cdot 1a \\ 3a + 2 \cdot 1a \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -5 & -4 & -2 \\ 0 & 3 & 4 & 6 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2a \cdot (-1) \\ 3a \cdot 5 + 2a \cdot 3 \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & 24 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ 5y + 4z = 2 \\ 2z = 24 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 3 \\ y = \frac{2 - 4z}{5} = -2 \\ x = 2 - y - z = 1 \end{cases}$$

Solució: $x = 1$, $y = -2$, $z = 3$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x - 4y + 2z = 1 \\ -2x - 3y + z = 2 \\ 5x - y + z = 5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -4 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 1 & 2 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} 1a - 2 \cdot 3a \\ 2a - 3a \\ 3a \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & -2 & 0 & -9 \\ -7 & -2 & 0 & -3 \\ 5 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right)$$

Les dues primeres equacions són contradictòries. El sistema és *incompatible*.

$$\begin{aligned}
 \text{c) } \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -2x + 3y + z = 4 \\ 2x + y - 5z = 4 \end{cases} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ -2 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -5 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 2 \cdot 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 5 & -5 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \\
 \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 5 \cdot 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x - 2y = -3 \\ -y + z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = -3 + 2y \\ z = -2 + y \end{cases}
 \end{aligned}$$

Solucions: $x = -3 + 2\lambda$, $y = \lambda$, $z = -2 + \lambda$

9. Resol mitjançant el mètode de Gauss:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases} \quad \text{c) } \begin{cases} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ -x + 3y + z = 3 \\ x + y + 5z = 7 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2y + 3z = 5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - y = 2 - 2z \\ 2y = 5 - 3z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 - 2z + y \\ y = \frac{5 - 3z}{2} = \frac{5}{2} - \frac{3z}{2} \end{cases}$$

$$x = 2 - 2z + \frac{5}{2} - \frac{3z}{2} = \frac{9}{2} - \frac{7z}{2}$$

Solucions: $x = \frac{9}{2} - 7\lambda$, $y = \frac{5}{2} - 3\lambda$, $z = 2\lambda$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - y + z + w = 0 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \\ 4a - 2 \cdot 1a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 4a \\ 4a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - y + w = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 4x = 0 \\ x - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \\ y = 0 \\ w = 0 \end{cases}$$

Solució: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $w = 0$

$$c) \begin{cases} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 5x - y + z + w = 24 \\ 5x - 2y - z + 2w = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 1 & 24 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \\ 4a - 2 \cdot 1a \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 15 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 4a \\ 4a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & 9 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 11 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & -18 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 2x - y + w = 9 \\ x - 2y + z = 11 \\ 4x = -3 \\ x - z = -18 \end{cases}$$

$$x = \frac{-3}{4} \quad z = x + 18 = \frac{69}{4} \quad y = \frac{x + z - 11}{2} = \frac{11}{4} \quad w = 9 - 2x + y = \frac{53}{4}$$

$$\text{Solució: } x = \frac{-3}{4}, y = \frac{11}{4}, z = \frac{69}{4}, w = \frac{53}{4}$$

Pàgina 21

10. Discuteix, en funció del paràmetre k , aquests sistemes d'equacions:

$$a) \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} 4x + 2y = k \\ x + y - z = 2 \\ kx + y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 3-k \end{array} \right)$$

• Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x - z = 2 - y \\ 4x = 3 - 2y \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{3 - 2y}{4} = \frac{3}{4} - \frac{y}{2}$$

$$z = x - 2 + y = \frac{3 - 2y}{4} - 2 + y = \frac{-5 + 2y}{4} = \frac{-5}{4} + \frac{y}{2}$$

Sistema compatible indeterminat.

$$\text{Solucions: } x = \frac{3}{4} - \lambda, y = 2\lambda, z = \frac{-5}{4} + \lambda$$

- Si $k \neq 3$, és compatible determinat. El resollem:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 2 \\ 4x + 2y & = & k \\ (k-3)x & = & (3-k) \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{3-k}{k-3} = -1$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k+4}{2} = 2 + \frac{k}{2}$$

$$z = x + y - 2 = -1 + 2 + \frac{k}{2} - 2 = -1 + \frac{k}{2}$$

$$\text{Solució: } x = -1, \quad y = 2 + \frac{k}{2}, \quad z = -1 + \frac{k}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \left. \begin{array}{rcl} 4x + 2y & = & k \\ x + y - z & = & 2 \\ kx + y + z & = & 0 \end{array} \right\} & \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k+1 & 2 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & k \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ k-3 & 0 & 0 & 2-k \end{array} \right) \end{aligned}$$

- Si $k = 3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right) \text{ El sistema és incompatible.}$$

- Si $k \neq 3$, és compatible determinat. El resollem:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 2 \\ 4x + 2y & = & k \\ (k-3)x & = & (2-k) \end{array} \right\}$$

$$x = \frac{2-k}{k-3}$$

$$y = \frac{k-4x}{2} = \frac{k^2+k-8}{2k-6}$$

$$z = x + y - 2 = \frac{2-k}{k-3} + \frac{k^2+k-8}{2(k-3)} - 2 = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

$$\text{Solució: } x = \frac{2-k}{k-3}, \quad y = \frac{k^2+k-8}{2k-6}, \quad z = \frac{k^2-5k+8}{2k-6}$$

11. Discuteix aquests sistemes d'equacions en funció del paràmetre k :

$$\text{a) } \begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad \quad + z = k \end{cases} \qquad \text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} kx + y - z = 8 \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad \quad + z = k \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k & 1 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a - 2a \\ 2a \\ 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k-1 & 0 & -2 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1a + 2 \cdot 3a \\ 2a \\ 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k+3 & 0 & 0 & 8+2k \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & k \end{array} \right)$$

- Si $k = -3$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \end{array} \right) \text{ Sistema incompatible.}$$

- Si $k \neq -3$, és compatible determinat. El resollem:

$$\begin{cases} (k+3)x = 8+2k \\ x + y + z = 0 \\ 2x \quad \quad + z = k \end{cases}$$

$$x = \frac{8+2k}{k+3}$$

$$z = k - 2x = \frac{k^2 - k - 16}{k+3}$$

$$y = -x - z = \frac{-k^2 - k + 8}{(k+3)}$$

$$\text{Solució: } x = \frac{8+2k}{k+3}, \quad y = \frac{-k^2 - k + 8}{(k+3)}, \quad z = \frac{k^2 - k - 16}{k+3}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + kz = 1 \\ x + 2y = k \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 1 & 2 & 0 & k \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 1 & -1 & k-1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a \\ 3a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & k & 1 \\ 0 & 0 & -1-k & k-2 \end{array} \right)$$

- Si $k = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right) \text{ Sistema incompatible.}$$

- Si $k \neq -1$, és compatible determinat. El resollem:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y & + & z = 1 \\ y & + & kz = 1 \\ (-1 - k)z & = & k - 2 \end{array} \right\}$$

$$z = \frac{k-2}{-1-k} = \frac{2-k}{1+k}$$

$$y + k \left(\frac{2-k}{1+k} \right) = 1 \rightarrow y = 1 - \frac{2k-k^2}{1+k} = \frac{1+k-2k+k^2}{1+k} = \frac{1-k+k^2}{1+k}$$

$$\begin{aligned} x = 1 - y - z &= 1 - \frac{1-k+k^2}{1+k} - \frac{2-k}{1+k} = \frac{1+k-1+k-k^2-2+k}{1+k} = \\ &= \frac{-2+3k-k^2}{1+k} \end{aligned}$$

$$\text{Solució: } x = \frac{-2+3k-k^2}{1+k}, \quad y = \frac{1-k+k^2}{1+k}, \quad z = \frac{2-k}{1+k}$$

