

SETEMBRE 2011

2. Una empresa fabrica dos tipus de begudes, que anomenarem B_1 i B_2 , i en el procés de fabricació fa servir dos tipus d'ingredients, que designarem C i D. Disposa de 90 L de C i de 150 L de D. Per cada bidó de beguda B_1 calen 1 L d'ingredient C i 2 L d'ingredient D, i per cada bidó de beguda B_2 calen 2 L de C i 1 L de D. Sabem que cada bidó de B_1 dóna 10€ de benefici, i que cada bidó de B_2 en proporciona 15€.

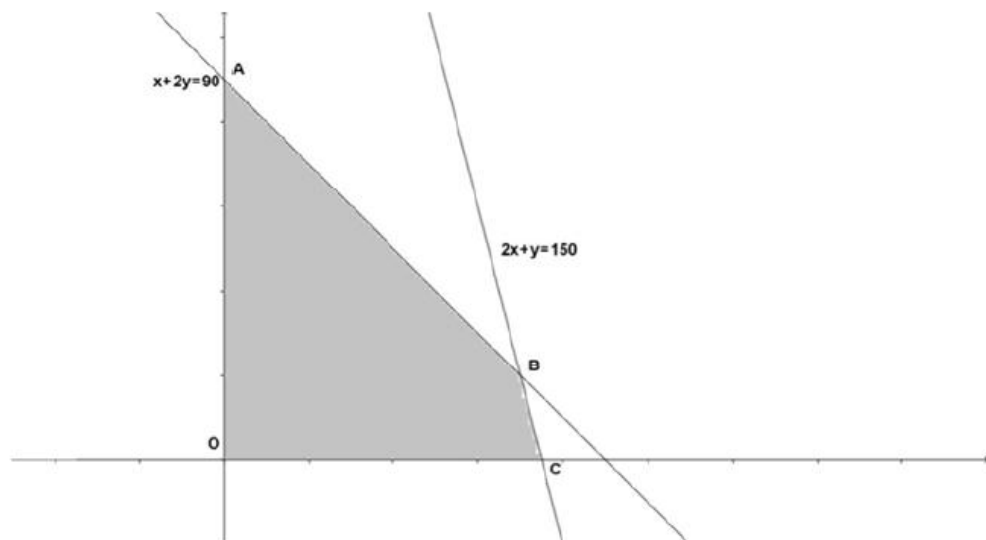
a) Plantegeu les inequacions corresponents a les restriccions indicades, calculeu els vèrtexs de la regió factible, i dibuixeu-la.

[1 punt]

b) Escriviu la funció objectiu. Quants bidons de cada tipus cal fabricar per a obtenir el benefici màxim? Quin és aquest benefici?

[1 punt]

a. Si fabriquem x bidons de B_1 i y bidons de B_2 tindrem:



Les inequacions que defineixen la regió factible són:

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y \leq 90 \\ 2x + y \leq 150 \\ x, y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Els vèrtexs de la regió factible són: A (0,45), B (70,10), C (75,0), D (0,0).

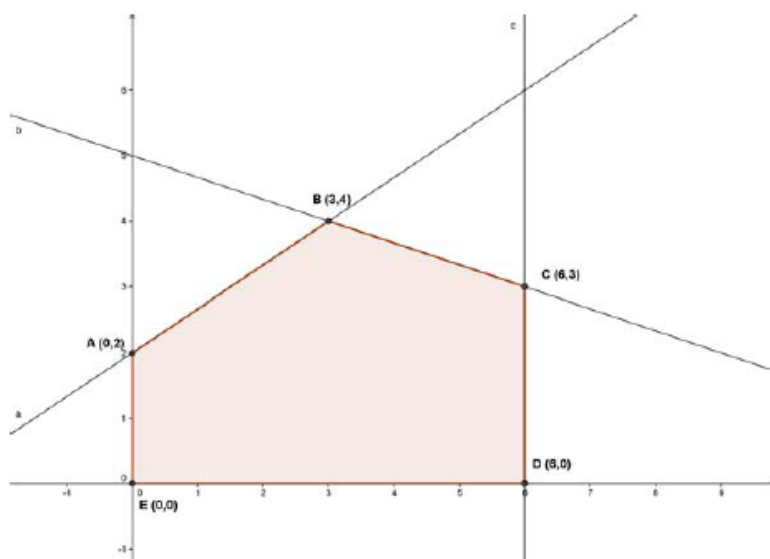
b. La funció objectiu és $z = 10x + 15y$. Els beneficis corresponents a cada vèrtex són: $z(A) = 675$, $z(B) = 850$, $z(C) = 750$, $z(D) = 0$. Els màxims guanys seran de 850 €, i s'obtindran fabricant 70 bidons de B_1 i 10 bidons de B_2 .

