

Identitats Notables

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Quan ens trobem una expressió en la que s'ha de calcular el quadrat d'una suma podem utilitzar aquesta fórmula. A continuació es mostren uns exemples en els que heu de parar especial atenció a l'ús dels parèntesis:

1.
$$(x + 4)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot 4 + 4^2$$
$$(x + 4)^2 = x^2 + 8x + 16$$

2.
$$(x - 6)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot (-6) + (-6)^2$$
$$(x - 6)^2 = x^2 - 12x + 36$$

3.
$$(-3x + 5)^2 = (-3x)^2 + 2 \cdot (-3x) \cdot 5 + 5^2$$
$$(-3x + 5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$$

4.
$$(-7x^2 - x)^2 = (-7x^2)^2 + 2 \cdot (-7x^2) \cdot (-x) + (-x)^2$$
$$(-7x^2 - x)^2 = 49x^4 + 14x^3 + x^2$$

Exercicis

Desenvolupa les següents expressions:

1. $(x + 3)^2 =$

2. $(x + 1)^2 =$

3. $(2x + 5)^2 =$

4. $(3x + 4)^2 =$

5. $(x - 2)^2 =$

6. $(x - 7)^2 =$

7. $(6x - 1)^2 =$

8. $(-2x + 3)^2 =$

9. $(-x + 5)^2 =$

10. $(9x^2 - 2)^2 =$

11. $(5x^3 + 6x)^2 =$

12. $(-4x - 3)^2 =$

13. $(5x + 2)^2 =$

14. $(3x - 6)^2 =$

15. $(2x + 1)^2 =$

16. $(-4x^3 - x^5)^2 =$

17. $(x + 2)^2 =$

18. $(-3 + x)^2 =$

19. $(x - 3)^2 =$

20. $(x - 1)^2 =$

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Qualsevol fórmula es pot llegir en els dos sentits. En aquest cas això implica que també podem identificar un polinomi amb una identitat notable si compleix certes condicions.

Com podeu veure a la fórmula aquestes condicions són que continguin dos quadrats i que el tercer terme sigui el doble del producte d'aquests dos termes. Procedim així:

1. Identificar els quadrats i, en conseqüència, a i b.
2. Comprovar si el terme que queda coincideix amb el resultat de $2 \cdot a \cdot b$.
3. Escrivim la identitat notable.

Fixeu-vos en els següents exemples:

1. $x^2 + 6x + 9$

Primer, trobem a i b

$$x^2 = (x)^2 \Rightarrow a = x$$

$$9 = 3^2 \Rightarrow b = 3$$

Segon, comprovem si $6x = 2ab$

$$2ab = 2 \cdot x \cdot 3 = 6x$$

Tercer, escrivim la identitat notable.

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$$

2. $9x^2 + 30x + 25$

Primer, trobem a i b

$$9x^2 = (3x)^2 \Rightarrow a = 3x$$

$$25 = 5^2 \Rightarrow b = 5$$

Segon, comprovem si $30x = 2ab$

$$2ab = 2 \cdot 3x \cdot 5 = 30x$$

Tercer, escrivim la identitat notable.

$$9x^2 + 30x + 25 = (3x + 5)^2$$

3. $4x^4 - 28x^3 + 49x^2$

Primer, trobem a i b

$$4x^4 = (2x^2)^2 \Rightarrow a = 2x^2$$

$$49x^2 = (7x)^2 \Rightarrow b = 7x$$

Segon, comprovem si $-28x^3 = 2ab$

$$2ab = 2 \cdot 2x^2 \cdot 7x = 28x^3$$

Quan passa això vol dir que a o b han de ser negatives. Normalment escollim la b. Aleshores, podem pensar que $49x^2 = (-7x)^2 \Rightarrow b = -7x$

$$\text{Ara, } 2ab = 2 \cdot 2x^2 \cdot (-7x) = -28x^3$$

Tercer, escrivim la identitat notable.

$$4x^4 - 28x^3 + 49x^2 = (2x^2 - 7x)^2$$

4. $x^2 + 10x - 25$

Primer, trobem a i b

$$x^2 = (x)^2 \Rightarrow a = x$$

$-25 \Rightarrow$ No hi ha cap nombre que al quadrat sigui negatiu, per això aquest polinomi no pot expressar-se com una identitat notable.

5. $x^2 + 6x + 36$

Primer, trobem a i b

$$x^2 = (x)^2 \Rightarrow a = x$$

$$36 = 6^2 \Rightarrow b = 6$$

Segon, comprovem si $6x = 2ab$

$$2ab = 2 \cdot x \cdot 6 = 12x \neq 6x$$

No es compleix la segona condició, per això aquest polinomi no pot expressar-se com una identitat notable.

