

Solucions Polinomis

1. Simplifica:

a) $5x^2 + 7x^2 - 2x^2 = \boxed{10x^2}$

b) $-6x^3y + 3x^3y + x^3y = \boxed{-2x^3y}$

c) $(4x^5) \cdot (-2x^6) = \boxed{-8x^{11}}$

d) $(6x^4) : (2x^3) = \boxed{3x}$

e) $(5x^7) : (3x^3) = \boxed{\frac{5}{3}x^4}$

f) $(-3x^7)^2 = \boxed{9x^{14}}$

g) $\left(\frac{5}{2}x^3\right)^4 = \boxed{\frac{625}{16}x^{12}}$

2. Calcula el valor numèric dels polinomis $P(x) = -x^2 + 3x - 5$ quan x pren els valors:

a) $P(0) = -0^2 + 3 \cdot 0 - 5 \rightarrow \boxed{P(0) = -5}$

b) $P(1) = -1^2 + 3 \cdot 1 - 5 \rightarrow \boxed{P(1) = -3}$

c) $P(2) = -2^2 + 3 \cdot 2 - 5 \rightarrow \boxed{P(2) = -3}$

d) $P(-3) = -(-3)^2 + 3 \cdot (-3) - 5 \rightarrow \boxed{P(-3) = -23}$

e) $P(-5) = -(-5)^2 + 3 \cdot (-5) - 5 \rightarrow \boxed{P(-5) = -45}$

3. Donats els polinomis $P(x) = 2x - 7$, $Q(x) = x^2 - x + 1$ i $R(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 3$, calcula:

a) $Q(x) + P(x) = (x^2 - x + 1) + (2x - 7) \rightarrow \boxed{Q(x) + P(x) = x^2 + x - 6}$

b) $R(x) - Q(x) = (4x^3 - 5x^2 + x - 3) - (x^2 - x + 1) = 4x^3 - 5x^2 + x - 3 - x^2 + x - 1 \rightarrow$
 $\boxed{R(x) - Q(x) = 4x^3 - 6x^2 + 2x - 4}$

c) $R(x) - x \cdot Q(x) = (4x^3 - 5x^2 + x - 3) - x \cdot (x^2 - x + 1) \rightarrow$
 $(4x^3 - 5x^2 + x - 3) - (x^3 - x^2 + x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 3 - x^3 + x^2 - x \rightarrow$
 $\boxed{R(x) - x \cdot Q(x) = 3x^3 - 4x^2 - 3}$

d) $Q(x) \cdot P(x) = (x^2 - x + 1) \cdot (2x - 7) = 2x^3 - 7x^2 - 2x^2 + 7x + 2x - 7 \rightarrow$
 $\boxed{Q(x) \cdot P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 9x - 7}$

e) $P(x) \cdot R(x) = (2x - 7) \cdot (4x^3 - 5x^2 + x - 3) \rightarrow$
 $8x^4 - 10x^3 + 2x^2 - 6x - 28x^3 + 35x^2 - 7x + 21 \rightarrow$
 $\boxed{P(x) \cdot R(x) = 8x^4 - 38x^3 + 37x^2 - 13x + 21}$

- f) $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x) = (2x-7) \cdot (x^2-x+1) \cdot (4x^3-5x^2+x-3) \rightarrow$
 $(2x^3-9x^2+9x-7) \cdot (4x^3-5x^2+x-3) \rightarrow$
 $8x^6-10x^5+2x^4-6x^3-36x^5+45x^4-9x^3+27x^2+36x^4-45x^3+9x^2-27x-28x^3+35x^2-7x+21$
 $P(x) \cdot Q(x) \cdot R(x) = 8x^6-46x^5+83x^4-88x^3+71x^2-34x+21$
- g) $R(x) - P(x) \cdot Q(x) = (4x^3-5x^2+x-3) - (2x-7) \cdot (x^2-x+1) \rightarrow$
 $(4x^3-5x^2+x-3) - (2x^3-9x^2+9x-7) = 4x^3-5x^2+x-3-2x^3+9x^2-9x+7 \rightarrow$
 $R(x) - P(x) \cdot Q(x) = 2x^3+4x^2-8x+4$
- h) $(P(x))^2 = (2x-7)^2 = (2x)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (-7) + (-7)^2 \rightarrow$
 $(P(x))^2 = 4x^2 - 28x + 49$
- i) $(Q(x))^2 = (x^2-x+1)^2 = (x^2-x+1) \cdot (x^2-x+1) \rightarrow$
 $x^4-x^3+x^2-x^3+x^2-x+x^2-x+1 \rightarrow (Q(x))^2 = x^4-2x^3+3x^2-2x+1$

4. Desenvolupa les següents expressions utilitzant les fórmules corresponents a les identitats notables:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a+b) \cdot (a-b) = a^2 - b^2$$

