F r a c t a l s

Treball de Recerca de: Iona i Maria

F r a c t a l s

Treball de Recerca de Iona González i Maria Vives

Institut Els Tres Turons. Departament d'Expressió. Curs 2004-2005.

Professor Tutor: Pere Planells. Tribunal: Concepció Barceló i Pere Planells.

0.1.- Índex

0.1.- Introducció

Els fractals van aparèixer a finals del segle XIX. Al principi els fractals eren exemples d'objectes curiosos. Eren corbes o superfícies infinitament plegades, línies infinites compactades de forma regular en una superfície finita...

Avui en dia però, s'entén per fractals aquells models matemàtics o objectes reals que la seva creació o forma no segueix cap altre llei que la de la fragmentació o la irregularitat, Els fractals són objectes *autosimilars,* és a dir, mantenen la seva forma essencial, fragmentada i irregular tot i variant la seva escala d'observació; això vol dir que si fem un zoom a qualsevol part del fractal, allò que veurem serà idèntic o molt similar al tot.

Dit en altres paraules, els fractals són objectes matemàtics que modelen (entre altres coses) aquells elements de la natura que s'allunyen de les figures geomètriques convencionals (com cercles o quadrats). Més concretament, són objectes la dimenció dels quals és fraccionària, és a dir, estan entremig de les corbes i de les superfícies sense ser-ne ni una cosa ni l'altre.

La divulgació que actualment han tingut els objectes fractals és Benoit B. Mandelbrot, que és qui va donar el seu actual nom: fractals (del llatí *fractus,* ininterrumput o irregular) i va popularitzar la nova geometria. Mandelbrot va veure la naturalesa a través de la geometria fractal. Com ell mateix va dir:

"...les muntanyes no són cons, els núvols no són esferes, ni l'escorça dels arbres és llisa."

Són innumerables els objectes fractals que s'han trobat ens tots els camps del coneixement, i no únicament en relació a la física, les matemàtiques o la biologia. El món microscòpic, l'orgànic però també inorgànic, está ple d'objectes fractals. Les fractures, per exemple, presenten aquesta propietat; la superfície de les cèl·lules, l'estructura dels nostres pulmons o de l'aparell circulatori, la formació del núvols, es muntanyes... són una part de l'inacabable sèrie.

Els fractals es divideixen en dos grans grups:

- Els geomètrics
- Els que es troben a partir de la iteració de funcions complexes

Els conjunts de Júlia i el conjunt de Mandelbrot són un exemple de fractals que es troben a partir de la iteració de funcions complexes i criden l'atenció per la seva estètica i forma aparentment complexa.

Els fractals són figures que es poden generar amb un nombre infinit de mètodes. Però el mètode més senzill rau en la iteració de figures semblants.

Lligat amb el concepte d'autosemblança i autosimilitud ens trobem amb el concepte d'iteració que tal com indica la paraula vol dir repetir. Apliquem aquesta repetició de parts iguals a una figura original generant una nova figura que està composta per aquestes formes iguals. Si enfoquéssim amb un zoom aquesta figura, obtindríem la mateixa figura.

D'aquesta manera la iteració ens permet fer formes que tenen molt a veure amb la figura original.

La corba de Koch, és un dels fractals més coneguts. Per originar una corba de Koch hem de partir d'un segment que representa la unitat. Un cop fragmentem la unitat en tres parts iguals, obrim un triangle equilàter de costat 1/3 de la unitat amb el costat més baix sobre el segment originari des del punt ½ fins al punt 2/3 del fragment unitari, esborrant el costat que coincideix amb el primer fragment. Es pot comprovar més clarament en el següent dibuix. En una segona iteració es tracta de fer el mateix amb tots els

0.2.- Ojectius del treball

0.3.- Desenvolupament del treball

0.3.1- Història dels fractals

La paraula "fractal" prové del llatí "fractus" que significa "trencar", crear fragments irregulars.

Els fractals,batejats amb aquest nom per Benoit Mandelbrot a la dècada dels 70, són objectes originats mitjançant un procediment d'iteració infinita a partir d'un segment.

Els fractals han trobat aplicacions en camps com els sistemes dinàmics (matemàtiques i física), mesura de costes de perfil molt irregular (geografia) i estructures moleculars (bioquímica).

