

Pàgina 273

REFLEXIONA I RESOL

Aproximacions successives

- Comprova que:

$$f(4) = 6,5; f(4,9) = 6,95; f(4,99) = 6,995$$

- Calcula $f(4,999)$; $f(4,9999)$; $f(4,99999)$; ...

- A la vista dels resultats anteriors, et sembla raonable afirmar que, quan x s'aproxima a 5, el valor de $f(x)$ s'aproxima a 7? Ho expressem així:

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$$

Si $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 45}{2x - 10}$, entones:

$$f(4,999) = 6,9995; f(4,9999) = 6,99995; f(4,99999) = 6,999995$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 7$$

- Calcula, anàlogament, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 6x - 27}{2x - 6}$.

$$f(2) = 5,5; f(2,9) = 5,95; f(2,99) = 5,995; f(2,999) = 5,9995; f(2,9999) = 5,99995$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

Pàgina 275

1. Cadascuna de les funcions següents té un o més punts on no és contínua. Indica quins són aquests punts i quin tipus de discontinuïtat presenta:

$$\text{a) } y = \frac{x+2}{x-3} \quad \text{b) } y = \frac{x^2-3x}{x} \quad \text{c) } y = \frac{x^2-3}{x} \quad \text{d) } y = \begin{cases} 3 & \text{si } x \neq 4 \\ 1 & \text{si } x = 4 \end{cases}$$

- Rama infinita en $x = 3$ (asíntota vertical).
- Discontinuidad evitable en $x = 0$ (le falta ese punto).
- Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).
- Salto en $x = 4$.

2. Explica per què són contínues les funcions següents i determina l'interval en què estan definides:

a) $y = x^2 - 5$

b) $y = \sqrt{5 - x}$

c) $y = \begin{cases} 3x - 4, & x < 3 \\ x + 2, & x \geq 3 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 2 \\ 2, & 2 \leq x < 5 \end{cases}$

a) Està definida y es continua en todo \mathbb{R} .

b) Està definida y es continua en $(-\infty, 5]$.

Las funciones dadas mediante una expresión analítica sencilla (las que conocemos) son continuas donde están definidas.

c) Està definida en todo \mathbb{R} . Es continua, también, en todo \mathbb{R} . El único punto en que se duda es el 3: las dos ramas toman el mismo valor para $x = 3$:

$$3 \cdot 3 - 4 = 9 - 4 = 5 \qquad 3 + 2 = 5$$

Por tanto, las dos ramas empalman en el punto (3, 5). La función es también continua en $x = 3$.

d) También las dos ramas empalman en el punto (2, 2). Por tanto, la función es continua en el intervalo en el que está definida: [0, 5).

Pàgina 278

1. Calcula el valor dels límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3}{x-2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x - 1)$

a) $-\frac{3}{2}$

b) 0

2. Calcula aquests límits:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{x^2 - 3x + 5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0,1} \log_{10} x$

a) $\sqrt{3}$

b) -1

Pàgina 279

3. Calcula k per tal que la funció $y = f(x)$ siga contínua en \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} x^3 - 2x + k, & x \neq 3 \\ 7, & x = 3 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3} (x^3 - 2x + k) = 21 + k \\ f(3) = 7 \end{array} \right\} 21 + k = 7 \rightarrow k = -14$$

Pàgina 281

4. Calcula els límits de les funcions següents en els punts que s'indiquen. Allà on calga, especifica el valor del límit a l'esquerra i a la dreta del punt. Representa'n gràficament els resultats:

a) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 4}$ en -2 , 0 y 2

b) $f(x) = \frac{4x - 12}{(x - 2)^2}$ en 2 , 0 y 3

c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 2x - 3}$ en 1 y -3

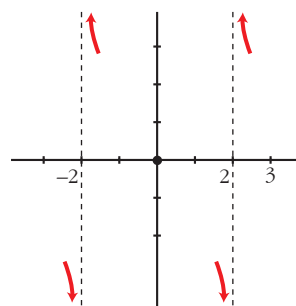
d) $f(x) = \frac{x^4}{x^3 + 3x^2}$ en 0 y -3

a) $f(x) = \frac{x^3}{(x + 2)(x - 2)}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f(x).$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

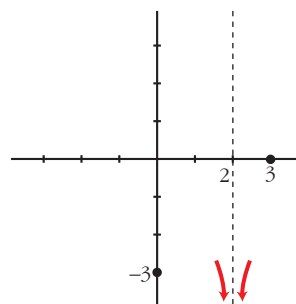


b) $f(x) = \frac{4(x - 3)}{(x - 2)^2}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -3$$

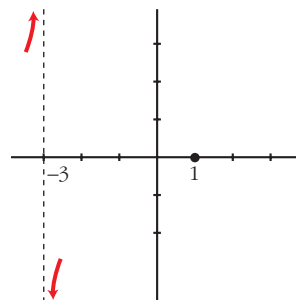
$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$



c) $f(x) = \frac{(x - 1)^2}{(x - 1)(x + 3)}$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

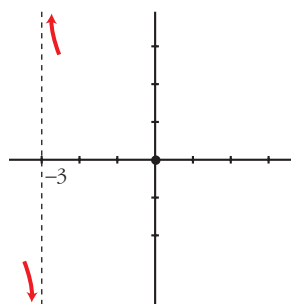
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$



$$d) f(x) = \frac{x^4}{x^2(x+3)}$$

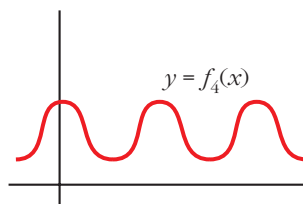
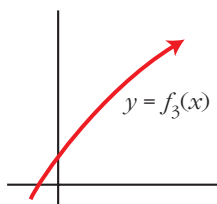
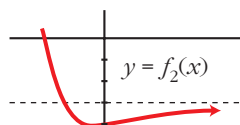
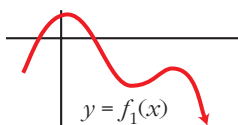
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -3} f(x).$$



Pàgina 282

1. Digues el límit quan $x \rightarrow +\infty$ de les funcions següents donades pels gràfics:



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) \text{ no existe.}$$

Pàgina 283

1. Digues el valor del límit quan $x \rightarrow +\infty$ de les funcions següents:

a) $f(x) = -x^2 + 3x + 5$

b) $f(x) = 5x^3 + 7x$

c) $f(x) = x - 3x^4$

d) $f(x) = \frac{1}{3x}$

e) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$

f) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) $-\infty$

d) 0

e) 0

f) $-\infty$

2. Com que $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 200x^2) = +\infty$, troba un valor de x per al qual siga $x^3 - 200x^2 > 1\,000\,000$.