JUNY 2011

2. Considereu la regió del pla limitada per les rectes $x=0$, $y=0$, $2x-3y=-6$, $x+3y=15$ i $x=6$.
- a) Dibuixeu-la, calculeu-ne els vèrtexs i justifiqueu si els punts $P(1, 3)$ i $Q(3, 3)$ pertanyen o no a aquesta regió.
[1,5 punts]
- b) Calculeu en quins punts d'aquesta regió la funció $f(x, y) = x + 4y$ assoleix el valor màxim i el valor mínim, i indiqueu aquests valors.
[0,5 punts]

2.

a.



Al gràfic adjunt tenim la regió i els seus vèrtexs. El punt $P(1,3)$ no pertany a la regió ja que el punt $(1,2)$ és de la recta AB . El punt $Q(3,3)$ sí que hi pertany ja que es troba per sota del punt B , en la mateixa vertical.

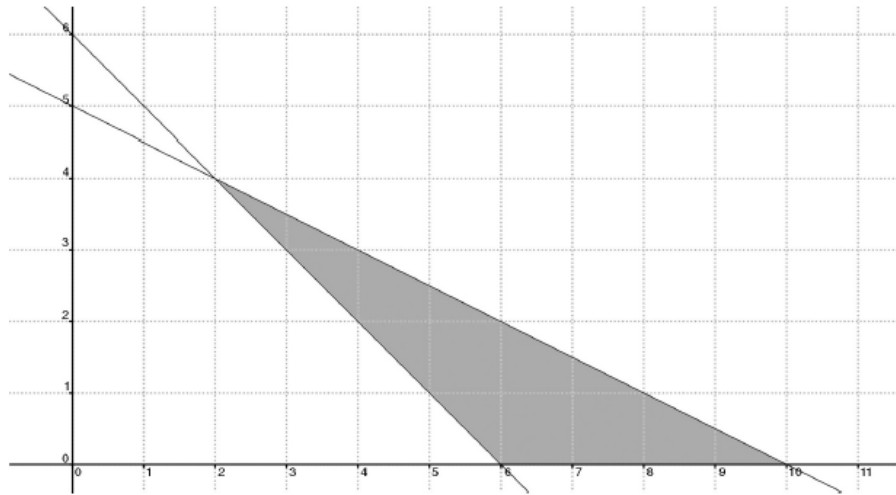
b.

$$F(0,2) = 8, F(3,4) = 19,$$

$$F(6,3) = 18, F(6,0) = 6,$$

$F(0,0) = 0$. Per tant, el valor màxim és 19, i es dona en el punt B . El valor mínim és 0, i es dona en el punt E .

2. Considereu la regió ombrejada de la figura següent:



a) Determineu el sistema d'inequacions que la delimita.

[1 punt]

b) Calculeu el valor màxim de la funció $z = x + 2y$ en aquesta regió, i indiqueu per a quins valors s'assoleix aquest màxim.

[1 punt]

2.