Pàgina 26

EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER PRACTICAR

Resolució i interpretació geomètrica dels sistemes d'equacions

- 12.** Troba, si existeix, la solució dels sistemes següents i interpreta'ls gràficament:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + y = 2 \\ x - y = 1 \\ 5x - y = 4 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + 2y = 1 \\ 2x - y = 3 \\ 5x + y = 8 \end{cases}$$

Els resollem pel mètode de Gauss:

$$\text{a) } \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a - 3 \cdot 2a & & & \\ 2a & & & \\ 3a - 5 \cdot 2a & & & \\ 4a - 2 \cdot 2a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \end{array} \right)$$

Podem prescindir de les dues últimes files, ja que coincideixen amb la primera. Quedaria:

$$4y = -1 \rightarrow y = \frac{-1}{4}$$

$$x - y = 1 \rightarrow x = 1 + y = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\text{Solució: } \left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4} \right)$$

El sistema representa quatre rectes que es tallen en el punt $\left(\frac{3}{4}, \frac{-1}{4} \right)$.

$$b) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 8 & 8 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 5 \cdot 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -5 & 1 & 1 \\ 0 & -9 & 3 & 3 \end{array} \right)$$

De la 2a equació, obtenim $y = \frac{-1}{5}$; de la 3a equació, obtenim $y = \frac{-1}{3}$.

Per tant, el sistema és *incompatible*.

El sistema representa tres rectes que es tallen dues a dues, però no hi ha cap punt comú a les tres.

13. Comprova que aquest sistema és incompatible i raona quina és la posició relativa de les tres rectes que representa:

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - y = 1 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases}$$

Si dividim la 3a equació entre 2, obtenim: $x + 2y = 0$. La 1a equació és $x + 2y = 5$. Són contradictòries, així doncs el sistema és *incompatible*.

La 1a i la 3a equacions representen dues rectes paral·leles; la 2a les talla a ambdues.

14. Resol i interpreta geomètricament el sistema:

$$\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x + y = -1 \\ (3/2)x - 3y = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 3/2 & -3 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 2 \cdot 1a \\ (2/3) \cdot 3a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 1a \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} -x + 2y = 0 \\ 5y = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2y = \frac{-2}{5} \\ y = \frac{-1}{5} \end{array}$$

Solució: $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5} \right)$

Geomètricament, són tres rectes que es tallen en el punt $\left(\frac{-2}{5}, \frac{-1}{5} \right)$.

15. Raona si aquests sistemes tenen solució i interpreta'ls geomètricament:

$$a) \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ 2/3x - 2y - 4z = 2 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x + 4y - 2z = 1 \end{cases}$ Si dividim la 2a equació entre 2, obtenim:

$$x + 2y - z = \frac{1}{2}, \text{ que contradueix la 1a.}$$

El sistema és *incompatible*. Són dos plans paral·lels.

$$\text{b) } \begin{cases} -x + 3y + 6z = 3 \\ (2/3)x - 2y - 4z = 2 \end{cases} \quad \text{Si multipliquem per } -\frac{2}{3} \text{ la 1a equació, obtenim:}$$

$$\frac{2}{3}x - 2y - 4z = -2, \text{ que contradueix la 2a equació.}$$

El sistema és *incompatible*. Són dos plans paral·lels.

Sistemes escalonats

16. Resol els sistemes següents però reconeix prèviament que són escalonats:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 11y = -69 \end{cases} \quad \left. \begin{array}{l} y = \frac{-69}{11} \\ x = \frac{7 + y}{2} = \frac{4}{11} \end{array} \right\}$$

$$\text{Solució: } \left(\frac{4}{11}, \frac{-69}{11} \right)$$

$$\text{b) } \begin{cases} -y + z = 1 \\ 9z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = \frac{2}{9} \\ y = z - 1 = \frac{-7}{9} \\ x = \frac{3 + y - z}{3} = \frac{2}{3} \end{array}$$

$$\text{Solució: } \left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9} \right)$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + y - t = 2 \\ y + z = 4 \\ y + t - z = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} z = \lambda \\ y = 4 - z \\ t = 1 - y + z = 1 - (4 - z) + z = -3 + 2z \\ x = 2 - y + t = 2 - (4 - z) - 3 + 2z = -5 + 3z \end{array}$$

$$\text{Solucions: } (-5 + 3\lambda, 4 - \lambda, \lambda, -3 + 2\lambda)$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2y = 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} y = \frac{1}{2} \\ x = \frac{y}{3} = \frac{1}{6} \\ z = -2x + 3y = \frac{7}{6} \end{array}$$

$$\text{Solució: } \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{7}{6} \right)$$

17. Transforma en escalonats i resol els sistemes següents:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 5x + 3y = -17 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 5 & 3 & -17 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2a + 3 \cdot 1a \end{matrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 7 \\ 11 & 0 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x - y = 7 \\ 11x = 4 \end{cases}$$

$$x = \frac{4}{11} \quad y = 2x - 7 = \frac{-69}{11}$$

$$\text{Solució: } \left(\frac{4}{11}, \frac{-69}{11} \right)$$

$$\text{b) } \begin{cases} -y + z = 1 \\ x - 2y - z = 2 \\ 3x - y + z = 3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} 2a \\ 1a \\ 3a \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a \\ 2a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 5 & 4 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a + 5 \cdot 2a \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - 2y - z = 2 \\ -y + z = 1 \\ 9z = 2 \end{cases} \quad z = \frac{2}{9} \quad y = z - 1 = \frac{-7}{9} \quad x = 2 + 2y + z = \frac{2}{3}$$

$$\text{Solució: } \left(\frac{2}{3}, \frac{-7}{9}, \frac{2}{9} \right)$$

Mètode de Gauss

18. Resol aquests sistemes d'equacions lineals:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 5y = 16 \\ x + 3y - 2z = -2 \\ x + z = 4 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2a + 2 \cdot 3a \\ 3a \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 3 & 3 & 0 & 6 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a \\ 2a : 3 \\ 3a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & 0 & 16 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} 1a - 5 \cdot 2a \\ 2a \\ 3a \end{matrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} -3x = 6 \\ x + y = 2 \\ x + z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 \\ y = 2 - x = 4 \\ z = 4 - x = 6 \end{cases}$$

$$\text{Solució: } (-2, 4, 6)$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \begin{cases} 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 3 \\ x + y + z = 0 \end{cases} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 3a \\ 2a \\ 1a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\
 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a - 5 \cdot 1a & & & \\ 3a - 3 \cdot 1a & & & \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1a \\ 2a \\ -2 \cdot 3a + 2a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\
 \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ -2y - 2z = 3 \\ 2z = 1 \end{cases} \quad z = \frac{1}{2} \quad y = \frac{3 + 2z}{-2} = -2 \quad x = -y - z = \frac{3}{2} \\
 \text{Solució: } \left(\frac{3}{2}, -2, \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

19. Resol:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases} &\quad \text{b) } \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{a) } \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1a \\ 2a - 3 \cdot 1a \\ 3a - 5 \cdot 1a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \\
 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a & & & \\ 3a - 2 \cdot 2a & & & \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{cases} \\
 y = 4z + 2 \\
 x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z \\
 z = \lambda
 \end{aligned}$$

Solucions: $(-1 - 3\lambda, 2 + 4\lambda, \lambda)$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 3a \\ 2a : 2 \\ 1a \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\
 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a - 3 \cdot 1a & & & \\ 3a - 3 \cdot 1a & & & \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1a \\ 2a : (-5) \\ 3a : 7 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\
 \rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -6 \\ z = -2 \\ y - z = 3 \end{cases} \quad \begin{aligned} y &= 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x &= -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Solució: $(-1, 1, -2)$