Por ejemplo, para $x = 1000$, $f(x) = 800\,000\,000$.

3. Com que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 - 10x} = 0$, troba un valor de x per al qual siga:

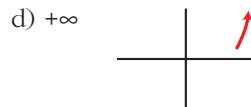
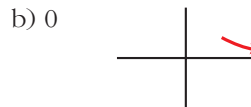
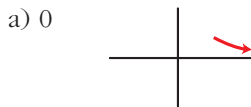
$$\frac{1}{x^2 - 10x} < 0,0001$$

Por ejemplo, para $x = 1000$, $f(x) = 0,000001$.

Pàgina 284

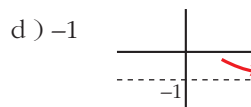
4. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i representa'n les branques:

a) $f(x) = \frac{1}{3x}$ b) $f(x) = \frac{3}{x}$ c) $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ d) $f(x) = 3x - 5$



5. Calcula $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ i representa'n les branques:

a) $f(x) = \frac{x^3 - 1}{-5}$ b) $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$ c) $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 3}$ d) $f(x) = \frac{1 - x^3}{1 + x^3}$



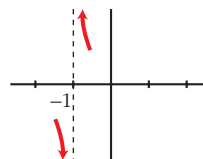
Pàgina 285

1. Troba les asímptotes verticals i situa la corba respecte d'elles:

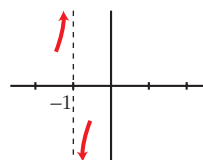
a) $y = \frac{x^2 + 3x + 11}{x + 1}$

b) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$



b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = -1 \text{ es asíntota vertical.}$

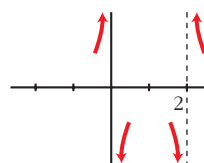


2. Troba les asímptotes verticals i situa la corba respecte d'elles:

a) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

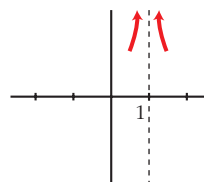
b) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} x = 0 \text{ es asíntota vertical.}$



$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 2 \text{ es asíntota vertical.}$

b) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \end{array} \right\} x = 1 \text{ es asíntota vertical.}$



Pàgina 287

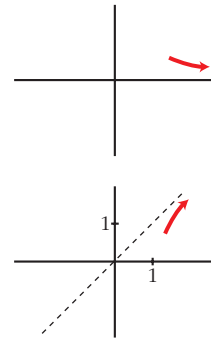
3. Troba les branques infinites, $x \rightarrow +\infty$, d'aquestes funcions. Situa'n la corba respecte de l'asíptota:

a) $y = \frac{x}{1+x^2}$

b) $y = \frac{x^3}{1+x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horitzontal.

b) $y = x + \frac{-x}{1+x^2} \rightarrow y = x$ es asíntota obliqua.



4. Troba les branques infinites, $x \rightarrow +\infty$, d'aquestes funcions. Situa'n la corba respecte de l'asíptota, si n'hi ha:

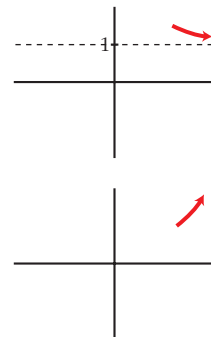
a) $y = \frac{x^2+2}{x^2-2x}$

b) $y = \frac{2x^3-3x^2+7}{x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horitzontal.

b) *grado de P* - *grado de Q* ≥ 2

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \rightarrow$ rama parabòlica hacia arriba.



Pàgina 288

1. Troba $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i representa-hi la branca corresponent:

$$f(x) = -2x^3 + 7x^4 - 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^4 = +\infty$$



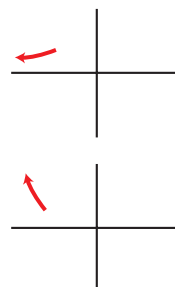
2. Troba $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ i traça-hi les branques corresponents:

a) $f(x) = (x^2 + 3)/(-x^3)$

b) $f(x) = -x^3/(x^2 + 3)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{-x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-x} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$



Pàgina 289

3. Troba les branques infinites, $x \rightarrow -\infty$, d'aquestes funcions, i situa-hi la corba respecte de les asímptotes:

a) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

b) $y = \frac{x}{1 + x^2}$

c) $y = \frac{x^2}{1 + x^2}$

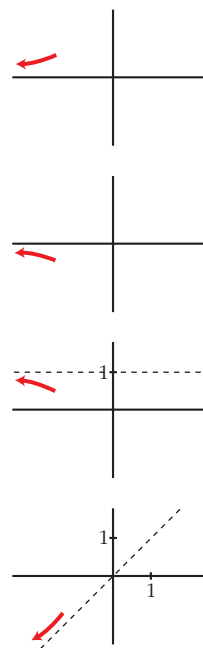
d) $y = \frac{x^3}{1 + x^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horitzontal.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \rightarrow y = 0$ es asíntota horitzontal.

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horitzontal.

d) $y = x + \frac{-x}{1 + x^2} \rightarrow y = x$ es asíntota obliqua.



4. Troba les branques infinites, quan $x \rightarrow -\infty$, i si tenen asímptotes, situa-hi la corba respecte a elles:

a) $y = \frac{x^4}{x^2 + 1}$

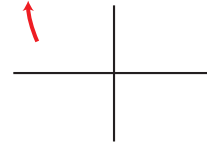
b) $y = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 2x}$

c) $y = \frac{x^2 + 3x}{x + 1}$

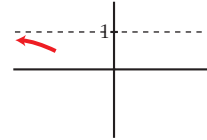
d) $y = \frac{2x^3 - 3x^2}{x}$

a) *grado P* – *grado Q* ≥ 2

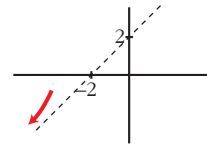
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \rightarrow \text{rama parabòlica.}$$



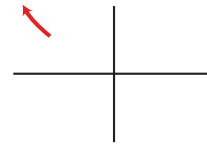
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \rightarrow y = 1$ es asíntota horizontal.



c) $y = x + 2 + \frac{-2}{x + 1} \rightarrow y = x + 2$ es asíntota oblicua.



d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 - 3x) = +\infty$

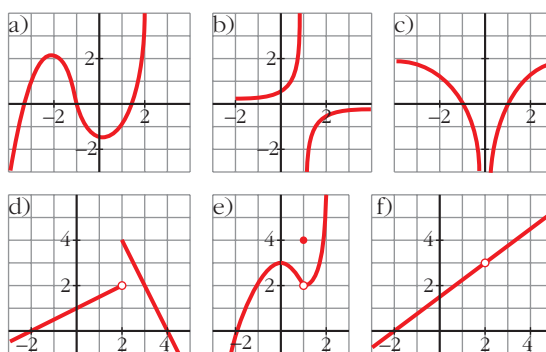


EXERCICIS I PROBLEMES PROPOSATS

PER A PRACTICAR

Discontinuitats i continuïtat

- 1 a) Quin dels gràfics següents correspon a una funció contínua?
 b) Assenyal, en cadascuna de les altres cinc, la raó de la discontinuïtat.