Durants la dècada dels 80, els primers estudiosos dels frcatals van començar a explorar-los pel seu valor estètic, més que no per la seva significació matemàtica. Mentre que la matemàtica era l'eina, l'objectiu era l'art. Com que les equacions fractals són l'element matemàtic més obvi, els artistes fractals van experimentar amb noves equacions, introduint centenars de nous tipus fractals. Escullint acuradament paràmetres per a refina els color, la forma i l'enquadrament, aquests pioners van introduir el concepte d'art fractal.

Després de 1995, la major innovació no es produeix canviant les equacions fractals, sinó creant noves formes d'acolorir les equacions ja existens. A mesura que aquests nous algorismes d'acoloriment e sfan més complexos, els atistes fractals tornen a les equacions tractals més simples i cl'assiques.

Podriem dir que els fractals són formes geomètriques que es caracterítzen per mantenir el seu aspecte. Com exemples d fractals naturals tenim els núvols, els raigs, les línies costeres, l'estructura alveolar dels pulmons o inclús algunes superfícies de certes proteïnes.

Els fractals són utilitzats com un llenguatge matemàtic. Són geometria que s'utilitza a la Teoria del Caos, o, el que és el mateix, caracteritzen la geometria dels comportaments inestables en sistemes dinàmics determinats i no lineals. Són descrits en algorismes (conjunt d'instruccions matemàtiques per contruir alguna cosa, en auqest cas un fractal).

Una característica curiosa sobre els fractals és que poden tenir dimensió fraccionaria també anomenada "dimensió de Hausdorff-Besicovitch": si una línia té dimensió 1 i un quadrat dimensió 2... els fractals poden tenir dimensió 1'26,1'5, 2'8... i també dimsensió entera com 3... Per exemple, un fractal tédimensió 1'26 podria interpretar-se com aquell fractal cubreix millor el plànol que una línia recta però no ho fa tan bé com ho faria un quadrat.

Un procés físic en el que es fractals i la Teoria del Caos van "agafats de la mà" és l'estudi dels fluixos turbulents, dins del camp de la Mecànica de fluixos: l'aproximació clàssica de la turbulència, deguda a Lewis Richardson el 1922, consisteix en considerar-la com una casada de transferència progressiva d'energia, en la que l'energia del moviment del fluix traspassa consecutivament a 'vórtices' cada vegada més petits. Un procés així és clarament fractal i així varis aspectes de la turbulència es poden descriure aproximadament mitjançant fractals.

És important reconèixer que els fractals vertaders són una idealització. Cap corba en el món real és un fractal vertader; els objectes reals són produïts per processos que actuen només sobre un rang d'esacles finites. En altres paraules, els objectes reals no tenen la infinita quantitat de detalls que els fractals ofereixen amb un cert garu de magnificació.

Podem dir que el concepte de fractal és molt recent, té uns 40 anys, però abans de definir-lo, ja s'havia començat a detectar que en la natura passen coses estranyes que era difícil de descriure amb les eines que hi havia.

0.3.1.1- Prefractals

Abans dels fractals van existir altres tipus de figures geometriques i corbes que aspiraven a ser-ho. Després de ser millorades a través dels avenços, van arribar a adquirir el nom de *fractals*:

ELS MONSTRES

1872 El conjunt de Cantor

1875 La corba de Weierstrass

1890 La corba de Peano

1891 La corba de Hilbert

1900 Moviment browniano (Bachelier)

1903 La corba de Takagi

1906 L'illa de van Koch

1915 El triángul de Sierpinski

1938 El drac de Lévy

LA DIMENSIÓ

1919 Dimensió de Hausdorff

COMPORTA-MENT RELACIONAT AMB L'ESCALA

1951 Llei de Hurst (riu Nil)

1956 Llei de Gutenberg-Richter per la distribució de la magnitud de terretrèmols

1961 Lleis d'escala de Richardson

A continuació els explicarem un a un:

<u>Conjunt de Cantor:</u> Cantor va dissenyar un mètode per comparar el tamany de dos conjunts. Normalment per fer això comptem el nombre d'elements de cada conjunt i si tenen el mateix nombre hom pot afirmar que els conjunts són del mateix tamany.Però com i quan acabarem de comptar els elements d'un conjunt infinit?