20. Resol, si és possible, els sistemes següents:

$$\text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ x - y - z = -10 \\ 2x - y + z = 5 \end{cases} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & -1 & -10 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1a \\ -2a + 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a \\ 2a \\ 2a + 2 \cdot 3a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -7 & 0 & -7 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 3y + 2z = 19 \\ -7y = -7 \end{cases} \\ y = 1 & \quad z = \frac{19 - 3y}{2} = 8 \quad \quad x = 9 - 2y - z = -1 \end{aligned}$$

Solució: $(-1, 1, 8)$

$$\begin{aligned} \text{b) } \begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x - y + z = -1 \end{cases} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1a \\ -2a + 2 \cdot 1a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 & 7 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{cases} x + 2y = 3 - z \\ 5y = 7 - z \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{7}{5} - \frac{z}{5} \\ x = 3 - z - 2y = 3 - z - \frac{14}{5} + \frac{2z}{5} = \frac{1}{5} - \frac{3z}{5} \end{cases} \end{aligned}$$

Si fem $z = 5\lambda$, les solucions són: $\left(\frac{1}{5} - 3\lambda, \frac{7}{5} - \lambda, 5\lambda \right)$

$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{cases} -x + 2y - z = 1 \\ 2x - 4y + 2z = 3 \\ x + y + z = 2 \end{cases} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{3a \\ 2a \\ 1a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a + 1a \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1a \\ 2a + 2 \cdot 3a \\ 3a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

La segona equació és impossible: $0x + 0y + 0z = 5$.

El sistema és *incompatible*.

$$d) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$y = 3x$$

$$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$$

$$x = \lambda$$

Solucions: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

21. Classifica els sistemes següents en compatibles o incompatibles:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ x + y - z = 3 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y = 3 \\ x + y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow \text{Compatible indeterminat.}$$

$$b) \begin{cases} x + y + z = 3 \\ 2x - y + z = 2 \\ x - y + z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Compatible determinat.}$$

22. Estudia els sistemes següents i resol-los pel mètode de Gauss:

$$a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases} \quad b) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y + 5z = 11 \\ x - 5y + 6z = 29 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ (1a) \cdot 2 - 2a \\ 1a - 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 6 & -5 & -27 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ (2a) \cdot 6 + 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -23 & -69 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 2 \\ -y - 3z = -7 \\ -23z = -69 \end{cases}$$

Sistema compatible determinat.

Solució: $z = 3, y = -2, x = 1$.

$$\text{b) } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a + 1a \\ 3a + 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible indeterminat.}$$

$$\text{El resoltem: } \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3x \\ z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x \\ x = \lambda \end{cases}$$

Solucions: $(\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$

23. Estudia i resol aquests sistemes pel mètode de Gauss:

$$\text{a) } \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 4x + 2y - z = 5 \\ 2x + 4y - 7z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & 4 & -7 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a + 4 \cdot 1a \\ 3a + 2 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 6 & -1 & -3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a \\ 3a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & -2 \\ 0 & 6 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema compatible determinat.}$$

$$\text{El resoltem: } \begin{cases} -x + y + 3z = -2 \\ 6y + 11z = -3 \\ z = 0 \end{cases} \rightarrow y = -\frac{1}{2} \quad x = y + 3z + 2 = \frac{3}{2}$$

Solució: $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0\right)$

$$\text{b) } \begin{cases} x - 3y - z = -1 \\ x + 5y + 3z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ 3x + 7y + 5z = 5 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 3a \\ 2a \\ 1a \\ 4a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & 3 \\ 1 & -3 & -1 & -1 \\ 3 & 7 & 5 & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \\ 4a - 3 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & -2 & -2 \\ 0 & 4 & 2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a : 2 \\ 3a + 2a \\ 4a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

→ Sistema *compatible indeterminat*. El resollem:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2y + z = 1 \end{cases} \begin{cases} z = 1 - 2y \\ x = 1 - y - z = y \\ y = \lambda \end{cases}$$

Solucions: $(\lambda, \lambda, 1 - 2\lambda)$.

$$\begin{aligned} \text{c) } \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 4 \\ 2x + 2y + z = 3 \\ x - 2y + 2z = -3 \end{cases} &\rightarrow \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 3a \\ 2a \\ 1a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 5 \cdot 1a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 6 & -3 & 9 \\ 0 & 12 & -7 & 19 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1a \\ 2a : 3 \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sistema *compatible determinat*. El resollem:

$$\begin{cases} x - 2y + 2z = -3 \\ 2y - z = 3 \\ -z = 1 \end{cases} \begin{cases} z = -1 \\ y = 1 \\ x = -3 + 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

Solució: $(1, 1, -1)$

$$\begin{aligned} \text{d) } \begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ 2x - 2y + 3z + t = 0 \\ 3x - 3y + 5z + 6t = 0 \end{cases} &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 2 & -2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 48 & 0 \end{pmatrix} \\ &\rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ -4 \cdot 2a + 3 \cdot 3a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -14 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 29 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 28 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sistema *compatible indeterminat*. El resollem:

$$\begin{cases} x - y + 3z - 14t = 0 \\ -3z + 29t = 0 \\ 28t = 0 \end{cases} \begin{cases} t = 0 \\ z = 0 \\ x = y \\ y = \lambda \end{cases}$$

Solucions: $(\lambda, \lambda, 0, 0)$

Pàgina 27

Discussió de sistemes lineals

24. Discuteix els sistemes següents i resol-los quan sigui possible:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} 2x - y = 4 \\ -x + y/2 = -2 \\ x + ky = 2 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ -1 & 1/2 & -2 \\ 1 & k & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2 \cdot 2a + 1a \\ 2 \cdot 3a - 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2k+1 & 0 \end{array} \right)$$

• Si $k = -\frac{1}{2} \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat*. El resollem:

$$2x - y = 4 \rightarrow \begin{cases} y = 2x - 4 \\ x = \lambda \end{cases} \quad \text{Solucions: } (\lambda, 2\lambda - 4)$$

• Si $k \neq -\frac{1}{2} \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*.

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ (2k+1)y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 2 \end{cases}$$

Solució: (2, 0)

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x - 2y + z = 3 \\ 5x - 5y + 2z = m \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 2a \\ 1a \\ 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & -5 & 2 & m \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 5 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 5 & -3 & m-15 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a \\ 3a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & m-10 \end{array} \right)$$

• Si $m = 10 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat*. El resollem:

$$\begin{cases} x - 2y + z = 3 \\ 5y - 3z = -5 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \frac{-5 + 3z}{5} = -1 + \frac{3z}{5} \\ x = 3 + 2y - z = 3 - 2 + \frac{6z}{5} - z = 1 + \frac{z}{5} \end{cases}$$

Fent $z = 5\lambda$.