- a) Solo la a).
 b) b) Rama infinita en $x = 1$ (asíntota vertical).
 c) Rama infinita en $x = 0$ (asíntota vertical).
 d) Salto en $x = 2$.
 e) Punto desplazado en $x = 1$; $f(1) = 4$; $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.
 f) No está definida en $x = 2$.
- 2 Troba els punts de discontinuïtats, si n'hi ha, de les funcions següents:

a) $y = x^2 + x - 6$

b) $y = \frac{x}{(x-2)^2}$

c) $y = \frac{x-1}{2x+1}$

d) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \frac{2}{5x - x^2}$

f) $y = \frac{1}{x^2 + 2}$

- a) Continua.
 b) 2
 c) $-\frac{1}{2}$
 d) Continua.
 e) 0 y 5
 f) Continua.

3 Comprova si les funcions següents són contínues en $x = 0$ i en $x = -2$:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$

b) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$

c) $y = \sqrt{x^2 - 4}$

d) $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) No es continua ni en $x = 0$ ni en $x = -2$.

b) Sí es continua en $x = 0$, no en $x = -2$.

c) No es continua en $x = 0$, sí en $x = -2$.

d) Continua en $x = 0$ y en $x = -2$.

4 Indica per a quins valors de \mathbb{R} són contínues les funcions següents:

a) $y = 5 - \frac{x}{2}$

b) $y = \sqrt{x - 3}$

c) $y = \frac{1}{x}$

d) $y = \sqrt{-3x}$

e) $y = \sqrt{5 - 2x}$

f) $y = x^2 - x$

a) \mathbb{R}

b) $[3, +\infty)$

c) $\mathbb{R} - \{0\}$

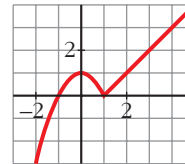
d) $(-\infty, 0]$

e) $(-\infty, \frac{5}{2}]$

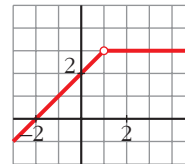
f) \mathbb{R}

5 Comprova que els gràfics d'aquestes funcions corresponen a l'expressió analítica donada i digues si són contínues o discontinües en $x = 1$.

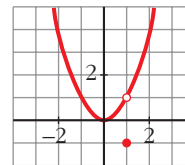
a) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 1 \\ 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$



c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Continua.

b) Discontinua.

c) Discontinua.

- 6 Comprova si la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ és contínua en $x = 0$.

Recorda que per tal que f siga contínua en $x = 0$, s'ha de verificar que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$$

Es continua en $x = 0$.

- 7 Comprova si les funcions següents són contínues en els punts que s'indiquen:

a) $f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2)-3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

a) No, pues no existe $f(-1)$.

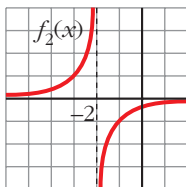
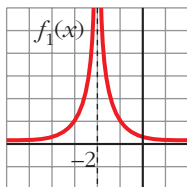
b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí es continua en $x = 2$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$. No es continua en $x = 1$.

Pàgina 296

Visió gràfica del límit

8



Aquests són, respectivament, els gràfics de les funcions:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \quad \text{y} \quad f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

Quin és el límit de cadascuna d'aquestes funcions quan $x \rightarrow -2$?

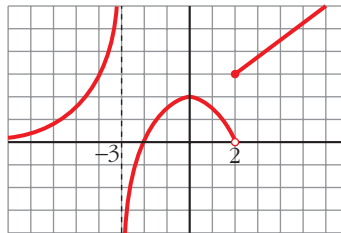
Observa la funció quan $x \rightarrow -2$ per l'esquerra i per la dreta.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_1(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f_1(x) = +\infty \end{array} \right\} \lim_{x \rightarrow -2} f_1(x) = +\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f_2(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{No existe } \lim_{x \rightarrow -2} f_2(x).$$

9 Sobre el gràfic de la funció $f(x)$, troba:

- a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$
 e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$ f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$ g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ h) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$



- a) $+\infty$ b) $-\infty$ c) 2 d) 0
 e) 0 f) 3 g) $+\infty$ h) 0

Límit en un punt

10 Calcula els límits següents:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$
 c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2}$ d) $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$
 e) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10 + x - x^2}$ f) $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$
 g) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$ h) $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$

- a) 5 b) 0 c) -2 d) $\sqrt{2}$
 e) 2 f) 2 g) 1 h) e^2

11 Donada la funció $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, troba:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

• Per tal que existisca límit en el punt de ruptura, n'han de ser iguals els límits laterals.

a) 5

b) 4

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$

12 Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$

c) $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{3b^3 - 2b^2}{b}$

d) $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2 - 7b}{4b}$

• Trau factor comú i simplifica cada fracció.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-2)} = -2$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+3)}{x} = 3$

c) $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2(3b-2)}{b} = 0$

d) $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b(b-7)}{4b} = -\frac{7}{4}$

13 Resol els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x + 2}{x^2 - 4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = \frac{3}{-1} = -3$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2+1)(x^2-1)}{x^2-1} = 2$

- 14** Calcula el límit de la funció $f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x}$ en $x = 3$, $x = 0$ i $x = -1$.

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{3}{4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

Límit quan $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

- 15** Calcula els límits següents i representa la informació que hi obtingues:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - x)^2$

• *Dóna a x "valors grans" i trau-ne conclusions.*

- 16** Calcula el límit de les funcions de l'exercici anterior quan $x \rightarrow -\infty$ i representa la informació que hi obtingues.

