

1

Calcula els següents determinants:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Solucions: -9, 0, -4, -19, -15 respectivament.

2

A partir del primer determinant, raona aplicant propietats, el valor del segon determinant:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5 \qquad \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Si treiem factor comú 2 de la fila F1 i $\frac{1}{2}$ de la F2 obtenim la matriu de referència i com $2 \cdot \frac{1}{2}$ és 1 el resultat no variarà.

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

4

Demostra, sin desenvolupar-lo, que el següent determinat val 0:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 3a & 4a \\ b & 5b & 6b \\ c & 6c & 7c \end{vmatrix}$$

Només cal comprovar que la C3 és combinació lineal de la C1 i la C2 ja que $C3 = C1 + C2$.

5

Si: $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$ calcula aquest altre aplicant propietats:

$$\begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix}$$

Hem de treure factor comú primer i després intercanviar algunes files i columnes de la següent manera:

$$B = \begin{vmatrix} 2a & 2c & 2b \\ 2u & 2w & 2v \\ 2p & 2r & 2q \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \begin{vmatrix} a & c & b \\ u & w & v \\ p & r & q \end{vmatrix} = \underset{c_2 \rightarrow c_3}{c_2 \rightarrow c_3} - 8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ u & v & w \\ p & q & r \end{vmatrix} =$$

$$\underset{f_2 \rightarrow f_3}{f_2 \rightarrow f_3} = 8 \begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 8 \cdot 25 = 200$$

6

Resol la següent equació:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolupant pels adjunts de la primera columna C_1 :

$$\begin{vmatrix} 1 & x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & x & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 1 & x & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-2 + 2x - 4 + x + 3 + 3(-x^2 + 2 - x + 2) = 0$$

$$-3x^2 + 6 = 0 \quad x = \pm\sqrt{2}$$

7

Estudia quins valors del paràmetre x fan que la matriu A sigui singular, és a dir, no tingui matriu inversa A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculem $\det(A)$ i igulem a zero per trobar els valors demanats:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & x \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = x$$

Per a $x = 0$ la matriu A no té inversa.

7

Calcula A^{-1} :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -4 + 6 - 1 = 1 \neq 0 \quad \text{per tant, té inversa}$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = 12 \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -6 & -1 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1 \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5 \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2$$

$$Adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 6 & -2 \\ -2 & 12 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad [Adj(A)]^T = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

Per tant com :

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot [Adj(A)]^T \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 6 & 12 & 5 \\ -2 & -5 & -2 \end{pmatrix}$$

8

Calcula B^{-1} per a la següent matriu B:

Operant com a l'exemple anterior:

$$b / B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 7 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{1}{|B|} \begin{pmatrix} 12 & -12 & -3 \\ -10 & -10 & 20 \\ 2 & 8 & -13 \end{pmatrix}^t = \frac{1}{-30} \begin{pmatrix} 12 & -10 & 2 \\ -12 & -10 & 8 \\ -3 & 20 & -13 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{-2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{-1}{15} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{3} & \frac{-4}{15} \\ \frac{1}{10} & \frac{-2}{3} & \frac{13}{30} \end{pmatrix}$$

9

Estudia per quins valors no existeix la matriu inversa:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 - m^2 - 6 - 0 - 1 - 0 = -m^2 - 7$$

$$-m^2 - 7 = 0 \quad m = \pm\sqrt{-7} \notin \mathbb{R}$$

Per qualsevol valor real de la variable m existeix la matriu inversa A^{-1}