Solucions: $(1 + \lambda, -1 + 3\lambda, 5\lambda)$

• Si $m \neq 10 \rightarrow$ *Incompatible*

25. Discuteix els següents sistemes d'equacions:

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases} \quad \text{d) } \begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1 - k \\ 0 & 3 & k + 2 & -2k \end{array} \right)$$

Sistema *compatible determinat* per a tot k .

$$b) \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 3y + z = 0 \\ 3x + ay + 4z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & a & 4 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a : 2 \\ 3a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-3 & 7 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a - 7 \cdot 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & a-10 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

• Si $a = 10 \rightarrow$ Sistema compatible indeterminat

• Si $a \neq 10 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

$$c) \begin{cases} x - 2y + z = 1 \\ mx + y - z = 1 \\ 3x + 4y - 2z = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ m & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 3a \\ 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & -2 & -3 \\ m & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a + 2 \cdot 1a \\ 3a + 1a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & -1 \\ m+1 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Compatible determinat per a tot m .

$$d) \begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a \\ 2a \\ 1a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a - 5 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a+3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ -2 \cdot 3a + 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2-2a & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 - 2a = 0 \rightarrow a = 1$$

• Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema incompatible

• Si $a \neq 1 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

26. Resol cada un dels sistemes següents per als valors de m que el fan compatible:

$$a) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{cases}$$

$$a) \begin{cases} x + 2y = 3 \\ 2x - y = 1 \\ 4x + 3y = m \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 3 & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 4 \cdot 1a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -5 \\ 0 & -5 & m-12 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a : (-5) \\ 3a - 2a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-7 \end{pmatrix}$$

- Si $m = 7 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 3 \\ y = 1 \end{array} \right\} x = 3 - 2y = 1$$

Solució: (1, 1)

- Si $m \neq 7 \rightarrow$ Sistema *incompatible*

$$\begin{aligned} \text{b) } \left. \begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 1 \\ 3x + z = 3 \\ x + 2y + 5z = m \end{array} \right\} & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & m \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \\ 4a - 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 3 & 7 & m-2 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2a \\ 4a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 7 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m+1 \end{array} \right) \end{aligned}$$

- Si $m = -1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat*

$$\left. \begin{array}{l} x - y - 2z = 2 \\ 3y + 7z = -3 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = \frac{-3 - 7z}{3} = -1 - \frac{7z}{3} \\ x = 2 + y + 2z = 2 - 1 - \frac{7z}{3} + 2z = 1 - \frac{z}{3} \end{array}$$

Fent $z = 3\lambda$:

Solucions: $(1 - \lambda, -1 - 7\lambda, 3\lambda)$

- Si $m \neq -1 \rightarrow$ Sistema *incompatible*

27. Discuteix i resol en funció del paràmetre:

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{array} \right. \quad \text{b) } \left\{ \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} \text{a) } \left. \begin{array}{l} -x + my + z = 2 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ -x - 3z = -2 \end{array} \right\} & \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} -3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a + 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ -2a \\ 3a + 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

- Si $m = 1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat*

$$\left. \begin{array}{l} x + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x = 2 - 3z \\ y = 4 - 4z \\ z = \lambda \end{array}$$

Solucions: $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*

$$\left. \begin{array}{l} x + 3z = 2 \\ y + 4z = 4 \\ (m-1)y = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = 0 \\ z = 1 \\ x = 2 - 3z = -1 \end{array} \quad \text{Solució: } (-1, 0, 1)$$

$$\text{b) } \left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ 3x + 2y + az = 5 \\ 2x + y + z = 3 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 3a \\ 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ -2a \\ 3a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array} \right)$$

- Si $a = 2 \rightarrow$ Sistema *incompatible*
- Si $a \neq 2 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. El resollem:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 0 \\ y + z = -3 \\ (a-2)z = 2 \end{array} \right\}$$

$$z = \frac{2}{a-2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a-2} = \frac{4-3a}{a-2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4+3a}{a-2} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a-6}{a-2} = 3$$

$$\text{Solució: } \left(3, \frac{4-3a}{a-2}, \frac{2}{a-2} \right)$$

PER RESOLDRE

28. Discuteix i resol en els casos en què sigui possible.

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} 2x - 3y + z = 0 \\ x - ky - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{b) } \left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 1 \\ x - z = 1 \\ 2x + 2y + (m+1)z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{c) } \left\{ \begin{array}{l} x + 2z = 11 \\ x + y = 3 \\ ax + y + 2z = 0 \end{array} \right.$$

$$\text{d) } \left\{ \begin{array}{l} 2x + y - 3z = 0 \\ 2x + az = 0 \\ 6x + ay - 9z = 0 \end{array} \right.$$

- a) Tots els termes independents són zero. Per tant, el sistema segur que és compatible. Sempre existeix la solució $x = y = z = 0$. Ara cal veure en quins casos és compatible determinat i en quins és compatible indeterminat.

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 1 & -k & -3 & | & 0 \\ 5 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a \\ 1a \\ 3a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -k & -3 & | & 0 \\ 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 5 & 2 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2 \cdot (1a) - 2a \\ 5(1a) - 3a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -k & -3 & | & 0 \\ 0 & 3-2k & -7 & | & 0 \\ 0 & -2-5k & -14 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2 \cdot (2a) - 3a \\ 3a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -k & -3 & | & 0 \\ 0 & k+8 & 0 & | & 0 \\ 0 & -2-5k & -14 & | & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema ja és *escalonat*.

- Si $k + 8 = 0$ tenim una fila de zeros $\rightarrow$ sistema *compatible indeterminat*.

$$k = -8 \rightarrow \begin{cases} x + 8y - 3z = 0 \\ -2 + 40y - 14z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + 8y + 3z = 0 \\ 38y - 14z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Solució: } z = \lambda, y = \frac{+7}{19}\lambda, x = \frac{1}{19}\lambda$$

- Si $k + 8 \neq 0$ llavors el sistema és *compatible determinat* i la solució serà:

$$\text{Solució: } x = y = z = 0$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & | & 1 \\ 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 2 & 2 & m+1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2a \\ 1a \\ 3a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 3 & 2 & -1 & | & 1 \\ 2 & 2 & m+1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 3(1a) - 2a \\ 2(1a) - 3a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -2 & | & 2 \\ 0 & -2 & -m-1 & | & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1a \\ 2a \\ 2a - 3a \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & -2 & -2 & | & 2 \\ 0 & 0 & m+1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

- Si $m + 1 = 0$ tenim una fila de zeros $\rightarrow$ sistema *compatible indeterminat*.

$$m = -1 \rightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ -2y - 2z = 2 \end{cases}$$

$$\text{Solució: } z = \lambda, x = 1 + \lambda, y = -1 - \lambda$$

- Si $m + 1 \neq 0$ llavors el sistema és *compatible determinat*.

$$\begin{cases} x - z = 1 \\ -2y - 2z = 2 \\ (m + 1)z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Solució: } z = 0, x = 1, y = -1$$

$$c) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 11 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ a & 1 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{\text{canvieu la} \\ \text{1a columna} \\ \text{per la 3a}}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & a & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1a \\ 2a \\ 1a-3a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1-a & 11 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a & & & \\ 2a+3a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2-a & 14 \end{array} \right)$$

• Si $a = 2$ sistema *incompatible*.

• Si $a \neq 2$ sistema *compatible determinat*, i degut al canvi de columnes queda:

$$\begin{cases} 2z - x = 11 \\ y + x = 3 \\ (2 - a)x = 14 \end{cases}$$

$$\text{Solució: } x = \frac{14}{2-a}, y = \frac{-3a-8}{2-a}, z = \frac{8-11a}{4-2a}$$

d) El sistema ha de ser compatible ja que tots els termes independents són zero. Sempre existeix la solució $x = y = z = 0$. Ara cal veure quan és compatible determinat i quan és indeterminat.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 2 & & a & 0 \\ 6 & a & -9 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1a \\ 1a-2a \\ 3(1a)-3a}} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -3-a & 0 \\ 0 & 3-a & 0 & 0 \end{array} \right)$$

• Si $3 - a = 0$ sistema *compatible indeterminat*.

$$a = 3 \begin{cases} 2x + y - 3z = 0 \\ y - 6z = 0 \end{cases}$$

$$\text{Solució: } z = \lambda, x = \frac{-3}{2}\lambda, y = 6\lambda$$

• Si $3 - a \neq 0$ el sistema és *compatible determinat* i la solució és $x = y = z = 0$.