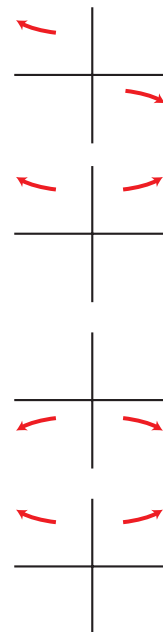
Resolució de los ejercicios 15 y 16:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 \right) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$



17 Comprova, donant valors grans a x , que les funcions següents tendixen a 0 quan $x \rightarrow +\infty$.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 10}$

b) $f(x) = \frac{100}{3x^2}$

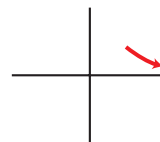
c) $f(x) = \frac{-7}{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = \frac{2}{10x^2 - x^3}$

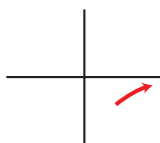
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



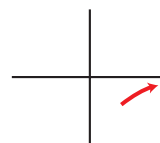
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



18 Calcula el límit quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$ de cadascuna de les funcions següents. Representa els resultats que hi obtingues.

a) $f(x) = x^3 - 10x$

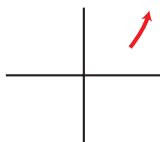
b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

c) $f(x) = \frac{3 - x}{2}$

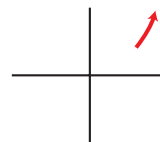
d) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{-3}$

Quando $x \rightarrow +\infty$:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



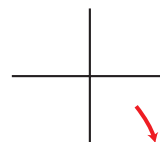
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

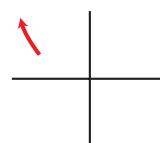


Quando $x \rightarrow -\infty$:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



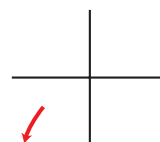
b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$



Pàgina 297

19 Calcula els límits següents i representa les branques que hi obtingues:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+5}{1-x}$

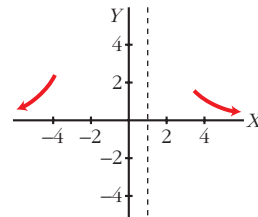
g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-3x}{x+3}$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3-2x}{5-2x}$

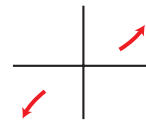
20 Calcula el límit de totes les funcions de l'exercici anterior quan $x \rightarrow -\infty$.

Resolució de los ejercicios 19 y 20:

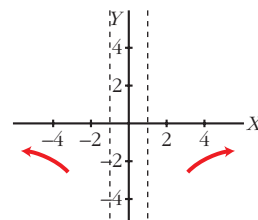
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{(x-1)^2} = 0$



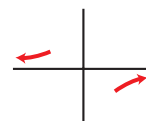
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^2}{3-x} = -\infty$



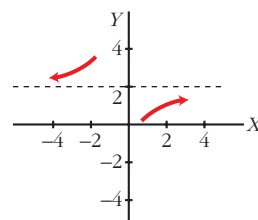
c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x^2-1} = 0$



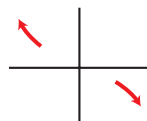
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{(2-x)^3} = 0$



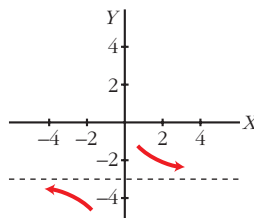
e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x+2} = 2$



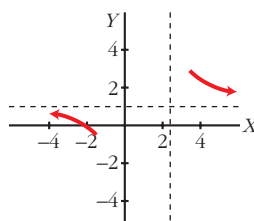
$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 5}{1 - x} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 5}{1 - x} = +\infty$$



$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - 3x}{x + 3} = -3; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2 - 3x}{x + 3} = -3$$



$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 2x}{5 - 2x} = 1; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x}{5 - 2x} = 1$$



21 Resol els límits següents:

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{(x-1)^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - (x-2)^2$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{(2x+1)^2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 + 1}{5x}$$

a) 3

b) $-\infty$

c) 0

d) $+\infty$

22 Calcula el límit quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$ de les funcions següents i representa les branques que hi obtingues:

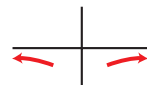
$$a) f(x) = \frac{-1}{x^2}$$

$$b) f(x) = 10x - x^3$$

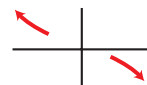
$$c) f(x) = \frac{x^2}{x-1}$$

$$d) f(x) = \frac{1 - 12x^2}{3x^2}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$



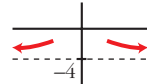
$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$



$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$



$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$$



Asíntotes

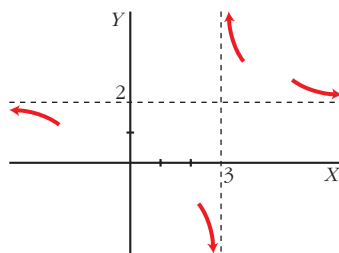
23 Troba les asíntotes de les funcions següents i situa la corba respecte a cadascuna d'elles:

a) $y = \frac{2x}{x-3}$

c) $y = \frac{2x+3}{4-x}$

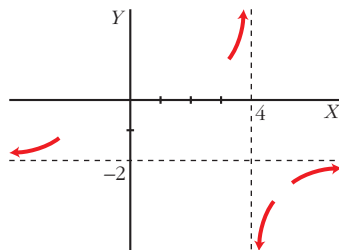
a) Asíntotas:

$x = 3; y = 2$



c) Asíntotas:

$x = 4; y = -2$

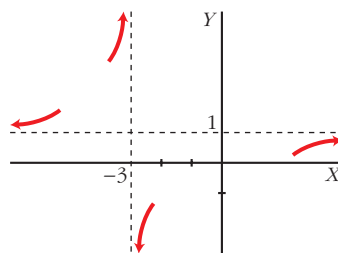


b) $y = \frac{x-1}{x+3}$

d) $y = \frac{2}{1-x}$

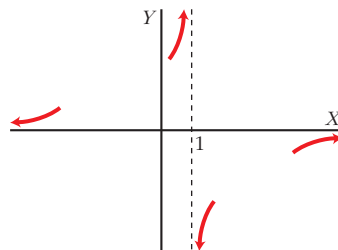
b) Asíntotas:

$x = -3; y = 1$



d) Asíntotas:

$x = 1; y = 0$

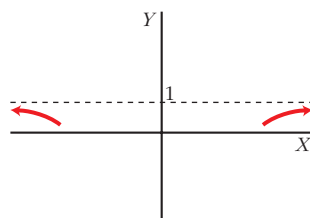


24 Troba les asíntotes de les funcions següents i situa la corba respecte d'elles:

a) $y = \frac{x^2}{x^2+4}$

c) $y = \frac{2x^2-1}{x^2}$

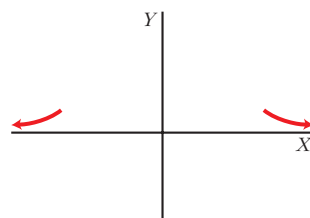
a) Asíntota: $y = 1$



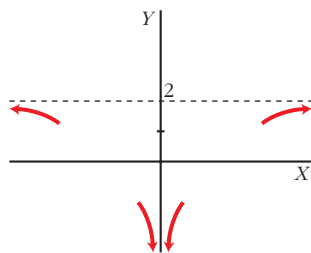
b) $y = \frac{3}{x^2+1}$

d) $y = \frac{x^4}{x-1}$

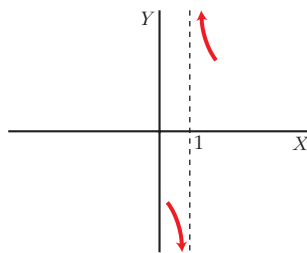
b) Asíntota: $y = 0$



c) Asíntotas: $x = 0$; $y = 2$



d) Asíntota: $x = 1$



25 Troba les asíntotes de les funcions següents i situa la corba respecte d'elles:

a) $f(x) = \frac{4x + 1}{2x - 3}$

b) $f(x) = \frac{3x}{2x - 5}$

c) $f(x) = \frac{1}{2 - x}$

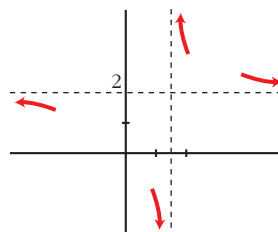
d) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 9}$

e) $f(x) = \frac{3x}{x^2 - 1}$

f) $f(x) = \frac{-1}{(x + 2)^2}$

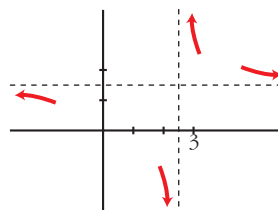
a) Asíntota vertical: $x = \frac{3}{2}$

Asíntota horizontal: $y = 2$



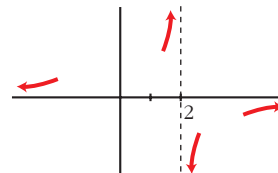
b) Asíntota vertical: $x = \frac{5}{2}$

Asíntota horizontal: $y = \frac{3}{2}$



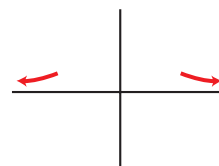
c) Asíntota vertical: $x = 2$

Asíntota horizontal: $y = 0$



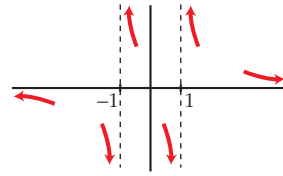
d) Asíntota vertical: $y = 0$

No tiene más asíntotas.



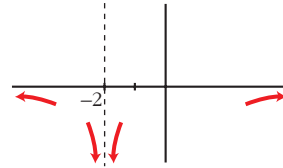
e) Asíntota vertical: $x = 1$, $x = -1$

Asíntota horitzontal: $y = 0$



f) Asíntota vertical: $x = -2$

Asíntota horitzontal: $y = 0$



26 Cadascuna de les funcions següents té una asímptotes obliqua. Troba-la i estudia la posició de la corba respecte d'ella:

a) $f(x) = \frac{3x^2}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{3+x-x^2}{x}$

c) $f(x) = \frac{4x^2-3}{2x}$

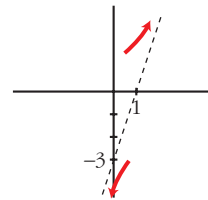
d) $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-3}$

e) $f(x) = \frac{2x^3-3}{x^2-2}$

f) $f(x) = \frac{-2x^2+3}{2x-2}$

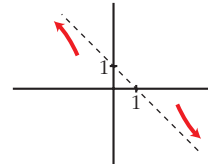
a) $\frac{3x^2}{x+1} = 3x - 3 + \frac{3}{x+1}$

Asíntota obliqua: $y = 3x - 3$



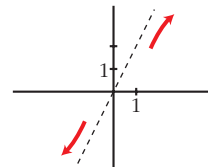
b) $\frac{3+x-x^2}{x} = -x + 1 + \frac{3}{x}$

Asíntota obliqua: $y = -x + 1$



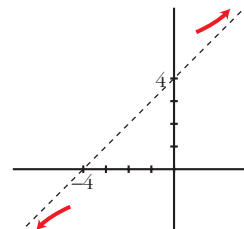
c) $\frac{4x^2-3}{2x} = 2x - \frac{3}{2x}$

Asíntota obliqua: $y = 2x$



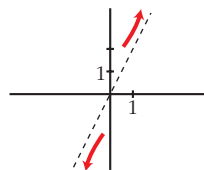
d) $\frac{x^2+x-2}{x-3} = x + 4 + \frac{10}{x-3}$

Asíntota obliqua: $y = x + 4$



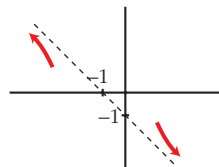
$$e) \frac{2x^3 - 3}{x^2 - 2} = 2x + \frac{4x - 3}{x^2 - 2}$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$



$$f) \frac{-2x^2 + 3}{2x - 2} = -x - 1 + \frac{1}{2x - 2}$$

Asíntota oblicua: $y = -x - 1$



PER A RESOLDRE

27 Calcula els límits de les funcions següents en els punts que n'anul·len el denominador:

$$a) f(x) = \frac{3x}{2x + 4}$$

$$b) f(x) = \frac{x - 1}{x^2 - 2x}$$

$$c) f(x) = \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4}$$

$$d) f(t) = \frac{t^3 - 2t^2}{t^2}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$b) f(x) = \frac{x - 1}{x(x - 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$$

$$c) f(x) = \frac{x(x - 2)}{(x - 2)(x + 2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}; \quad \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$d) f(t) = \frac{t^2(t - 2)}{t^2}; \quad \lim_{t \rightarrow 0} f(t) = -2$$