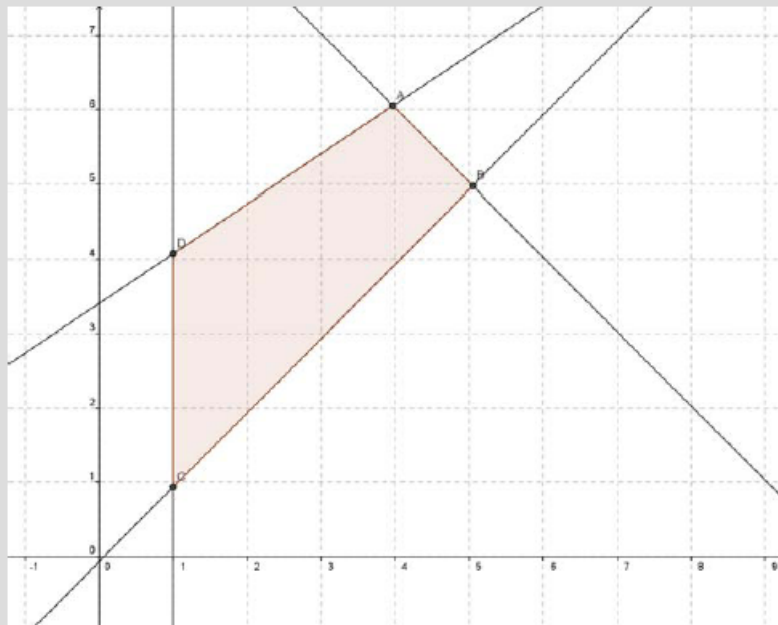
a. Les rectes són $y = -x + 6$ i $y = -\frac{1}{2}x + 5$. El sistema d'inequacions que verifiquen els punts de la regió ombrejada és:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq -x + 6 \\ y \leq -\frac{1}{2}x + 5 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

b. Els vèrtexs de la regió factible són $(6,0)$, $(10,0)$ i $(2,4)$. A més, $z(6,0)=6$, $z(10,0)=10$, $z(2,4)=10$. El màxim de la funció z a la regió factible és 10, i s'assoleix en tot el segment d'extremes $(10,0)$ i $(2,4)$.

SETEMBRE 2010

4. Considerem la regió del pla representada a la figura adjunta:



- Determineu les inequacions que defineixen els punts interiors i de la frontera del quadrilàter ABCD.
- Determineu en quins punts s'abasta el màxim i el mínim de la funció $f(x,y) = 2x - 2y + 7$, i quins són aquests valors.

Solució:

a.

La recta AB és $y = -x + 10$. La recta BC és $y = x$. La recta CD és $x = 1$.

Finalment, la recta AD és $y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$. Les inequacions que ens demanen són, doncs:

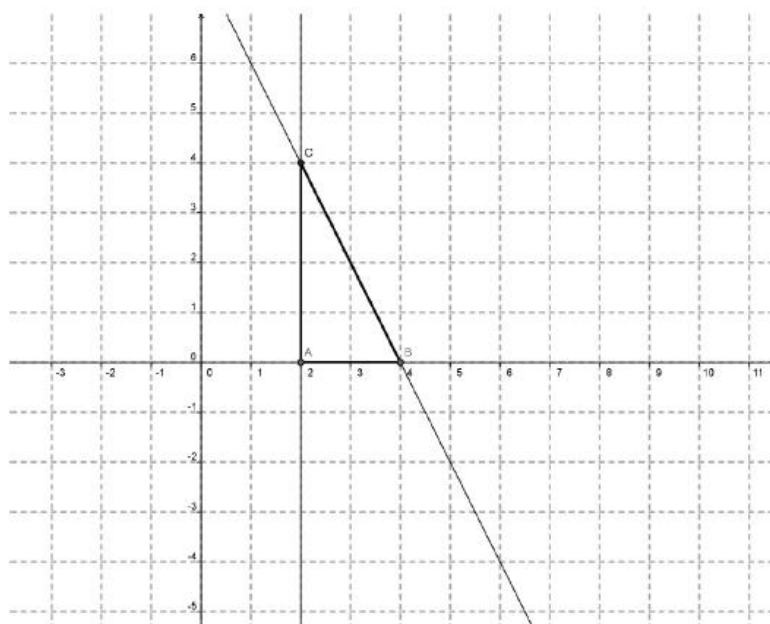
$$\left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ y \geq x \\ x + y \leq 10 \\ 3y - 2x \leq 10 \end{array} \right\}.$$

b.