29. Discuteix els sistemes següents segons els valors de α i interpreta'ls geomètricament:

$$a) \begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases} \quad b) \begin{cases} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{cases}$$

$$a) \left. \begin{cases} \alpha x - y = 1 \\ x - \alpha y = 2\alpha - 1 \end{cases} \right\} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 1 & -\alpha & 2\alpha - 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{1a \\ 2a \cdot \alpha - 1a}} \left(\begin{array}{cc|c} \alpha & -1 & 1 \\ 0 & 1 - \alpha^2 & 2\alpha^2 - \alpha - 1 \end{array} \right) \quad \alpha \neq 0$$

• Si $\alpha = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ Sistema } \textit{compatible indeterminat}. \text{ Són dues rectes coincidents.}$$

- Si $\alpha = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \text{ Sistema } \textit{incompatible}. \text{ Són dues rectes paral·leles.}$$

- Si $\alpha \neq 1$ i $\alpha \neq -1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. Són dues rectes secants.

$$b) \left. \begin{array}{l} x - y = 1 \\ 2x + 3y - 5z = -16 \\ x + \alpha y - z = 0 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & -16 \\ 1 & \alpha & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & \alpha + 1 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 5 \cdot 3a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & -5 & -18 \\ 0 & 5\alpha & 0 & 13 \end{array} \right)$$

- Si $\alpha \neq 0 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. Són tres plans que es tallen en un punt.
- Si $\alpha = 0 \rightarrow$ Sistema *incompatible*. Els plans es tallen dos a dos, però no hi ha cap punt comú als tres.

30. Es considera el sistema d'equacions lineals:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{cases}$$

- Troba un valor de a per al qual el sistema sigui incompatible.
- Discuteix si hi ha algun valor del paràmetre a per al qual el sistema sigui compatible determinat.
- Resol el sistema per a $a = 0$.

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ x + ay + 3z = 2 \\ 2x + (2 + a)y + 6z = 3 \end{array} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & a & 3 & 2 \\ 2 & (2 + a) & 6 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & a - 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

- $a = 2$
- No existeix cap valor de a per al qual el sistema sigui compatible determinat.
- Si $a = 0$, queda:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y + 3z = 1 \\ -2y = 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} y = -1/2 \\ x - 1 + 3z = 1 \\ z = \lambda \end{array} \rightarrow x = 2 - 3z$$

$$\text{Solucions: } (2 - 3\lambda, -\frac{1}{2}, \lambda)$$

31. Considera el sistema d'equacions:

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x - z = 1 \end{cases}$$

a) Hi ha una solució en què y sigui igual a 0?

b) Resol el sistema.

c) Interpreta'l geomètricament.

$$\begin{cases} 2x - 2y - z = 4 \\ x + 2y - 2z = -1 \\ x - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 3a \\ 2a \\ 1a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 2 & -2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 2 \cdot 1a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a + 2a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ 2y - z = -2 \end{cases}$$

$$a) y = 0 \rightarrow \begin{cases} x - z = 1 \\ -z = -2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x = 1 + z = 3 \end{cases}$$

Solució: (3, 0, 2)

$$b) \begin{cases} x = 1 + z = 1 + 2y + 2 = 3 + 2y \\ z = 2y + 2 \\ y = \lambda \end{cases}$$

Solucions: (3 + 2λ, λ, 2λ + 2)

c) Són tres plans que es tallen en una recta.

32. Troba un nombre de tres xifres sabent que aquestes sumen 9; que, si del nombre donat se li resta el que resulta d'invertir l'ordre de les seves xifres, la diferència és 198, i que la xifra de les desenes és mitjana aritmètica de les altres dues.

☛ Si x és la xifra de les unitats, y la de les desenes i z la de les centenes, el nombre serà $x + 10y + 100z$.

$z = n$. centenes, $y = n$. desenes, $x = n$. unitat, $\rightarrow$ nombre zyx

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ (z + 10y + 100x) - (x + 10y + 100z) = 198 \\ y = \frac{x+z}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 9 \\ +99x - 99z = 198 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ +x - z = 2 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1a \\ 2a \\ 3a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ +1 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{smallmatrix} 1a \\ 1a - 2a \\ 1a - 3a \end{smallmatrix}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{cases} x + y + z = 9 \\ y + 2z = 7 \\ y + z = 3 \end{cases} \quad \text{Solució: } y = 3, z = 2, x = 4. \text{ El nombre és 432.}$$

- 33.** A, B i C són tres amics. A li diu a B: si et dono la tercera part dels meus diners, els tres tindrem la mateixa quantitat. Calcula el que té cadascú si entre els tres tenen 60 €.

a = diners que té A b = diners que té B c = diners que té C

$$\begin{cases} a - \frac{a}{3} = b + \frac{a}{3} = c \\ a + b + c = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}a - b = 0 \\ \frac{2}{3}a - c = 0 \\ a + b + c = 60 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}a = b \\ \frac{2}{3}a = c \\ a + b + c = 60 \end{cases}$$

$$a + \frac{1}{3}a + \frac{2}{3}a = 60 \rightarrow 3a + a + 2a = 180 \rightarrow 6a = 180 \rightarrow a = 30, b = 10, c = 20$$

- 34.** Un magatzemista disposa de tres tipus de cafè: el tipus A de 9,8 €/kg; el B de 8,75 €/kg i el C de 9,5 €/kg. Vol fer una mescla amb els tres tipus de 10,5 kg a 9,40 €/kg. Quants quilos de cada tipus ha de mesclar si ha de posar el doble del tipus C que dels tipus A i B?

a = quilos de A usats per fer la mescla

b = quilos de B usats per fer la mescla

c = quilos de C usats per fer la mescla

$$\left. \begin{aligned} a + b + c &= 10,5 \\ a + b &= 2c \\ 9,8a + 8,75b + 9,5c &= 9,40 \cdot 10,5 \end{aligned} \right\}$$

Solució: Amb les 2 primeres eq.: $c = 3,5$ kg, $b = 3$ kg, $a = 4$ kg.

Pàgina 28

- 35.** Una botiga ha venut 600 exemplars d'un videojoc per un total de 6384 €. El preu original era de 12 €, però també ha venut còpies defectuoses amb descomptes del 30% i del 40%. Si sabem que el nombre de còpies defectuoses venudes va ser la meitat del de les còpies en bon estat, calcula a quantes còpies se'ls va aplicar el 30% de descompte.

Anomenem x el nombre de còpies venudes al preu original, 12 €; y el nombre de còpies venudes amb un 30% de descompte, $0,7 \cdot 12 = 8,4$ €; i z el nombre de còpies venudes amb un 40% de descompte, $0,6 \cdot 12 = 7,2$ €.

Així:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 600 \\ 12x + 8,4y + 7,2z &= 6384 \\ y + z &= \frac{x}{2} \end{aligned} \right\} \begin{cases} x + y + z = 600 \\ 12x + 8,4y + 7,2z = 6384 \\ x - 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 12 & 8,4 & 7,2 & 6384 \\ 1 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ -2a + 12 \cdot 1a \\ -3a + 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3,6 & 4,8 & 816 \\ 0 & 3 & 3 & 600 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a \\ 3a : 3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 3,6 & 4,8 & 816 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 3a \\ 2a - 3,6 \cdot 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & 1 & 1 & 200 \\ 0 & 0 & 1,2 & 96 \end{array} \right)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 600 \\ y + z = 200 \\ 1,2z = 96 \end{array} \right\} \begin{array}{l} z = 80 \\ y = 120 \\ x = 400 \end{array}$$

Solució: El 30% de descompte es va aplicar a 120 còpies.