28 Troba les asíntotes de les funcions següents i situa la corba respecte de cadascuna d'elles:

$$a) y = \frac{(3 - x)^2}{2x + 1}$$

$$b) y = \frac{5x - 2}{2x - 7}$$

$$c) y = \frac{x + 2}{x^2 - 1}$$

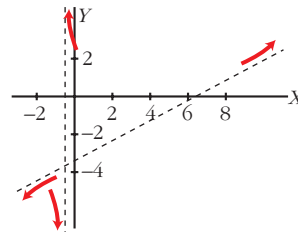
$$d) y = \frac{x^2}{x^2 + x + 1}$$

$$e) y = \frac{x^3}{x^2 - 4}$$

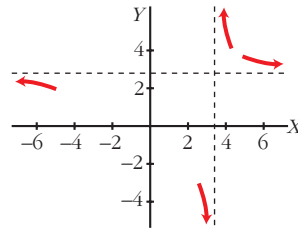
$$f) y = \frac{3x^2}{x + 2}$$

a) $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4} + \frac{49/4}{2x+1}$

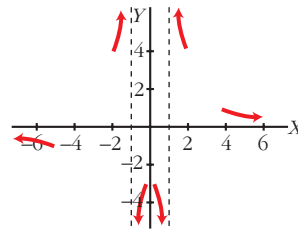
Asíntotas: $x = -\frac{1}{2}$; $y = \frac{1}{2}x - \frac{13}{4}$



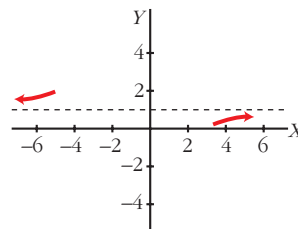
b) Asíntotas: $y = \frac{5}{2}$; $x = \frac{7}{2}$



c) Asíntotas: $y = 0$; $x = \pm 1$

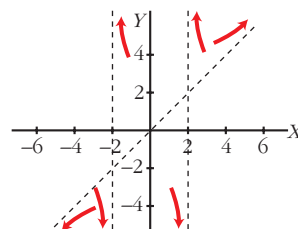


d) Asíntotas: $y = 1$

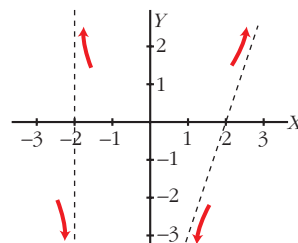


e) $y = x + \frac{4x}{(x+2)(x-2)}$

Asíntotas: $y = x$; $x = -2$, $x = 2$



f) Asíntotas: $x = -2$; $y = 3x - 6$



29 Troba les branques infinites d'aquestes funcions. Quan tinguin asímptotes, situa'n la corba:

a) $y = \frac{x^4 - 1}{x^2}$

b) $y = \frac{(x + 3)^2}{(x + 1)^2}$

c) $y = \frac{1}{9 - x^2}$

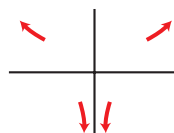
d) $y = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 1}$

e) $y = \frac{2x^2}{x + 3}$

f) $y = \frac{x^3}{2x - 5}$

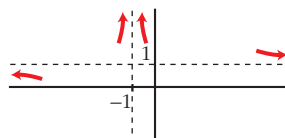
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = 0$



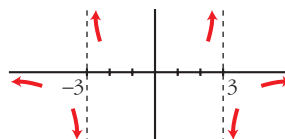
b) Asíntota vertical: $x = -1$

Asíntota horizontal: $y = 1$

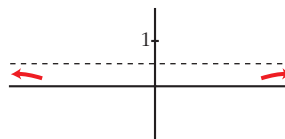


c) Asíntotas verticales: $x = 3$, $x = -3$

Asíntota horizontal: $y = 0$

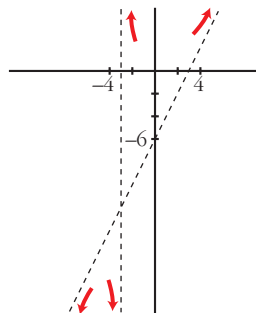


d) Asíntota horizontal: $y = \frac{1}{2}$



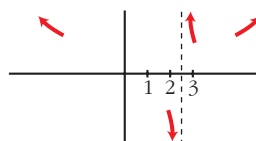
e) Asíntota vertical: $x = -3$

Asíntota oblicua: $y = 2x - 6$



f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota vertical: $x = \frac{5}{2}$



Pàgina 298

- 30** Prova que la funció $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 2x}$ només té una asymptota vertical i una altra horitzontal.

• Trobant $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ veuràs que no és ∞ .

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 2; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota horitzontal: $y = 1$

- 31** Calcula els límits següents i representa els resultats que hi obtingues:

a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$

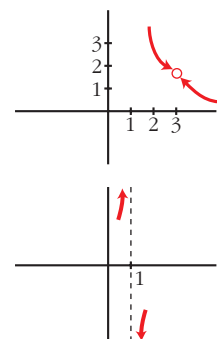
a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 3x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{x(x-3)} = \frac{5}{3}$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-2)(x-1)}{(x-1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-2}{x-1}$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x-2}{x-1} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x-2}{x-1} = -\infty$$

No existe $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 2x + 1}$



- 32** Calcula els límits següents i representa els resultats que hi obtingues:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1}$

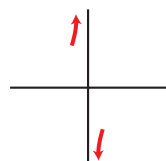
c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4}$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 2x}{x^3 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x-2)}{x^2(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{x(x+1)}$$

Calculamos los límites laterales:

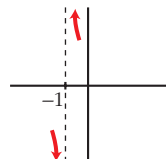
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x-2}{x(x+1)} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x(x+1)} = -\infty$$



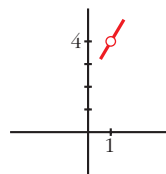
$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2(x+1)}{(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2}{x+1}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2}{x+1} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2}{x+1} = +\infty$$



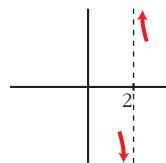
$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^3 + x^2 + x + 1)}{x - 1} = 4$$



$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 8}{x^2 - 4x + 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x-2)(x+2)}{(x-2)^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(x+2)}{x-2}$$

Calculamos los límites laterales:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2(x+2)}{x-2} = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2(x+2)}{x-2} = +\infty$$



33 Troba les asíntotes d'aquestes funcions:

$$\text{a) } y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$$

$$\text{b) } y = x^2 + \frac{1}{x}$$

$$\text{c) } y = \frac{2x^2 + 5}{x^2 - 4x + 5}$$

$$\text{d) } y = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

$$\text{e) } y = x + \frac{4}{x-5}$$

$$\text{f) } y = x + 1 + \frac{5}{x}$$

$$\text{a) } y = x + \frac{x}{(x-1)(x+1)}$$

b) Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntotas verticales: $x = -1, x = 1$