- a) $(x+7)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 7 + 7^2 \rightarrow (x+7)^2 = x^2 + 14x + 49$
- b) $(5x+2)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 2 + 2^2 \rightarrow (5x+2)^2 = 25x^2 + 20x + 4$
- c) $(-3x+1)^2 = (-3x)^2 + 2 \cdot (-3x) \cdot 1 + 1^2 \rightarrow (-3x+1)^2 = 9x^2 - 6x + 1$
- d) $(2x^3+5)^2 = (2x^3)^2 + 2 \cdot 2x^3 \cdot 5 + 5^2 \rightarrow (2x^3+5)^2 = 4x^6 + 20x^3 + 25$
- e) $(x+3) \cdot (x-3) = x^2 - 3^2 \rightarrow (x+3) \cdot (x-3) = x^2 - 9$
- f) $(x+5) \cdot (x-5) = x^2 - 5^2 \rightarrow (x+5) \cdot (x-5) = x^2 - 25$
- g) $(x^2-1) \cdot (x^2+1) = (x^2)^2 - 1^2 \rightarrow (x^2-1) \cdot (x^2+1) = x^4 - 1$
- h) $(7x-2) \cdot (7x+2) = (7x)^2 - 2^2 \rightarrow (7x-2) \cdot (7x+2) = 49x^2 - 4$

5. Factoritza els següents polinomis. Per fer-ho utilitza la tècnica del factor comú i les identitats notables.

a) $x^2 - 7x = x \cdot (x-7)$

b) $x^2 - 16 = x^2 - 4^2 \rightarrow x^2 - 16 = (x+4) \cdot (x-4)$

- c) $x^2 - 5x + 6 \rightarrow$ No es pot treure factor comú ni es poden aplicar identitats notables perquè 6 no és cap quadrat perfecte $6 = ?^2$
Aquest polinomi només es podria descomposar calculant les seves arrels, es a dir, resolent l'equació de segon grau $x^2 - 5x + 6 = 0 \rightarrow x_1 = 2 \wedge x_2 = 3$ Per tant,

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2) \cdot (x - 3)$$
- d) $x^2 + 10x + 25 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 5 + 5^2 \rightarrow$
$$x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^2$$
- e) $4x^2 - 4x + 1 = (2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot (-1) + (-1)^2 \rightarrow$
$$4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$$

També.

$$4x^2 - 4x + 1 = (-2x)^2 + 2 \cdot (-2x) \cdot 1 + 1^2 \rightarrow$$

$$4x^2 - 4x + 1 = (-2x + 1)^2$$

Com és que té dues descomposicions diferents? Envieu-me un correu amb la resposta.
- f) $4x^3 - 7x + 3 \rightarrow$ No es pot treure factor comú ni es poden aplicar identitats notables perquè ni $4x^3$ ni 3 són quadrats perfectes.
Aquest polinomi només es podria descomposar calculant les seves arrels, es a dir, resolent l'equació de tercer grau $4x^3 - 7x + 3$ que s'hauria de fer combinant Ruffini amb l'equació de segon grau. Per tant,

$$4x^3 - 7x + 3 = 4 \cdot (x - 1) \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(x + \frac{3}{2}\right) = (x - 1) \cdot (2x - 1) \cdot (2x + 3)$$
- g) $6x^2 - x - 2 \rightarrow$ No es pot treure factor comú ni es poden aplicar identitats notables perquè ni $6x^2$ ni 2 són quadrats perfectes, a més, el 2 és negatiu i en una identitat notable només pot ser negatiu el terme mig.
Aquest polinomi només es podria descomposar calculant les seves arrels, es a dir, resolent l'equació de segon grau $6x^2 - x - 2 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{2}{3} \wedge x_2 = -\frac{1}{2}$ Per tant,

$$6x^2 - x - 2 = 6 \cdot \left(x - \frac{2}{3}\right) \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right) = (3x - 2) \cdot (2x + 1)$$
- h) $6x^3 - x^2 - 2x = x \cdot (6x^2 - x - 2) \rightarrow$ Aquesta seria la descomposició bàsica utilitzant només factor comú però la podríem millorar descomposant el polinomi de segon grau com a l'apartat anterior. D'aquesta forma quedaria,

$$6x^3 - x^2 - 2x = x \cdot (3x - 2) \cdot (2x + 1)$$
- i) $2x^2 - 3x + 1 \rightarrow$ No es pot treure factor comú ni es poden aplicar les identitats notables perquè $2x^2$ no és un quadrat perfecte.
Aquest polinomi només es pot descompondre calculant les seves arrels, es a dir, resolent l'equació de segon grau $2x^2 - 3x + 1 = 0 \rightarrow x_1 = \frac{1}{2} \wedge x_2 = 1$ Per tant,

$$2x^2 - 3x + 1 = 2 \cdot \left(x - \frac{1}{2}\right) \cdot (x - 1) = (2x - 1) \cdot (x - 1)$$