Cantor es va adonar que no necessitem comptar el nombre d'elements d'un conjunt per comparar-los, existeixen altres mètodes: si tenim dos conjunts M i N, aquests són equivalents si és possible posar-los, per una certa llei, en una relació mútua tal que a cada element d'un d'ells li correspongui un i solament un a l'altre. Aquesta afirmació ens porta a conclusions una mica estranyes. Per exemple, considerem que N={1,2,3,...} és el conjunt dels nombres naturals i E={2,4,6,...} el conjunt dels nombres naturals parells. Segons la definició de Cantor, es veu que els nombres N i E tenen el mateix nombre d'elements, perquè podem demostrar que es dóna una correspondència biunívoca entre els seus membres.

N: 1 2 3 4 5 ... N
| | | | | |
E: 2 4 6 8 10 ... 2n

<u>Corba de Weierstrass:</u> El 18 de Juliol de 1872, Karl Weierstrass (1825-1897) va llegir un escrit titulat "*On Continuous Functions of a Real Argument that do not have a Well-defined Differential Quotient"*, a la Royal Prussian Academy of Science. L'article fou publicat tres anys més tard per P. du Bois-Reymond.

Seguidament, Weierstrass costrueix el primer exemple de corba continua i no diferenciable en cap punt, sempre que el producte *ab* sigui superior a cert límit:

Weierstrass provà que la funció descrita careix de derivada finita o infinita en cada un dels seus punts si 0<*a*<1, *b* és un enter impar i *ab*>1+3?/2.

El 1914, Hardy demostrà que, si *ab*?1, *W*(*x*) careix de derivades en tots els seus punts. Si *ab*<1, *W*(*x*) és continuament diferenciable.

<u>La corba de Mandelbrot-Weierstrass:</u> La gràfica de la corba de Weierstrass no és autoafí. Mandelbrot disenyà una lleugera modificació d'ella que li confieix alguna classe d'autoafinitat. Aquesta funció pot expressar-se com suma d'una de Weierstrass i una funció continua i diferenciable. A més, $W_M(x)=aW_M(bx)$).

Corba de Peano: El 1890 Giuseppe Peano (1858-1932) publicà un artícle titulat "Sur une courbe qui remplit toute une aire plane". Aquesta corbe, com la de Hilbert, té la propietat notable d' "omplir" el plànol, en el sentit de que passa per qualsevol punt, per exemple, del quadrat unitat. Es demostra que ambdos tenen dimensió topològica igual a 1.

Algoritme per la construcció de la corba de Peano: Partim d'un segment de longitud unitat. Deduïm 9 nous segments, cada un de longitud 1/3, que coloquem de la forma següent:

A l'etapa *p*, obtenim un conjunt format per 9^p quadrades de costat 3^{-p}. L'objecte engendrad és estrictament iguals, ja que pot obtenir-se com reunió de n=9 conjunts iguals a Q, reduïts cada un d'ellos en la proporció 1/k=1/3.

Per construir la corba de Peano com atractor de sistemes d'aplicacions afins necessitem noves aplicacions de la forma:

Les taules que segueixen relacionant els valors dels 54 coeficients.

Corba de Hilbert: La corba d'algoritme constructiu que describim a continuació, fou descrita el 1891 per Hilbert (1862-1943) en un article, poc més tard que Giuseppe Peano describís una corba anàloga. Les dos tenen la notable propietat d' "omplir" el plànol.
La corba comença amb una línia H_0 composta de 3 segments, cada un de longitud unitat, que conecta els centres de quatre quadrants.

A l'etapa següent es realitzen quatre copies d'H_0, reduïdes a la proporció 1/3, i es coloquen als quadrants. Resulta H_1. S'observa que per construir H_1, és necessari unir les copies d'H_0 amb tres segments de longitud 1/2.
Per deduir H_2, es fan quatre copies d'H0, reduïdes a la proporció 1/2, es coloquen com s'indica i s'uneixen les copies mitjançant tres segments, ara de tamany ¼. S'observa, ara, que l'objecte que resulta no és estrictament autosemblant.
La corba de Hilbert s'obté com atractor del SFI següent:

Si el conjunt inicial és una línia QUEBRADA com la que es representa a continució:

s'obtenen transformacions succesives el limit del qual és una corba de Hilbert.

El codi Gray: El codi Gray, basat en una permutació del codi binari tradicional, proporciona una representació d'objetes ordenats de manera que, passant d'un objecte al següent, només haurem de canviar un bit de l'informació. La distancia de Hamming entre la representació d'un objecte i el següent (o el predecessor) es 1.