Asíntota oblicua: $y = x$

c) Asíntota horizontal: $y = 2$

d) Asíntota horizontal: $y = 0$

Asíntotas verticales: $x = \pm 1$

e) $x = 5, y = x$

f) Asíntota vertical: $x = 0$

Asíntota oblicua: $y = x + 1$

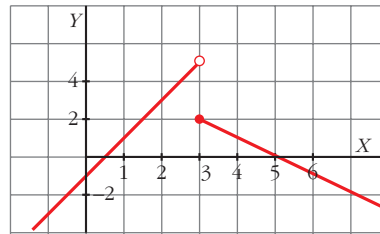
34 Representa les funcions següents i explica si són discontinües en algun punt:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & \text{si } x < 3 \\ 5 - x & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

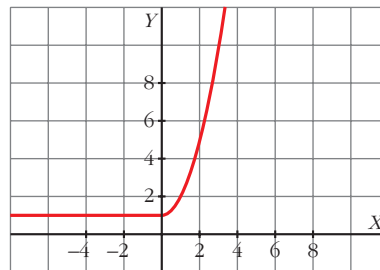
$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2 & \text{si } x < 2 \\ x & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

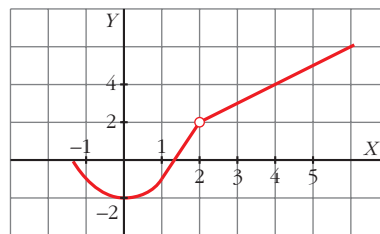
a) Discontinua en $x = 3$.



b) Funció contínua.



c) Discontinua en $x = 2$.



35 a) Calcula el límit de les funcions de l'exercici anterior en $x = -3$ i $x = 5$.

b) Troba, per a cadascuna d'elles, el límit quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$.

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = -7; \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 1; \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 26; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 7; \quad \lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

36 Calcula els límits quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$ de les funcions següents:

a) $f(x) = 2^{x-1}$

b) $f(x) = 0,75^x$

c) $f(x) = 1 + e^x$

d) $f(x) = 1/e^x$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

37 Troba les branques infinites de les funcions exponencials següents:

a) $y = 2^{x+3}$

b) $y = 1,5^x - 1$

c) $y = 2 + e^x$

d) $y = e^{-x}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

Asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$: $y = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$

Asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$: $y = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

Asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$: $y = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

Asíntota horizontal cuando $x \rightarrow -\infty$: $y = 0$

38 Calcula, per a cada cas, el valor de k per tal que la funció $f(x)$ siga contínua en tot \mathbb{R} .

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 3 \\ x + k & \text{si } x > 3 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 6 - (x/2) & \text{si } x < 2 \\ x^2 + kx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} (x^2 + x)/x & \text{si } x \neq 0 \\ k & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) $\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 5 = f(3) \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3 + k \end{array} \right\} 5 = 3 + k \rightarrow k = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4 + 2k = f(2) \end{array} \right\} 5 = 4 + 2k \rightarrow k = 1/2$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(x+1)}{x} = 1 \rightarrow k = 1$$

39 Estudia la continuïtat d'aquestes funcions:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{si } x < 1 \\ 1/x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -x-1 & \text{si } -1 \geq x \\ 1-x^2 & \text{si } -1 < x < 1 \\ x-1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} 1-x^2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 1 \rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

$x \neq 1 \rightarrow$ Continua

Es continua en \mathbb{R} .

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = 0 \rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0 \rightarrow \text{Continua en } x = 1$$

$x \neq 1$ y $x \neq -1 \rightarrow$ Continua

Es continua en \mathbb{R} .

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 \rightarrow \text{Discontinua en } x = 0$$

Si $x \neq 0$, es continua.

40 Calcula a per tal que les funcions següents siguin contínues en $x = 1$:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \leq 1 \\ 4-ax^2 & \text{si } x > 1 \end{cases} \quad \text{b) } f(x) = \begin{cases} (x^2-1)/(x-1) & \text{si } x \neq 1 \\ a & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2 = f(1) \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 - a \end{array} \right\} 2 = 4 - a \rightarrow a = 2$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{b) } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = 2 \\ f(1) = a \end{array} \right\} a = 2$$

41 En una empresa es fan muntatges en cadena. El nombre de muntatges realitzats per un treballador sense experiència depèn dels dies d'entrenament segons la funció $M(t) = \frac{30t}{t+4}$ (t en dies).

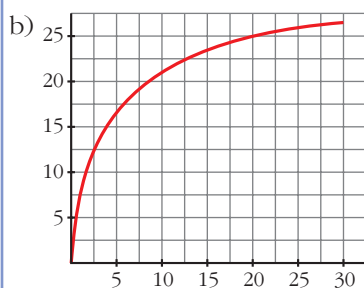
a) Quants muntatges realitza el primer dia? I el desé?

b) Representa la funció sabent que el període d'entrenament és d'un mes.

c) Què passaria amb el nombre de muntatges si l'entrenament fóra molt més llarg?

a) $M(1) = 6$ muntajes el primer día.

$M(10) = 21,43 \rightarrow 21$ muntajes el décimo día.



c) Se aproxima a 30 (pues $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{30t}{t+4} = 30$).

Pàgina 299

QÜESTIONS TEÒRIQUES

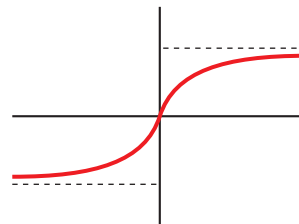
42 Podem calcular el límit d'una funció en un punt en què la funció no estiga definida? Pot ser la funció contínua en aquest punt?

Sí se puede calcular, pero no puede ser continua.

43 Pot tindre una funció més de dues asíptotes verticals? I més de dues asíptotes horitzontals? Posa'n exemples.

Sí. Por ejemplo, $f(x) = \frac{1}{x(x-1)(x-2)}$ tiene $x = 0$, $x = 1$ y $x = 2$ como asíptotas verticales.

No puede tener más de dos asíptotas horizontales, una hacia $+\infty$ y otra hacia $-\infty$, por ejemplo:



- 44** El denominador d'una funció $f(x)$ s'anul·la en $x = a$. Podem assegurar que té una asymptota vertical en $x = a$? Posa'n exemples.

No. Por ejemplo, $f(x) = \frac{3x^2 + x}{x}$ en $x = 0$; puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(3x + 1)}{x} = 1$$

- 45** Si $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$, podem afirmar que f és contínua en $x = 2$?