$f(1,1) = 7$, $f(1,4) = 1$, $f(4,6) = 3$, $f(5,5) = 7$. Per tant, el valor mínim és 1, en el punt D. El màxim és 7, en tots els punts del segment BC.

JUNY 2010

5. Considereu el triangle ABC que es mostra en la figura següent:



a) Escriviu el sistema d'inequacions que determinen el triangle ABC i l'interior d'aquest.

[1 punt]

b) Indiqueu els punts de la regió indicada en què la funció $z = 2x + y$ assolix el valor màxim.

[1 punt]

a.

La recta AC és $x = 2$. La recta AB és $y = 0$. La recta BC és $y = -2x + 8$. Per tant, les inequacions demanades són:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 2 \\ y \leq -2x + 8 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

b.

$z(2,4) = 8$; $z(2,0) = 4$; $z(4,0) = 8$. Per tant, el valor màxim és 8, i s'assoleix en tots els punts del segment AC .

4. Una botiga de bijuteria ven anells i collarets en lots de dos tipus: el lot de tipus A està format per un anell i un collaret, mentre que el lot de tipus B consta de 3 anells i un collaret. Sabem que disposen de 1 500 anells i de 1 000 collarets. En cada lot de tipus A guanyen 0,70 €, mentre que en cada lot de tipus B guanyen 1 €. Indiqueu quants lots de cada tipus han de vendre per a obtenir el màxim benefici.

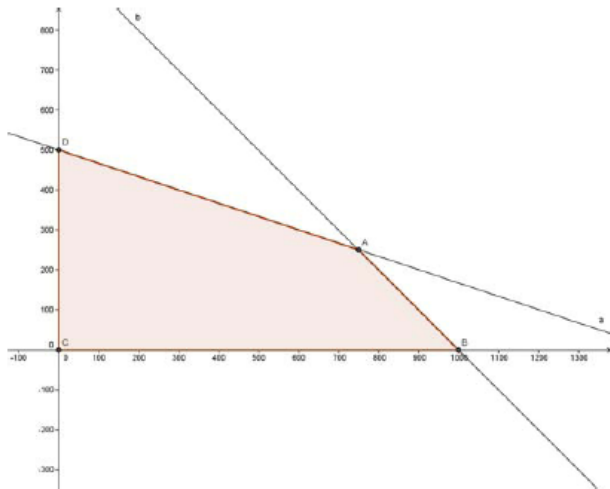
[2 punts]

Pregunta 4

Anomenarem x al nombre de lots de tipus A, i y al nombre de lots de tipus B que venen. La traducció de les dades del problema és, aleshores,

$$\left. \begin{array}{l} x + 3y \leq 1500 \\ x + y \leq 1000 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

La funció objectiu és la funció dels guanys: $G(x, y) = 0,7x + y$. Si ara dibuixem la regió factible del problema obtindrem el gràfic adjunt.



El vèrtex A de la regió factible es determina com a intersecció de les dues rectes, i resulta ser el punt A(750, 250). De la mateixa

manera obtenim B(1000, 0), C(0, 0), D(0, 500). La funció de guanys en aquests punts és, doncs: $G(750, 250) = 775$, $G(1000, 0) = 700$, $G(0, 0) = 0$, $G(0, 500) = 500$. Per tant, els convé vendre 750 lots de tipus A i 250 lots de tipus B.