Codificació decimal, binaria tradicional i basada en el codi de Gray

Eventualment – això és important en dispositius mecànics – l'error mig en la transmició és menor quan ses fa ús del codi Gray.

A continuació s'il·lustra la correspondència dels digits de 0 a 7 amb els codis de Gray, fent ús d'una corba de Hilbert tridimensional.

Moviment brownià: El 1840, el botanic escocès Robert Brown (1773-1858), fent ús d'un microscopi, va posar de manifest la naturalesa desordenada dels moviments de les partícules en suspensió en un mitjà líquid (grans de polen en aigua).

El 1900 Louis Bachelier (1870-1946) va establir el primer model i les primeres aplicacions pel moviment brownià, i el 1905 Albert Einstein ho va explicar en terminis de colisions entre partícules, manifestant que es tractava d'una confirmació de la teoria mol·lecular de la calor. Això aprovaria l'existencia d'àtoms de tamany finit.

Jean Baptiste Perrin (1870-1942), en 1908, va demostrar experimentalment l'existència d'àtoms de tamany finit i va intuïr l'enllaç entre les trajectories del moviment brownià i funcions continues no diferenciables. El 1926, va rebre el Premio Nobel de Física pels seus treballs sobre moviment brownià.

Norbert Wiener (1874-1964), el 1923, va confimar les intuicions de Perrin, probant que quasi totes les trajectories són contínues. El 1933, juntament amb Paley i Zygmund, va completar l'estudi demostrant que quasi totes les trajectories no són diferenciables en tots els seus punts.

El 1939, Paul Lévy va publicar un anàlisi EXHAUSTIVO sobre el moviment brownià.

El 1968, Mandelbrot i Van Ness van introduïr el moviment brownià fraccionari, en la descripció del qual apareix un parametre rellevant *H*, del qual el seu valor, pel m.b. estàndard és ½. Aquest model havia sigut tractat anteriorment per Kolmogorov.

El 1975, Mandelbrot suggereix la utilització dels mecanismes brownians per simular paisatges naturals: muntanyes i valls, costes, etc., controlant la rugositat a través del paràmetre *H* abans esmentat.

La corba de Takagi: Aquesta corba fou descoberta el 1903 per Takagi (1875-1960), i es dedueix de la de Weierstrass la funció trigonomètrica que apareix a la suma per la funció ?(x)=dist(x,Z) que medeix la distancia entre l'argument x y el número enter més pròxim a x.

La gràfica de la funció ?(x)=dist(x,Z) té la forma següent:

En primer lloc, considerem l'algoritme d'Arquímedes per a la construcció punt a punt de la paràbola.

Sigui $y=P(x)=a-bx^2$, amb $b>0$. Donats els extrems de la corda $\{x_A, a-bx_A^2\}$, $\{x_B, a-bx_B^2\}$, Arquímedes INTERPOLA el valor P(x) que correspon al punt mig $x=(x_A+x_B)/2$.

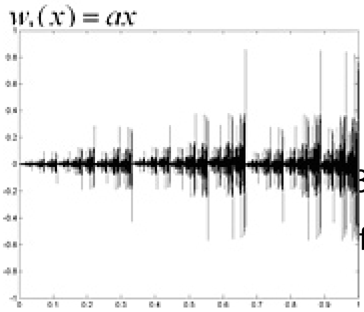
Seguidament, s'INTERPOLEN altres dos punts, partint del punt mig de les cordes AC i CB, respectivament, i elevant cada ordenada a la quantitat ?/(4^2)= ?/16. L'etapa k requereix el desplaçament dels punts mitjos de 2^{k-1} cordes a la CUANTÍA 4^{-k}?.

Pei la corba fractal de Takagi, es copia l'argosisme precendent, canviant l'increment de les ordenaes per 2^{-k}? en l'etapa *k*. La corba que es dedueix punt a punt és molt diferent d'una paràbola.

Exemple:

Sobre el conjunt [0,1] definim les aplicaciones contractives

$w_1(x) = ax$



3. Iterant en la forma acostumada, s'obté

ferenciable en tots els seus punts.