- j) $x^3 - 2x^2 - x + 2 \rightarrow$ No es pot treure factor comú ni es poden aplicar les identitats nobles perquè és un polinomi de tercer grau. Aquest polinomi només es pot descompondre calculant les seves arrels, es a dir, resolent l'equació $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ que s'hauria de fer amb Ruffini. Per tant,
- $$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x - 2) \cdot (x + 1) \cdot (x - 1)$$

6. Simplifica les fraccions algebraiques següents factoritzant els polinomis com a l'exercici anterior.

a)
$$\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{x \cdot (x^2 - x - 2)}{x \cdot (x^2 + 3x + 2)} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2}$$

Aquesta seria la simplificació més fàcil utilitzant únicament factor comú però si, com a l'exercici anterior, descomposeu els polinomis que queden a partir de les seves arrels trobareu el següent:

$$\frac{x^2 - x - 2}{x^2 + 3x + 2} = \frac{(x + 1) \cdot (x - 2)}{(x + 1) \cdot (x + 2)} = \frac{x - 2}{x + 2}$$

Per tant,
$$\frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^3 + 3x^2 + 2x} = \frac{x - 2}{x + 2}$$

b)
$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} = \frac{x^2 - 3^2}{x^2 + 2 \cdot x \cdot 3 + 3^2} = \frac{(x + 3) \cdot (x - 3)}{(x + 3)^2} = \frac{x - 3}{x + 3}$$

Per tant,
$$\frac{x^2 - 9}{x^2 + 6x + 9} = \frac{x - 3}{x + 3}$$

c)
$$\frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{x \cdot (x + 1)}{x \cdot (x - 1)} = \frac{x + 1}{x - 1} \rightarrow \frac{x^2 + x}{x^2 - x} = \frac{x + 1}{x - 1}$$

d)
$$\frac{x^3 + 4x}{x^3 - 4x} = \frac{x \cdot (x^2 + 4)}{x \cdot (x^2 - 4)} = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

El numerador de la fracció, $x^2 + 4$, no es pot descompondre més ja que l'equació $x^2 + 4 = 0$ no té cap solució. Per tant, la fracció no es pot simplificar més i queda

$$\frac{x^3 + 4x}{x^3 - 4x} = \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4}$$

e)
$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6}$$

Els polinomis que formen aquesta fracció no es poden descompondre ni treien factor comú ni utilitzant les identitats notables. Per tant, l'única forma d'intentar simplificar la fracció és descompondre els polinomis utilitzant Ruffini.

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{(x + 3) \cdot (x - 2) \cdot (x + 1)}{(x + 3) \cdot (x + 2) \cdot (x - 1)} = \frac{(x - 2) \cdot (x + 1)}{(x + 2) \cdot (x - 1)}$$

I si tornem a simplificar els productes que apareixen quedaria,

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x^3 + 4x^2 + x - 6} = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x - 2}$$

$$f) \quad \frac{x^4 + 2x^3 - 35x^2}{x^3 + 3x^2 - 28x} = \frac{x^2 \cdot (x^2 + 2x - 35)}{x \cdot (x^2 + 3x - 28)} = \frac{x \cdot (x^2 + 2x - 35)}{x^2 + 3x - 28}$$

Si descomposeu els polinomis de segon grau que queden mitjançant l'equació de segon grau trobareu que encara es pot simplificar més la fracció.

$$\frac{x \cdot (x^2 + 2x - 35)}{x^2 + 3x - 28} = \frac{x \cdot (x+7) \cdot (x-5)}{(x+7) \cdot (x-4)} = \frac{x \cdot (x-5)}{x-4}$$

I si tornem a simplificar el producte que encara apareix quedaria,

$$\boxed{\frac{x^4 + 2x^3 - 35x^2}{x^3 + 3x^2 - 28x} = \frac{x^2 - 5x}{x-4}}$$

$$g) \quad \frac{2x^2 - x - 1}{2x^2 + 7x + 3}$$

Els polinomis que componen aquesta fracció només es poden factoritzar mitjançant l'equació de segon grau.

$$\frac{2x^2 - x - 1}{2x^2 + 7x + 3} = \frac{(2x+1) \cdot (x-1)}{(2x+1) \cdot (x+3)} = \frac{x-1}{x+3}$$

Per tant,

$$\boxed{\frac{2x^2 - x - 1}{2x^2 + 7x + 3} = \frac{x-1}{x+3}}$$

$$h) \quad \frac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 + 8x + 3}$$

El numerador es pot factoritzar utilitzant les identitats notables però el denominador només amb l'equació de segon grau.

$$\frac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 + 8x + 3} = \frac{(2x)^2 + 2 \cdot 2x \cdot 3 + 3^2}{(2x+3) \cdot (2x+1)} = \frac{(2x+3)^2}{(2x+3) \cdot (2x+1)} = \frac{2x+3}{2x+1}$$

Per tant,

$$\boxed{\frac{4x^2 + 12x + 9}{4x^2 + 8x + 3} = \frac{2x+3}{2x+1}}$$