3. Un concessionari de motos comercialitza dos models, un de 125 cc i un altre de 50 cc. Per cada moto de 125 cc que ven, guanya 1 000 € i per cada moto de 50 cc, guanya 600 €. D'altra banda, per tal de satisfer els objectius marcats pel fabricant, cal que el concessionari compleixi les condicions següents:

- a) Vendre entre 50 i 150 motos de 125 cc.
- b) Vendre almenys tantes motos de 50 cc com de 125 cc.
- c) No vendre més de 500 motos de 50 cc.

Determineu quantes motos de cada tipus ha de vendre el concessionari per a obtenir el màxim benefici, i calculeu aquest benefici màxim.

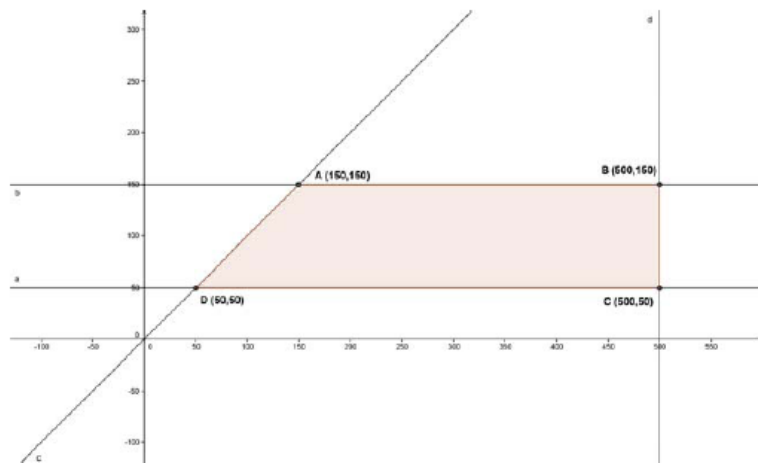
[2 punts]

Pregunta 3

Suposarem que el concessionari ven x motos de 50 cc. i y motos de 125 cc. Aleshores els guanys del concessionari seran de $G(x,y) = 600x + 1000y$, i les restriccions de l'enunciat es tradueixen com:

$$\left. \begin{array}{l} y \geq 50 \\ y \leq 150 \\ x \geq y \\ x \leq 500 \end{array} \right\}.$$

La representació gràfica de la regió factible és:



Tindrem, doncs, $G(150,150) = 240.000$, $G(500,150) = 450.000$, $G(500,50) = 350.000$, $G(50,50) = 80.000$. Per tant, els màxims guanys es produiran quan venen 500 motos de 50 cc. i 150 motos de 125 cc.

SETEMBRE 09

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + y \leq 10 \\ x + y \leq 8 \\ x \leq 4 \\ x \geq 0 \\ y \geq 0 \end{array} \right\}$$

- a) Representeu gràficament la regió de solucions [1 punt]
b) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = 2x + y$ en aquesta regió. Digueu per a quins valors s'assoleix aquest màxim. [1 punt]

Puntuació: Descomptar 0.5 punts en b) si no donen tot l'interval solució.

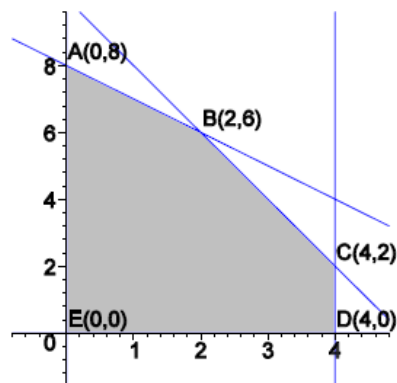
Solució:

a) Els punts d'intersecció són:

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ 2x + y = 10 \end{cases} \rightarrow B = (2, 6) \qquad \begin{cases} 2x + y = 10 \\ x = 4 \end{cases} \rightarrow C = (4, 2)$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow D = (4, 0) \qquad \begin{cases} x + y = 8 \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow A = (0, 8)$$

La gràfica és:



b) Els valors de $f(x, y)$ en els vèrtexs de la regió solució són:

	A(0,8)	B(2,6)	C(4,2)	D(4,0)	E(0,0)
$f(x, y) = 2x + y$	8	10	10	8	0
		màxim	màxim		

I s'obté el màxim en tot el segment BC i té per valor $f(x, y) = 10$.