No. Para que fuera continua debería ser, además, $f(2) = 5$.

- 46** Representa una funció que verifiqui aquestes condicions. És discontinua en algun punt?

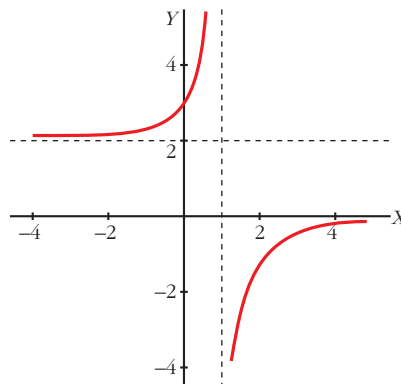
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$$

Es discontinua en $x = 1$.



PER A APROFUNDIR-HI

- 47** Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+4}}$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x+3}{x-2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1} = \sqrt{1} = 1$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - 1}{\sqrt{x^2 + 4}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{|x|} = 3$$

48 Troba un valor de x per al qual $f(x) = \frac{1}{3x - 5}$ siga menor que 0,001.

Por ejemplo, para $x = 1000$, $f(x) = 0,00033$.

49 Troba els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2^x - x^3)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x}$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (0,75^x - x)$

a) $-\infty$

b) $+\infty$

c) 0

d) $+\infty$

50 Quina és l'asíntota vertical d'aquestes funcions logarítmiques? Troba'n el límit quan $x \rightarrow +\infty$:

a) $y = \log_2(x - 3)$

b) $y = \ln(x + 2)$

a) Asíntota vertical: $x = 3$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

b) Asíntota vertical: $x = -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Pàgina 299

AUTOAVALUACIÓ

1. Calcula el límit de $f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$ en els punts d'abscisses 0, 3 i 5.

Digues si la funció és contínua en aquests punts.

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 5, & x \leq 3 \\ x^2 - x - 7, & x > 3 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2 \cdot 0 - 5 = -5$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2 \cdot 3 - 5 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 3^2 - 3 - 7 = -1 \end{array} \right\} \text{ No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} f(x) = 5^2 - 5 - 7 = 13$$

Es continua en $x = 0$ y en $x = 5$. No es continua en $x = 3$, porque no tiene límite en ese punto.

2. Troba els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{x-1}$

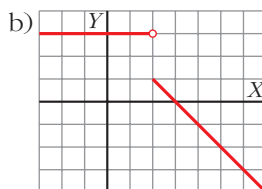
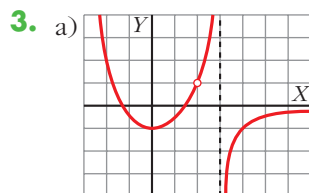
b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} 2^{x-1} = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{1}{\sqrt{x+4}} = \frac{1}{\sqrt{9}} = \frac{1}{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x-4)^2} = +\infty$ (Si $x \rightarrow 4^+$ o si $x \rightarrow 4^-$, los valores de la función son positivos).



Sobre el gràfic d'aquestes dues funcions, troba, per a cada cas, els límits següents

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x);$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \end{array} \right\} \text{ No tiene límite en } x = 3.$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \text{ No tiene límite en } x = 2.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$$

- 4. Troba les asíntotes de la funció $f(x) = \frac{4x^2}{x^2 - 2x}$ i estudia la posició de la corba respecte d'elles.**

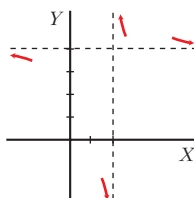
$$\text{Simplificamos: } \frac{4x^2}{x^2 - 2x} = \frac{4x}{x - 2} \rightarrow y = \frac{4x}{x - 2}$$

- Asíntota vertical: $x = 2$

$$\text{Posición } \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{4x}{x - 2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{4x}{x - 2} = +\infty \end{array} \right.$$

- Asíntota horizontal: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4x}{x - 2} = 4; y = 4$

$$\text{Posición } \left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty, y > 4 \\ x \rightarrow -\infty, y < 4 \end{array} \right.$$



5. Justifica quin valor ha de prendre a per tal que la funció siga contínua en \mathbb{R} :

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} ax - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ 4x - 2a & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

La funció es contínua per valors de x menors que 1 i majors que 1, perquè ambos trams són rectes.

Perquè sigui contínua en $x = 1$, ha de complir-se: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

$$f(1) = a - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = a - 2 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4 - 2a \end{array} \right\}$$

Perquè existeixi el límit, ha de ser:

$$a - 2 = 4 - 2a \rightarrow 3a = 6 \rightarrow a = 2$$

6. Troba el límit de $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6}$ quan $x \rightarrow 3$; $x \rightarrow 2$; $x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$ i representa la informació que hi obtingues.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \frac{0}{0}$$

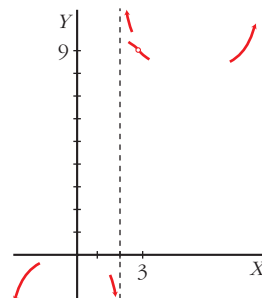
$$\text{Simplifiquem: } \frac{x^2(x-3)}{(x-2)(x-3)} = \frac{x^2}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x-2} = 9$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2}{x-2} \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \end{array} \right.$$

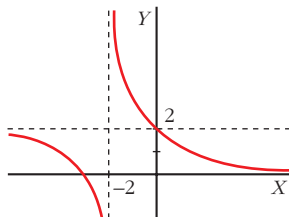
$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x-2} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3 - 3x^2}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x-2} = -\infty$$



7. Representa una funció que complisca les condicions següents:

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$



8. Estudia les branques infinites de $f(x) = \frac{2x^3}{x^2 + 4}$ i situa'n la corba respecte de l'asíntota.

No tiene asíntotas verticales porque $x^2 + 4 \neq 0$ para cualquier valor de x .

No tiene asíntotas horizontales porque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 4} = +\infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{x^2 + 4} = -\infty$.

Tiene una asíntota oblicua, porque el grado del numerador es una unidad mayor que el del denominador.

$$\frac{2x^3}{x^2 + 4} = \frac{-2x^3 - 8x}{-8x} = 2x - \frac{8x}{x^2 + 4}$$

$$y = \frac{2x^3}{x^2 + 4} = 2x - \frac{8x}{x^2 + 4}$$

Asíntota oblicua: $y = 2x$

Posición $\begin{cases} x \rightarrow +\infty & \text{curva} < \text{asíntota} \\ x \rightarrow -\infty & \text{curva} > \text{asíntota} \end{cases}$