- 36. Un caixer automàtic conté 95 bitllets de 10, 20 i 50 € i un total de 2000 €. Si el nombre de bitllets de 10 € és el doble que el nombre de bitllets de 20 €, descobreix quants bitllets hi ha de cada tipus.**

Anomenem x el nombre de bitllets de 10 €; y el nombre de bitllets de 20 €, i z el nombre de bitllets de 50 €. Veiem que:

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ 10x + 20y + 50z = 2000 \\ x = 2y \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} x + y + z = 95 \\ x + 2y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} 3x + z = 95 \\ 4y + 5z = 200 \\ x = 2y \end{array} \right\}$$

$$z = 95 - 3y$$

$$4y + 5(95 - 3y) = 200 \rightarrow 4y + 475 - 15y = 200 \rightarrow 275 = 11y$$

$$y = 25 \rightarrow z = 20 \rightarrow x = 50$$

Solució: Hi ha 50 bitllets de 10 €, 25 bitllets de 20 € i 20 bitllets de 50 €.

- 37. En un taller de joieria es fabriquen collarets amb 50, 75 i 85 perles. Per fer-ho s'utilitzen en total 17 500 perles i 240 tanques.**

a) Quants collarets de cada mida s'han de fabricar si es volen tants collarets de mida mitjana com la mitjana aritmètica del nombre de collarets grans i petits)

b) Sense tenir en compte la condició anterior, és possible fabricar el mateix nombre de collarets de cada mida?

p = nombre de collarets petits

m = nombre de collarets mitjans

g = nombre de collarets grans

$$\text{Cada collaret té una tanca} \rightarrow p + m + g = 240$$

$$\text{Totes les perles utilitzades han d'estar en algun collaret} \rightarrow 50p + 75m + 85g = 17\,500.$$

$$\text{a) } \left\{ \begin{array}{l} p + m + g = 240 \\ 50p + 75m + 85g = 17\,500 \\ m = \frac{p+g}{2} \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} p + m + g = 240 \\ 50p + 75m + 85g = 17\,500 \\ p - 2m + g = 0 \end{array} \right.$$

Restem la 1a – 3a i obtenim $3m = 240 \rightarrow m = 80$

$$\begin{cases} p + g = 160 \\ 50p + 85g = 11\,500 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 160 \\ 50 & 85 & 11\,500 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 160 \\ 0 & 35 & 3\,500 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} p + g = 160 \\ 35g = 3\,500 \end{cases}$$

$$g = 100, p = 60, m = 80$$

$$\text{b) } \begin{cases} p + m + g = 240 \\ 50p + 75m + 85g = 17\,500 \\ p = m = g \end{cases} \rightarrow \begin{cases} p + p + p = 240 \\ 50p + 75p + 85p = 17\,500 \end{cases} \rightarrow$$

$$\begin{cases} 3p = 240 \rightarrow p = 80 \\ 210p = 17\,500 \rightarrow p = 83,3 \end{cases} \left. \vphantom{\begin{cases} 3p = 240 \\ 210p = 17\,500 \end{cases}} \right\} \begin{array}{l} \text{És impossible el que demana l'enunciat, és a} \\ \text{dir, el sistema és } \textit{incompatible}. \end{array}$$

- 38.** En una botiga, per comprar 2 jaquetes i una brusa ens cobre 200 €. Si tornem a la botiga i comprem una jaqueta, uns pantalons i tornem la brusa, ens cobren 100 €. Si fem una tercera visita a la botiga i comprem 5 jaquetes, uns pantalons i una brusa, quant ens cobraran?

➡ Expressa el preu dels pantalons i de les bruses en funció del de les jaquetes.

j = preu de la jaqueta, p = preu dels pantalons, b = preu de la brusa

$$\begin{cases} 2j + b = 200 \\ j + p - b = 100 \\ 5j + p + b = x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{Podem observar que si multipliquem per 2 la 1a equació i la} \\ \text{sumem la 2a obtenim la 3a.} \\ \text{Això vol dir que:} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4j + 2b = 400 \\ + \quad j + p - b = 100 \\ \hline 5j + p + b = 500 \end{array} \quad \text{que ens cobraran 500 €}$$

També es pot resoldre tal com diu l'enunciat:

$$\begin{cases} 2j + b = 200 \\ j + p - b = 100 \\ 5j + p + b = x \end{cases} \rightarrow \begin{cases} b = 200 - 2j \\ p = 100 + b - j = 100 + (200 - 2j) - j = 300 - 3j \end{cases}$$

i substituïm a la 3a equació:

$$5j + (300 - 3j) + (200 - 2j) = x$$

$$500 = x$$

- 39.** Tres entitats financeres A, B i C ofereixen, respectivament, per a dipòsits superiors a 2000 €, un interès anual del 2 %, 3 % i K %. La Joana, en Manel i en Daniel decideixen invertir els seus estalvis en aquestes entitats durant un any. Si tots ho fessin a A obtindrien en total uns beneficis de 164 €; però si la Joana optés per A, en Manel per C i en Daniel per B, obtindrien 192 €; i si la Joana i en Manel es decidissin per B i en Daniel per C, obtindrien 218 €.

a) Escriu un sistema d'equacions que descrigui la situació.

b) Calcula, sense resoldre el sistema, la quantitat de diners invertits entre les tres persones.

c) Troba, si existeix, un valor de K per al qual hi hagin infinites solucions. Resol el sistema per a l'esmentat valor de K i dóna tres solucions diferents.

j = diners invertits per la Joana

m = diners invertits per en Manel

d = diners invertits per en David

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } (j + m + d) \cdot \frac{2}{100} &= 164 \\ j \cdot \frac{2}{100} + m \cdot \frac{k}{100} + d \cdot \frac{3}{100} &= 192 \\ (j + m) \cdot \frac{3}{100} + d \cdot \frac{k}{100} &= 218 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{aligned} j + m + d &= 8.200 \\ 2j + km + 3d &= 19.200 \\ 3j + 3m + kd &= 21.800 \end{aligned}$$

b) No és possible, ja que ens calen més dades, tot i que si tots han d'haver invertit $> 2000 \text{ €} \rightarrow 1,6 < k < 2,3$

c) Avaluem el sistema

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 2 & k & 3 & 19.200 \\ 3 & 3 & k & 21.800 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(2a) - 2 \cdot (1a) \\ (3a) - 3 \cdot (1a)}} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & k-2 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & k-3 & 2.800 \end{array} \right)$$

De l'última equació: Si $(k - 3) = 0$ el sistema serà incompatible, $k = 3$ sistema incompatible $\rightarrow$ no solució.

De la segona equació: Si $(k - 2) = 0 \rightarrow k = 2$ quedarà:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & 0 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & -1 & -2.800 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 8.200 \\ 0 & 0 & 1 & 2.800 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

Sistema compatible indeterminat $\rightarrow \infty$ solucions

Per $k = 2$:

$$\begin{aligned} j + m + d &= 8.200 \\ d &= 2.800 \end{aligned}$$

En Daniel ha invertit 2.800 € i entre la Joana i en Manel n'han invertit 5.400 €.