5. Un llibreter vol fer una comanda de dos classes de llibres a dos editors, A i B. L'editor A ofereix lots de 5 llibres d'assaig i 5 novel·les per 50 €. L'editor B ofereix lots de 5 llibres d'assaig i 10 novel·les per 150 €. El llibreter vol comprar, com a mínim, 2500 llibres d'assaig i 3500 novel·les. Per un compromís adquirit amb l'editor B, no pot comprar a l'editor A més de 3 vegades el que compra a l'editor B. Determineu quants lots haurà de comprar a cada editor per minimitzar a el cost i poder complir el seu compromís. [4 punts]

Puntuació: Inequacions 1 punt; vèrtexs 1 punt; gràfica 1 punt; solució 1 punt. Total 4 punts.

Solució:

Planteig: Taula de dades:

	assaig	novel·la	preu/lot
A	5	5	50
B	5	10	150
	2500	3500	

Siguin x, y el nombre de lots que compra respectivament als llibreterers A i B.

Inequacions:

$$\left. \begin{array}{l} 5x + 5y \geq 2500 \\ 5x + 10y \geq 3500 \\ x \leq 3y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x + y \geq 500 \\ x + 2y \geq 700 \\ x \leq 3y, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0 \end{array} \right\}$$

Vèrtexs:

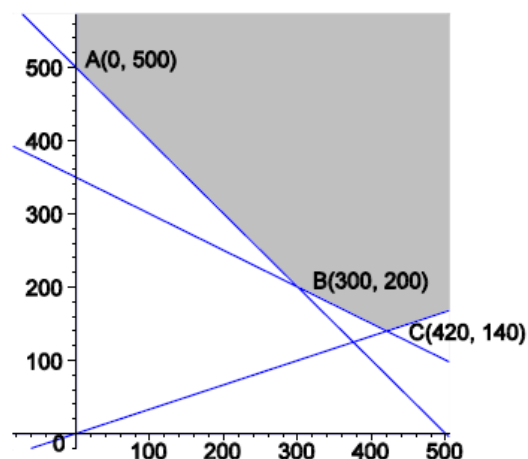
$$\left. \begin{array}{l} x + y = 500 \\ x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow A(0, 500) \quad \left. \begin{array}{l} x + y = 500 \\ x + 2y = 700 \end{array} \right\} \rightarrow A(300, 200)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + 2y = 700 \\ x = 3y \end{array} \right\} \rightarrow C(420, 140)$$

Funció objectiu: $f(x, y) = 50x + 150y$.

S'ha de trobar el seu mínim absolut.

Gràfica :



Valors de la funció de cost:

	A(0,500)	B(300,200)	C(420,140)
$f(x, y) = 50x + 150y$	75000	45000	42000

Per altra banda, sobre la semirrecta $y = \frac{1}{3}x$ que s'inicia en el punt C(420,140) en el

sentit d'augmentar x i y , el valor de la funció és: $f(x, y) = 50x + 150 \frac{x}{3} = 100x$ que creix

al créixer x . Per tant, el punt C(420,140) representa clarament el mínim de la funció.

Ha de comprar 420 lots al llibreter A i 140 lots al llibreter B i el cost total mínim corresponent, preservant les restriccions, és de 42000 €.

JUNY 09

QÜESTIONS

1. Considereu el sistema d'inequacions següent:

$$\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 2x + 5y \leq 10 \\ 3x + 4y \leq 12 \end{cases}$$

a) Dibuixeu la regió de solucions del sistema.