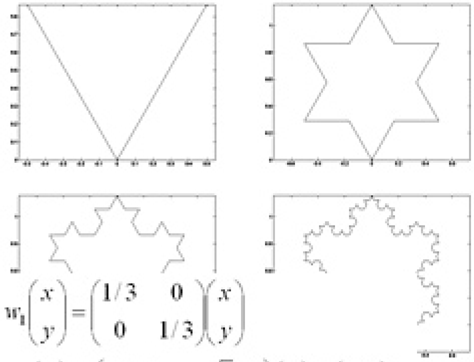
La corba de Koch i la seva illa:Inspirats pel HALLAZGO de Weierstrass, altres matemàtocs van treballar sobre corbes continues sense tangent. Aquest és el cas del matemàtic suís Helge Von Koch (1870-1924): "On a Continuous Curve without Tangents Constructible from Elementary Geometry".

Quasi immediatament després de la publicació del treball de Von Koch, Ernesto César va demostrar que la corba en questió és autosemblant. És a dir, pot ser obtinguda reunint quatre parts de la mateixa, cada una de les quals és emblant a la corba completa.

Aquestes cobres són altres exemples de corbes continues i no diferenciables en cap punt. Tenen longitud infinita, però limiten una superfície finita. La seva dimensió topològica és 1.

La construcció de la corba de Von Koch es realitza partint d'un segment de longitud unitat. A la primera etapa de l'algorisme, substituim el segment per quatre. Cada un dels quals té longitud 1/3, i estan colocats de la manera que indica la gràfica:

L'illa de Koch: La versió que va introduir Von Koch el 1904 va ser la denominada illa de Koch, el qual la construcció cmença amb un triangle equilàter, aplicant després a cada un dels seus costats un algorisme ANÄLOGO.



$$w_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/6 & -\sqrt{3}/6\\\sqrt{3}/6 & 1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/3\\0\end{pmatrix}$$

$$w_3\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/6 & \sqrt{3}/6\\-\sqrt{3}/6 & 1/6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2\\\sqrt{3}/6\end{pmatrix}$$

$$w_4\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3 & 0\\0 & 1/3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2/3\\0\end{pmatrix}$$

...ble obtenir diferents etapes en la ...nçant el sistema de transformacions

A l'etapa *k* disposem de 4*k* segments de longitud 3^{-k} cada un d'ells. Així, la longitud total de la corba és, a cada etapa:

$$L(k)=\left(\frac{4}{3}\right)^{k}$$

És evident que aquesta quantitat creix indefinidament quan k??.

<u>Area de la illa de Koch</u>: Si designem amb ? l'àrea del triangle de partida, l'àrea de la figura obtinguda a l'etapa *k* s'escriu

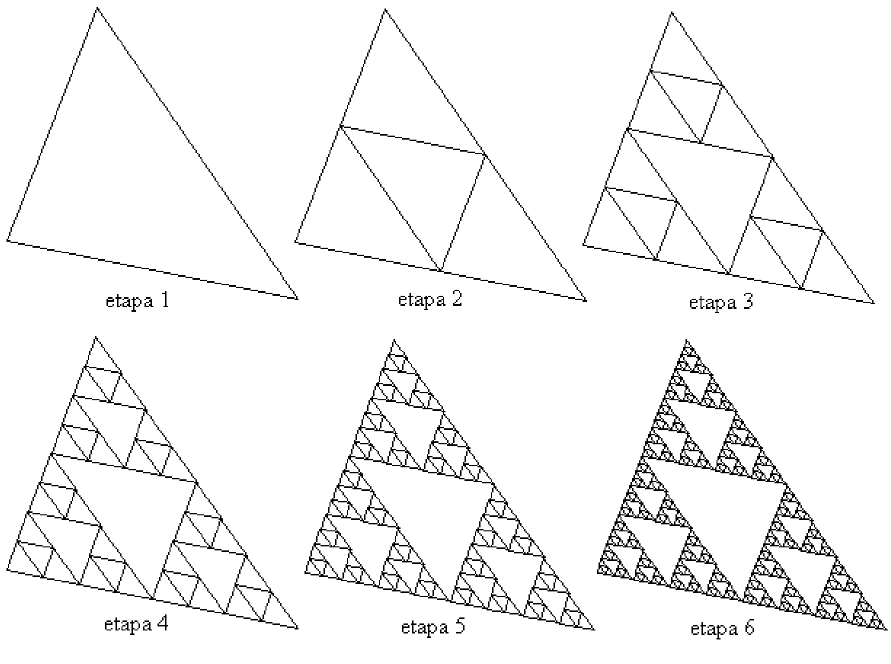
$$A(k)=\Delta\left(1+\frac{1}{3}\sum_{j=0}^{k-1}\left(\frac{4}{9}\right)^{j}\right)$$

quan el límit k??, agafa la quantitat 8?/5

<u>El triangle de Sierpinski:</u> El matemàtic polac W. Sierpinski (1882-1969) descriu el conjunt denominat "Triangle de Sierpinski" a l'article "*Sur une courbe dont tout point est un point de ramification*", C. R. Acad. París, 1915.