Podria ser:

	JOANA	MANEL	DANIEL
SOLUCIÓ 1	3.000	2.400	2.800
SOLUCIÓ 2	3.200	2.200	2.800
SOLUCIÓ 3	2.100	3.300	2.800
...			2.800

- 40.** Una persona ha obtingut 6000 € de benefici per invertir un total de 60 000 € en tres empreses: A, B i C. La suma dels diners invertits en A i B va ser m vegades els invertits en C i els beneficis van ser el 5 % en l'empresa A, el 10 % en la B i el 20 % en la C.

a) Planteja un sistema d'equacions per esbrinar la quantitat invertida en cada empresa.

b) Prova que si $m > 0$ el sistema és compatible determinat.

c) Troba la solució per a $m = 5$.

$$\begin{array}{l} a = \text{diners invertits en l'empresa A} \\ b = \text{diners invertits en l'empresa B} \\ c = \text{diners invertits en l'empresa C} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 60.000 \\ a + b = mc \\ a \cdot \frac{5}{100} + b \cdot \frac{10}{100} + c \cdot \frac{20}{100} = 6.000 \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} b) \ a + b + c = 60.000 \\ \quad a + b - mc = 0 \\ \quad 5a + 10b + 20c = 600.000 \end{array} \left\{ \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60.000 \\ 1 & 1 & -m & 0 \\ 5 & 10 & 20 & 600.000 \end{array} \right.$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 60.000 \\ 0 & 5 & 15 & 300.000 \\ 0 & 0 & m+1 & 60.000 \end{array} \right)$$

Si $m > 0 \rightarrow m + 1 > 0$ i l'equació $(m + 1)z = 60.000$ sempre tindrà solució i, per tant, també les altres dues equacions. El sistema serà, per tant, compatible determinat.

c) Solució: Si $m = 5 \rightarrow 6c = 60.000$
 $c = 10.000, b = 30.000, a = 20.000$

- 41.** Les edats d'un noi, el seu pare i el seu avi compleixen les condicions següents: la suma de les edats del pare, del fill i el doble de la de l'avi fa 182 anys. El doble de l'edat del fill més la de l'avi fa 100 anys i l'edat del pare és α vegades la del seu fill.

a) Troba les edats dels tres suposant que $\alpha = 2$.

b) És possible que $\alpha = 3$?

c) Si $\alpha = 3$ i en la primera condició la suma és 200, què passa amb el problema?

$$\begin{array}{l} a) \ f = \text{edat del noi o fill} \\ \quad p = \text{pare} \\ \quad a = \text{avi} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} p + f + 2a = 182 \\ 2f + a = 100 \\ p = \alpha f \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} 2a + p + f = 182 \\ a + 2f = 100 \\ p - \alpha f = 0 \end{array}$$

Solució: Si $\alpha = 2 \rightarrow f = 18$ anys, $p = 36$ anys, $a = 64$ anys

$$\begin{aligned}
 \text{b) } \left. \begin{aligned} 2a + p + f &= 182 \\ a + 2f &= 100 \\ p - \alpha f &= 0 \end{aligned} \right\} &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 182 \\ 1 & 0 & 2 & 100 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{(1a) - 2(2a)} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 182 \\ 0 & 1 & -3 & -18 \\ 0 & 1 & -\alpha & 0 \end{array} \right) \\
 &\xrightarrow{2a - 3a} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 182 \\ 0 & 1 & -3 & -18 \\ 0 & 0 & \alpha - 3 & -18 \end{array} \right)
 \end{aligned}$$

Solució: Si $\alpha = 3$ Sistema incompatible $\rightarrow$ No solució

c) Sistema incompatible ja que la 3a equació no es pot solucionar.

- 42.** Una marca comercial utilitza tres ingredients A , B i C en l'elaboració de tres tipus de pizzes P_1 , P_2 i P_3 . La pizza P_1 s'elabora amb 1 unitat de A , 2 de B i 2 de C ; la P_2 s'elabora amb 2 unitats de A , 1 de B i 1 de C ; i la P_3 s'elabora amb 2 unitats de A , 1 de B i 2 de C . El preu de venda al públic és de 4,80 € per a la P_1 , 4,10 € per a la P_2 i 4,90 € per a la P_3 . Si sabem que el benefici és de 1,60 € en cada una, troba quant li costa a la marca comercial cada unitat de A , B i C .

El preu unitari (per unitat) és igual al cost unitari més el benefici unitari.

Per tant, cost = preu - benefici.

Calculem el cost per als tres tipus de pizzes:

$$\text{cost } P_1 = 4,80 - 1,60 = 3,20$$

$$\text{cost } P_2 = 4,10 - 1,60 = 2,50$$

$$\text{cost } P_3 = 4,90 - 1,60 = 3,30$$

Calculem el cost de cada ingredient:

$$\begin{cases} a + 2b + 2c = 3,20 \\ 2a + b + c = 2,50 \\ 2a + b + 2c = 3,30 \end{cases}$$

Observem que si fem $3a - 2a$ obtenim $c = 0,80$ €, i llavors ens queda:

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} a + 2b = 1,60 \\ 2a + b = 1,70 \end{cases} &\rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1,60 \\ 2 & 1 & 1,70 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{matrix} 1a \\ 2(1a) - 2a \end{matrix}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 1,60 \\ 0 & 3 & 1,50 \end{array} \right) \rightarrow \\
 \begin{cases} a + 2b = 1,60 \\ 3b = 1,50 \end{cases} &\rightarrow b = 0,50 \text{ €}, a = 0,60 \text{ €}
 \end{aligned}$$

QÜESTIONS TEÒRIQUES

- 43.** Si tenim un sistema compatible indeterminat de 2 equacions amb 2 incògnites, es pot aconseguir un sistema incompatible afegint-hi una tercera equació?

Sí, si li afegim una equació contradictòria amb el que diuen les anteriors.

- 44. Si a un sistema de 2 equacions amb 2 incògnites incompatible li afegim una altra equació, podríem aconseguir que fos compatible indeterminat? I determinat? Justifica les respostes.**

No. Si el sistema és incompatible, les dues equacions inicials són contradictòries. Afegint una altra equació, no podem canviar aquest fet; el sistema seguirà sent incompatible.

- 45. Quantes solucions té el següent sistema si a és diferent de 1. I si a és igual a 1? Pot ser incompatible?**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ (a - 1)x = 0 \\ x + 3z = 0 \end{cases}$$

Si $a \neq 1$ té única solució, $x = y = z = 0$

Si $a = 1$ sistema compatible indeterminat $\rightarrow$ Té infinites solucions

No pot ser mai incompatible, això passa sempre amb tots els sistemes homogenis.

Pàgina 29

- 46. És possible convertir aquest sistema en compatible indeterminat si hi canviem un signe?**

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$$

Sí, canviant un dels signes negatius per positiu tindríem $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$

Restant $2a - 3a$ obtenim $2z = 0 \rightarrow z = 0$

El sistema quedaria $\begin{cases} x + y = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. És un sistema compatible indeterminat.

- 47. Donades les equacions: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \end{cases}$**

a) Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui incompatible.

b) Afegeix-hi una equació perquè el sistema sigui compatible determinat.

Justifica en cada cas el procediment seguit.

a) Perquè sigui incompatible, l'equació que afegim ha de ser de la forma:

$$a(3x - 2y + z) + b(2x - 3y + z) = k \text{ amb } k \neq 5a - 4b.$$

Si agafem, per exemple, $a = 1$, $b = 0$, $k = 1$, queda:

$$3x - 2y + z = 1$$

Afegint aquesta equació, el sistema seria incompatible.

b) Per exemple, afegint $y = 0$, queda:

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = -4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + z = 5 \\ 2x + z = -4 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 9 \\ y = 0 \\ z = -22 \end{cases} \text{ Compatible determinat}$$

- 48. Defineix quan dos sistemes d'equacions lineals són equivalents. Justifica si són equivalents o no els sistemes següents:**

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x + y - z = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \\ z = -1 \end{cases}$$

Dos sistemes d'equacions lineals són equivalents quan totes les solucions del 1.º sistema ho són també del 2.º, i a la inversa.

Els dos sistemes donats no són equivalents, atès que el 1.º és compatible indeterminat (té infinites solucions) i el 2.º és determinat (només té una solució).

- 49. Siguin S i S' dos sistemes equivalents amb solució única que tenen iguals els termes independents. Podem assegurar que tenen iguals els coeficients de les incògnites?**

No. Per exemple, els sistemes:

$$S: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad S': \begin{cases} 2x - y = 3 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

són equivalents, amb solució única (2, 1), tenen iguals els termes independents, però no els coeficients de les incògnites.