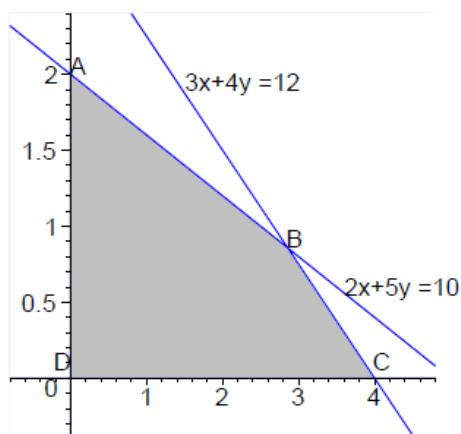
[1 punt]

b) Determineu el màxim de la funció $f(x, y) = x + 3y$ que està sotmesa a les restriccions anteriors.

[1 punt]

Solució:

a) La regió factible ve donada pel gràfic següent:



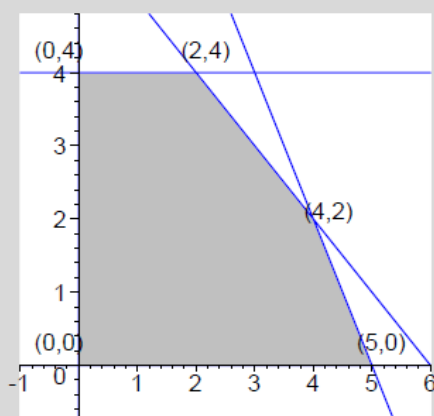
b) La taula de valors de $f(x, y)$ en els vèrtexs és:

	A(0,2)	B(20/7, 6/7)	C(4,0)	D(0,0)
$f(x, y) = x + 3y$	6	38/7	4	0
màxim				

Per tant el màxim s'obté en el punt A(0,2) i té valor 6.

PROBLEMES

5. La figura següent representa la regió de solucions d'un sistema d'inequacions lineals



- Trobeu el sistema d'inequacions que determina aquesta regió. [1 punt]
- Determineu el valor màxim de la funció $f_1(x, y) = x + y + 1$ en aquesta regió, i digueu en quins punts s'assoleix aquest màxim. [1 punt]
- Trobeu el valor de a perquè la funció $f_2(x, y) = ax + 2y + 3$ assoleixi el màxim en el segment comprès entre els extrems (4,2) i (5,0). [1 punt]
- Determineu els valors de a per als quals la funció $f_2(x, y) = ax + 2y + 3$ assoleix el màxim només en el punt (4,2). [1 punt]

Solució:

a) Sistema d'inequacions:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0, \\ 0 \leq y \leq 4, \\ x + y \leq 6, \\ 2x + y \leq 10. \end{array} \right\}$$

b) Determinem els valors de la funció en els vèrtexs.

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_1(x, y) = x + y + 1$	5	7	7	6	1
		màxim	màxim		

Per tant el màxim s'obté en tot el segment BC.

c) Determinem els valors de la funció en els vèrtexs.

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_2(x, y) = ax + 2y + 3$	11	2a+11	4a+7	5a+3	3

Cal que $4a + 7 = 5a + 3$ i per tant, $a = 4$. Verifiquem que es tracta d'un màxim:

	A(0,4)	B(2,4)	C(4,2)	D(5,0)	E(0,0)
$f_2(x, y) = 4x + 2y + 3$	11	19	23	23	3
			màxim	màxim	

d) Cal que,

$$\left. \begin{array}{l} 4a + 7 > 5a + 3 \\ 4a + 7 > 2a + 11 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} a < 4 \\ a > 2 \end{array} \right\} \rightarrow 2 < a < 4.$$

2. Considereu aquesta regió determinada pel sistema d'inequacions següent:

$$\left. \begin{array}{l} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x + y \geq 4 \\ -x + y \geq 0 \end{array} \right\}.$$

a) Representeu la regió.