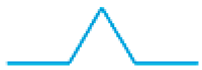
Aquest conjunt té dimensió topològica 1 i mesura de Lebesgue nula. Es tracta d'una estructura autosemblant.

<u>L'estora de Sierpinski:</u> W. Sierpinski descriu un segon conjunt, denominat estora de Sierpinski, que pot ser considerat com una generalizació del conjunt triàdic de Cantor. Com aquest conjunt i com el triangle de Sierpinski, té mesura.



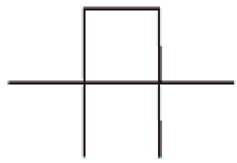
<u>La corba de Given-Mandelbrot:</u> Recordem que l'algorisme per

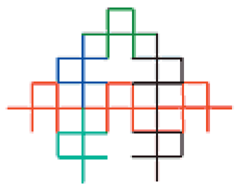
generar la corba de Von Koch parteix d'un segment de longitud. A la primera etapa, anomenat segment es transforma en quatre segments de longitud *l*/3, colocats com indica la il·lustració.



Given i Mandelbrot han construit un model físic (percolació) mitjançant un algorismoANALOGO, que conduix a una estructura fractal més sofsticada.

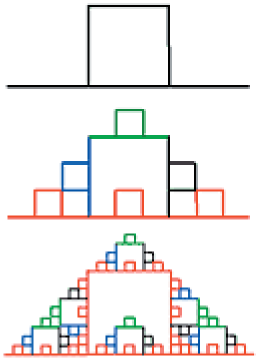
Es parteix d'un segment de longitud i es tranforma en vuit de longitud *l*/3 colocats com es mostra a la gràfica.





Suposem que aquesta corba està construida amb un material conductor i que els extrems esquerre i dret a una font d'energia elèctrica. E corrent no flueix a través de tots els segments..

El corrent elèctric està confinat al 'backbone' (columna vertebral) de l'estructura, que es pot deduir canviant l'algorisme de construcció.

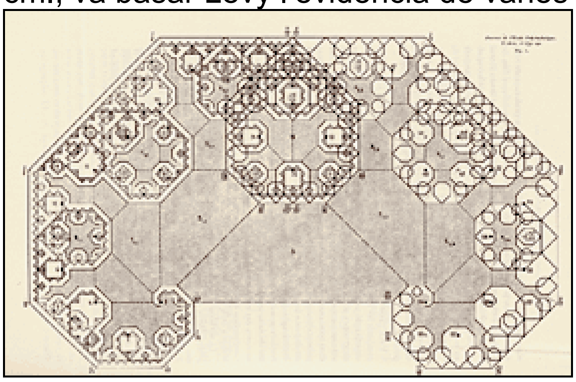


La novetat és que disposem d'una estructura fractal (el 'backbone') dins d'una altra estructura fractal (curva de Given-Mandelbrot). Una altra estructura diferent està formada pels segments que suposen una conexió simple, també fractal. Tenim així una sort de 'fractal de fractals'.

Molts fenònems físics seleccionen de forma natural sub-estructures dins de les estructures a les que tenen lloc.

El drac de Lévy: Paul Lévy va construir un quadre general en el que es pot colocar la corba de Von Koch, "que no és l'única que té aquesta propietat maravellosa"- amb referència a l'autosemblança. La memòria es va publicar amb el títol *"Les courbes planes ou gauches et les surfaces composées de partes semblables au tout*", Journal del l'École Politechnique.

Es pot constatar el mèrit del dibuixant que, el 1938, any de la publicació del treball de Lévy, va trassar la gràfica que es pot observar a la diapositiva següent, a la qual, a tamany de 22x34 cm., va basar Lévy l'evidència de varies propietats del conjunt.