PER APROFUNDIR

- 50. Troba raonadament dos valors del paràmetre a per als quals aquest sistema sigui incompatible:**

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + az = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ ax + y + 2z = 1 \\ x + 3z = 2 \\ 2x + az = 3 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a - 1a & & & \\ 3a & & & \\ 4a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a - 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & a & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1a & & & \\ 2a & & & \\ 3a & & & \\ 4a - 2 \cdot 3a & & & \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 \\ a - 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a - 6 & -1 \end{array} \right) \text{ Si } a = 1 \text{ o } a = 6, \text{ el sistema és incompatible.}$$

- 51. Discuteix els sistemes següents en funció del paràmetre a i resol-los en cas que siguin compatibles indeterminats:**

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases} \quad \text{b) } \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{cases}$$

$$\text{a) } \begin{cases} x + y + z = a - 1 \\ 2x + y + az = a \\ x + ay + z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 2 & 1 & a & a \\ 1 & a & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 1a \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a-1 \\ 0 & -1 & a-2 & -a+2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \end{array} \right)$$

• Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

• Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a + 3a \\ 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow$$

$\rightarrow$ Sistema compatible indeterminat

El resoltem en aquest cas:

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + z = 1 \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 - z \\ y = 0 \\ z = \lambda \end{cases}$$

Solucions: $(1 - \lambda, 0, \lambda)$

• Si $a \neq 1$ i $a \neq 2 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

$$\text{b) } \begin{cases} ax + y - z = 0 \\ 2x + ay = 2 \\ -x + z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & -1 & 0 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a + 1a \end{array} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ a-1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ -a \cdot 3a + 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & a & 0 & 2 \\ -a^2 + a + 2 & 0 & 0 & 2-a \end{array} \right)$$

$a \neq 0$

$$-a^2 + a + 2 = 0 \rightarrow a = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{-2} = \frac{-1 \pm 3}{-2} \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

• Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

• Si $a = 2$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a : 2 \\ 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} -x + z = 1 \\ x + y = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} z = 1 + x \\ y = 1 - x \\ x = \lambda \end{cases}$$

$\rightarrow$ Sistema compatible indeterminat

Solucions: $(\lambda, 1 - \lambda, 1 + \lambda)$

• Si $a \neq -1$ i $a \neq 2 \rightarrow$ Sistema compatible determinat

52. Discuteix el sistema següent segons els valors del paràmetre a . Interpreta'l geomètricament:

$$\begin{cases} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} ax + y + z - 4 = 0 \\ x + y + z + 1 = 0 \\ x - ay + z - 1 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} ax + y + z = 4 \\ x + y + z = -1 \\ x - ay + z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} 2a \\ 1a \\ 3a \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & 4 \\ 1 & -a & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{matrix} 1a \\ 2a - 1a \\ 3a - 1a \end{matrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ a - 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -a - 1 & 0 & 2 \end{array} \right)$$

• Si $a = 1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Els dos primers plans són paral·lels, i el tercer els talla.

• Si $a = -1$, queda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \text{Sistema incompatible}$$

Els dos últims plans són paral·lels, i el primer els talla.

• Si $a \neq 1$ i $a \neq -1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. Són tres plans que es tallen en un punt.

53. Resol el sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{cases}$$

• Si sumes les cinc igualtats, n'obtindràs una altra amb què se't poden simplificar molt els càlculs.

$$\begin{cases} x + y + z + t = 17 \\ x + y + z + w = 16 \\ x + y + t + w = 15 \\ x + z + t + w = 14 \\ y + z + t + w = 14 \end{cases}$$

Sumant les cinc igualtats, obtenim:

$$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 76, \text{ és a dir:}$$

$$4(x + y + z + t + w) = 76, \text{ o bé:}$$

$$x + y + z + t + w = 19$$

$$\text{Per tant: } (x + y + z + t) + w = 17 + w = 19 \rightarrow w = 2$$

$$(x + y + z + w) + t = 16 + t = 19 \rightarrow t = 3$$

$$(x + y + t + w) + z = 15 + z = 19 \rightarrow z = 4$$

$$(x + z + t + w) + y = 14 + y = 19 \rightarrow y = 5$$

$$(y + z + t + w) + x = 14 + x = 19 \rightarrow x = 5$$

- 54.** Ens diuen que x, y, z, t, w són nombres enters i que k val 36 o 38. Decideix raonadament quin dels dos és el seu valor i resol el sistema següent:

$$\begin{cases} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y + z + t = 35 \\ x + y + z + w = 36 \\ x + y + t + w = 38 \\ x + z + t + w = 39 \\ y + z + t + w = k \end{array} \right\}$$

Sumant les cinc igualtats, obtenim:

$$4x + 4y + 4z + 4t + 4w = 148 + k, \text{ és a dir:}$$

$$4(x + y + z + t + w) = 148 + k, \text{ o bé:}$$

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{k}{4}$$

Si x, y, z, t, w són nombres enters, llur suma també ho serà; així doncs, k ha de ser múltiple de 4. Com que ens diuen que val 36 o 38, tenim que ha de ser $k = 36$ (ja que 38 no és múltiple de 4).

Resolem el sistema, ara que sabem que $k = 36$:

La suma de les cinc igualtats donarà lloc a:

$$x + y + z + t + w = 37 + \frac{36}{4} = 37 + 9 = 46$$

$$\text{Per tant: } (x + y + z + t) + w = 35 + w = 46 \rightarrow w = 11$$

$$(x + y + z + w) + t = 36 + t = 46 \rightarrow t = 10$$

$$(x + y + t + w) + z = 38 + z = 46 \rightarrow z = 8$$

$$(x + z + t + w) + y = 39 + y = 46 \rightarrow y = 7$$

$$(y + z + t + w) + x = 36 + x = 46 \rightarrow x = 10$$

- 55.** Una colla formada per 6 obrers es compromet a podar els arbres d'una plantació. Treballen de dilluns a dissabte. Cada dia, cinc d'ells poden i el sisè els atén (reposa eines, els dóna aigua, arreplega els troncs que cauen...). Cada obrer poda el mateix nombre d'arbres cada dia, és a dir, si l'Albert poda 8 arbres un dia, podarà 8 arbres cada dia que intervingui. Els resultats són:

Dilluns: 34 arbres podats.

Dimarts: 36 arbres podats.

Dimecres: 37 arbres podats.

Dijous: 38 arbres podats.

Divendres: 40 arbres podats.

Dissabte: No sabem si són 33 o 35 arbres podats.

Calcula quants arbres diaris poda cada un dels sis obrers sabent que són nombres enters i que cap d'ells poda els sis dies.

Anomenem:

a = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dilluns.

b = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dimarts.

c = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dimecres.

d = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dijous.

e = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa divendres.

f = nombre d'arbres que poda l'obrer que descansa dissabte.

Tenim el següent sistema d'equacions:

$$b + c + d + e + f = 34$$

$$a + c + d + e + f = 36$$

$$a + b + d + e + f = 37$$

$$a + b + c + e + f = 38$$

$$a + b + c + d + f = 40$$

$$a + b + c + d + e = 33 \text{ o } 35$$

Sumem totes les equacions:

$$5a + 5b + 5c + 5d + 5e + 5f = 218 \text{ o } 220$$

$$5(a + b + c + d + e + f) = 218 \text{ o } 220$$

218 no és múltiple de 5, per tant el total ha de ser 220 (el dissabte es poden 35 arbres)

$$a + b + c + d + e + f = 44$$

$$a + b + c + d + e + f = 44 \rightarrow a + (b + c + d + e + f) = 44 \rightarrow a + 34 = 44 \rightarrow a = 10$$

$$b + 36 = 44 \rightarrow b = 8$$

$$c + 37 = 44 \rightarrow c = 7$$

$$d + 38 = 44 \rightarrow d = 6$$

$$e + 40 = 44 \rightarrow e = 4$$

$$f + 35 = 44 \rightarrow f = 9$$