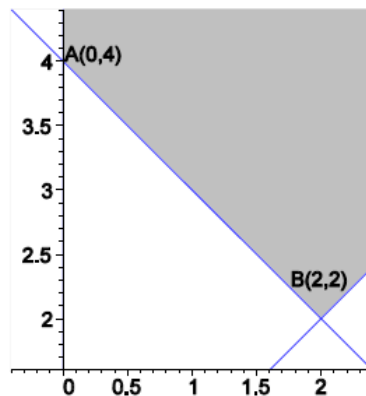
[1 punt]

b) Esbrineu si la funció $f(x, y) = x - 3y + 6$ té màxim en aquesta regió i, si és el cas, trobeu-lo.

[1 punt]

Solució:

a) Gràfic:



b) Sobre el costat infinit que comença en el vèrtex A(0,4), la funció $f(x, y) = x - 3y + 6$ decreix en allunyar-se del punt A, ja que la x és 0 i la y augmenta i com figura amb signe negatiu fa disminuir el total. Sobre el costat infinit que comença a B(2,2) la x creix, però la y creix tres vegades més, i com que té signe negatiu, fa disminuir el total. Per tant, el valor màxim de $f(x, y)$ s'ha d'assolir en algun punt del segment AB. Com $f(A) = f(0,4) = -6$, i $f(B) = f(2,2) = 2$, resulta que el màxim de la funció s'obté en el punt B(2,2) i pren el valor $f(2,2) = 2$.

5. Un agricultor disposa d'un camp on plantarà patates i pastanagues. Les patates per plantar costen 1,5 €/kg, i les pastanagues, 1,75 €/kg. La quantitat de patates plantades no pot superar el doble de la quantitat de pastanagues i tampoc no pot ser inferior a la meitat de les pastanagues plantades. La despesa que aquest agricultor ha de fer per plantar les patates i les pastanagues no pot superar els 150 €. Per cada kilogram que planta obté un benefici, després de venda, de 20 €/kg per les patates i de 50 €/kg per les pastanagues. Determineu quines quantitats de cada producte ha de sembrar per tal que el benefici després de la venda al mercat sigui màxim. [4 punts]

Solució:

Inequacions:

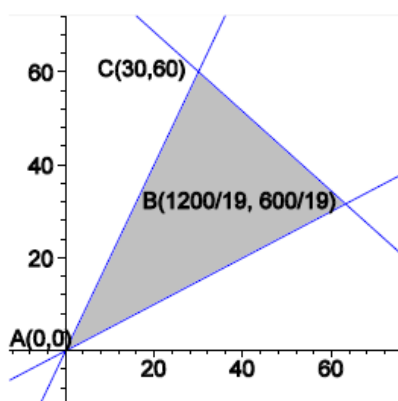
Anomenant x als kg de patates que sembra i y als de pastanagues, la despesa inicial és: $1,5x + 1,75y$ € que han de ser menor o igual que 150 €. Per altra banda tenim que $x \leq 2y$ i $x \geq \frac{y}{2}$. La funció que dona els beneficis és $B(x,y) = 20x + 50y$. Simplificant, el sistema d'inequacions és:

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2y \\ 2x \geq y \\ 1,5x + 1,75y \leq 150 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} x - 2y \leq 0 \\ 2x - y \geq 0 \\ 6x + 7y \leq 600 \end{array} \right\}$$

Vèrtexs:

$$\left. \begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 6x + 7y = 600 \end{array} \right\} \rightarrow B\left(\frac{1200}{19}, \frac{600}{19}\right), \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y = 0 \\ 6x + 7y = 600 \end{array} \right\} \rightarrow C(30, 60), \quad A(0,0).$$

Gràfic:



Valors:

	$A(0,0)$	$B\left(\frac{1200}{19}, \frac{600}{19}\right)$	$C(30,60)$
$B(x,y) = 20x + 50y$	0	$\frac{54000}{19} = 2842,11$	3600

Per tant el benefici màxim s'obté plantant 30 kg de patates i 60 kg de pastanagues i és de 3600 €.