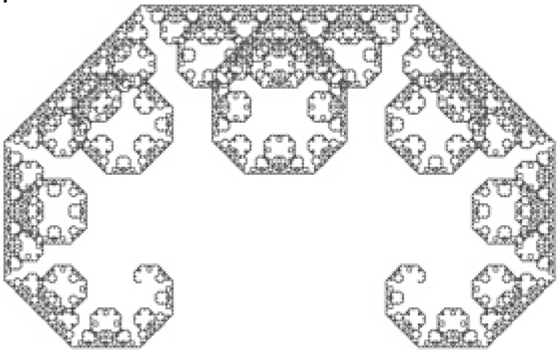


Avui dia, disposem de varies tècniques per generar aproximacions numèriques del Drac de Lévy. Per exemple, pot definir-se com l'atractor dels sistema dinàmic descrit per les transformacions següents:

$$w_1\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & -1/2\\1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$$

$$w_2\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/2 & 1/2\\-1/2 & 1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1/2\\1/2\end{pmatrix}$$

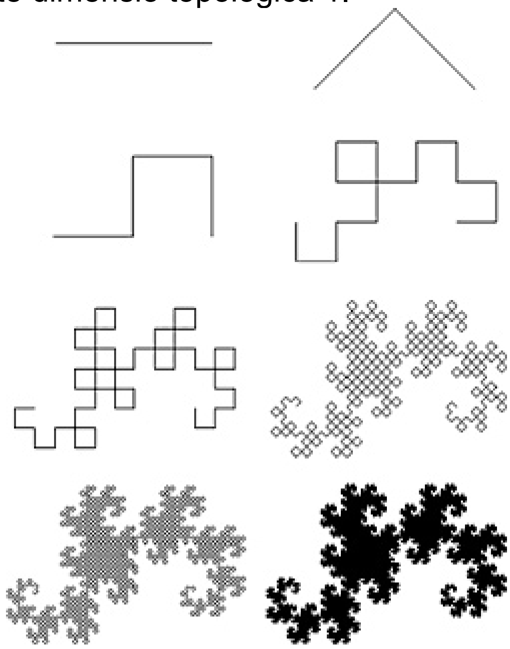
La corba, que és el límit iterant successivament, té dimensió topològica 2. per altra banda. Es demostra que la dimensió de Hausdorff d'aquest conjunt és 2, de manera quede este conjunto es 2, de forma que no entraría en el concepto de fractal descrito por Mandelbrot en su manifiesto.



A la seva novel·la de Jurassic Park, Michael Crichton configura l'índex dels eus capítols amb set iteracions succecives en el procés de construcció d'aquesta corba, seguides d'un breu comentari del personatge Ian Malcolm, el matemàtic especialista en caos.

La corba de Heighway: Aquesta "corba" va ser construida al voltant del 1967 per John E. Heighway. Igual que el drac de

Lévy, té dimensió topològica 1.



La corba, que és el final de la imatge, té dimensió topològica 1. Aquesta "corba" va ser construida al voltant del 1967 pel físic de la N.A.S.A John E. Heighway. D'acord amb Martin Gardner (Festival Màgic-Matemàtic, Aliança Editorial), Heighway va il·lustrar la construcció mitjançant el doble convenient d'una fulla de paper. Aquesta corba també es pot obtenir com l'atractor del sistema.

0.3.1.2.- Fractals i informàtica

Els sistemes dinàmics són una de les branques de les matemàtiques més desenvolupades avui, però fins a l'arribada dels ordinadors, l'elevat nombre de càlculs que implicava el seu ús els feia impracticables en la vida real. La capacitat de l'ordinador per a efectuar operacions a gran velocitat permet condensar milions de càlculs en resultats que podem interpretar numèricament o visualment. Benoit Mandelbrot va ser el primer a utilitzar els ordinadors per a produir representacions gràfiques de sistemes dinàmics en el pla complex, basant-se en les fórmules descrites pel matemàtic francès Gaston Julia.

Els ordinadors executen algorismes i obtenen extraordinaries formes de fractals.

La possibilitat de generar fractals per ordinador ha donat els seus fruits comercials: per exemple, per emmegatzemar per ordinador dades que es necessiten per reconstruir la superfície de la Lluna es requereixen enormes quantitats de memòria. La solució és utilitzar els fractals per simular la superficie llunar, ús el qual se li dóna el nom de "falsificacions fractals". Un altre exemple més comercial i conegut són els fractals que es van utilitzar a la pel.lícula "Star Trek II: La ira de Khan" per crear el paisatge del planeta Génesis, i també tilitzats a "El retorno el Jedi" per crear la geografia de les llunes de Endor i els contorns de l'Estrella de la Mort.