Exercicis

Identifica els següents polinomis amb una identitat notable sempre que sigui possible:

1. $x^2 + 2x + 1$

7. $x^2 - 6x + 9$

2. $x^2 + 14x + 49$

8. $x^2 - 8x + 16$

3. $x^2 + 22x + 121$

9. $x^2 - 12x + 36$

4. $x^2 + 4x + 4$

10. $x^2 - 18x + 81$

5. $x^2 + 16x + 64$

11. $4x^2 + 4x + 1$

6. $x^2 - 10x + 25$

12. $4x^2 + 12x + 9$

13. $25x^2 - 40x + 16$

19. $x^2 - 2x + 1$

14. $49x^2 - 14x + 1$

20. $x^2 - 2x - 1$

15. $16x^2 - 24x + 9$

21. $9x^2 + 12x + 4$

16. $2x^2 - 4x + 1$

22. $5x^2 - 10x + 1$

17. $4x^6 + 20x^3 + 25$

23. $49x^6 - 42x^4 + 9x^2$

18. $x^2 + x + 1$

24. $25x^2 - 30x + 9$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Quan es multiplica la mateixa expressió sumada i restada, el resultat és simplement la diferència dels quadrats. Tingueu en compte que a la multiplicació no importa l'ordre. A continuació es mostren uns exemples:

$$\begin{aligned} 1. \quad (x + 2)(x - 2) &= x^2 - 2^2 \\ (x + 2)(x - 2) &= x^2 - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \quad (x - 5)(x + 5) &= x^2 - 5^2 \\ (x - 5)(x + 5) &= x^2 - 25 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3. \quad (2x + 3)(2x - 3) &= (2x)^2 - 3^2 \\ (2x + 3)(2x - 3) &= 4x^2 - 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4. \quad (-x + 7)(x + 7) &= (7 - x)(7 + x) = 7^2 - x^2 \\ (-x + 7)(x + 7) &= 49 - x^2 \end{aligned}$$

Exercicis

Desenvolupa les següents expressions:

$$1. \quad (x + 1)(x - 1) =$$

$$2. \quad (2x + 5)(2x - 5) =$$

$$3. \quad (x - 3)(x + 3) =$$

$$4. \quad (x + 6)(x - 6) =$$

$$5. \quad (x + 8)(x - 8) =$$

$$6. \quad (5x - 1)(5x + 1) =$$

$$7. \quad (x + 11)(x - 11) =$$

$$8. \quad (x + 4)(x - 4) =$$

$$9. \quad (x + 7)(x - 7) =$$

$$10. \quad (3x - 1)(3x + 1) =$$

$$11. \quad (-x + 9)(x + 9) =$$

$$12. \quad (x + 10)(-x + 10) =$$

$$13. \quad (7x + 2)(-7x + 2) =$$

$$14. \quad (-x + 5)(-x + 5) =$$

$$15. \quad (4x^3 - 7)(4x^3 + 7) =$$

$$16. \quad (2x^4 + 3x)(2x^4 - 3x) =$$

$$17. \quad (3x^2 + 2)(3x^2 + 2) =$$

$$18. \quad (5x - 1)(5x + 1) =$$

$$19. \quad (x^5 - 1)(x^5 + 1) =$$

$$20. \quad (x^2 + 1)(x^2 - 1) =$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Qualsevol fórmula es pot llegir en els dos sentits. En aquest cas això implica que també podem identificar una resta de monomis amb un producte de polinomis.

Com podeu veure a la fórmula la condició és que contingui dos quadrats. Procedim així:

1. Identificar els quadrats i, en conseqüència, a i b.

2. Escrivim la identitat notable.

Fixeu-vos en els següents exemples:

1. $x^2 - 121$

Primer, trobem a i b

$$x^2 = (x)^2 \Rightarrow a = x$$

$$121 = 11^2 \Rightarrow b = 11$$

Segon, escrivim la identitat notable.

$$x^2 - 121 = (x + 11)(x - 11)$$

2. $-x^2 + 25$

Com els signes són diferents, encara que sembli una suma en realitat és una resta.

$$-x^2 + 25 = 25 - x^2$$

Primer, trobem a i b

$$25 = 5^2 \Rightarrow a = 5$$

$$x^2 = (x)^2 \Rightarrow b = x$$

Segon, escrivim la identitat notable.

$$-x^2 + 25 = (5 + x)(5 - x)$$

3. $49x^6 - 4$

Primer, trobem a i b

$$49x^6 = (7x^3)^2 \Rightarrow a = 7x^3$$

$$4 = 2^2 \Rightarrow b = 2$$

Segon, escrivim la identitat notable.

$$49x^6 - 4 = (7x^3 + 2)(7x^3 - 2)$$

Exercicis

Factoritza:

1. $x^2 - 100 =$

2. $x^2 - 1 =$

3. $x^2 - 9 =$

4. $4x^2 - 25 =$

5. $9x^2 - 36 =$

6. $100x^2 - 4 =$

7. $4x^6 - 25 =$

8. $x^2 + 4 =$

9. $-x^2 + 16 =$

10. $25x^2 - 9 =$

11. $x^2 - 7 =$