La característica d'invariànça d'escala d'aquests objectes està posant de moda la creença de" tot està a les parts que estan en tot".

0.3.1.3.- Fractals i realitat

0.4.1.- Introducció

Els fractals van aparèixer a finals del segle XIX. Al principi els fractals eren exemples d'objectes curiosos. Eren corbes o superfícies infinitament plegades, línies infinites compactades de forma regular en una superfície finita...

Avui en dia però, s'entén per fractals aquells models matemàtics o objectes reals que la seva creació o forma no segueix cap altre llei que la de la fragmentació o la irregularitat, Els fractals són objectes *autosimilars,* és a dir, mantenen la seva forma essencial, fragmentada i irregular tot i variant la seva escala d'observació; això vol dir que si fem un zoom a qualsevol part del fractal, allò que veurem serà idèntic o molt similar al tot.

Dit en altres paraules, els fractals són objectes matemàtics que modelen (entre altres coses) aquells elements de la natura que s'allunyen de les figures geomètriques convencionals (com cercles o quadrats). Més concretament, són objectes la dimenció dels quals és fraccionària, és a dir, estan entremig de les corbes i de les superfícies sense ser-ne ni una cosa ni l'altre.

La divulgació que actualment han tingut els objectes fractals és Benoit B. Mandelbrot, que és qui va donar el seu actual nom: fractals (del llatí *fractus,* ininterrumput o irregular) i va popularitzar la nova geometria. Mandelbrot va veure la naturalesa a través de la geometria fractal. Com ell mateix va dir:

"...les muntanyes no són cons, els núvols no són esferes, ni l'escorça dels arbres és llisa."

Són innumerables els objectes fractals que s'han trobat ens tots els camps del coneixement, i no únicament en relació a la física, les matemàtiques o la biologia. El món microscòpic, l'orgànic però també inorgànic, está ple d'objectes fractals. Les fractures, per exemple, presenten aquesta propietat; la superfície de les cèl·lules, l'estructura dels nostres pulmons o de l'aparell circulatori, la formació del núvols, es muntanyes... són una part de l'inacabable sèrie.

Els fractals es divideixen en dos grans grups:

a) Els geomètrics

b) Els que es troben a partir de la iteració de funcions complexes

Els conjunts de Júlia i el conjunt de Mandelbrot són un exemple de fractals que es troben a partir de la iteració de funcions complexes i criden l'atenció per la seva estètica i forma aparentment complexa.

Els fractals són figures que es poden generar amb un nombre infinit de mètodes. Però el mètode més senzill rau en la iteració de figures semblants.

Lligat amb el concepte d'autosemblança i autosimilitud ens trobem amb el concepte d'iteració que tal com indica la paraula vol dir repetir. Apliquem aquesta repetició de parts iguals a una figura original generant una nova figura que està composta per aquestes formes iguals. Si enfoquéssim amb un zoom aquesta figura, obtindríem la mateixa figura.

D'aquesta manera la iteració ens permet fer formes que tenen molt a veure amb la figura original.

La corba de Koch, és un dels fractals més coneguts. Per originar una corba de Koch hem de partir d'un segment que representa la unitat. Un cop fragmentem la unitat en tres parts iguals, obrim un triangle equilàter de costat 1/3 de la unitat amb el costat més baix sobre el segment originari des del punt ½ fins al punt 2/3 del fragment unitari, esborrant el costat que coincideix

0.5.- Conclusions

Amb aquest treball hem aconseguit conèixer a fons el programa de l' AUTOCAD, amb el qui hem fet la recreació virtual de l'edifici Xifré, cosa que ens ha donat a conèixer una mica el món dels arquitectes.
Estem molt satisfets d'haver realitzat aquesta feina perquè pensem que hem contribuït en una part molt important del patrimoni històric de la nostra Vila, i que en un futur, puguem dir, que la realització informàtica d'aquell edifici, l'haguem fet nosaltres.

0.5.- Bibliografia

-Plànols de l'edifici, proporcionats pels Serveis tècnics de l'Ajuntament d'Arenys de Mar

-*La casa Xifré d'Arenys de Mar* , revista informativa publicada l'any____.

-San Pedro, J.R. de, *Don José Xifré Casas: Un indiano catalán*. Barcelona: Banco Atlántico, 1956.

Zenon de Pol i Alguer de, Arenyencs a Amèrica. Col·lecció Museu de la Marina de Vilassar, Galerada, desembre 2000.