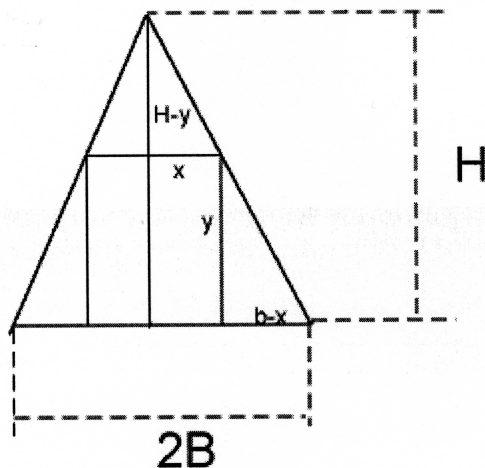


1

En un triangle isòsceles d'altura H i base $2B$ s'inscriu un rectangle. Calcular les dimensions del rectangle per a que tingui una àrea màxima.



Segons la figura dibuixada, l'àrea del rectangle a maximitzar és: $A(x,y) = 2xy$

La relació entre les variables s'ha de deduir per semblança de triangles:

$$\frac{H-y}{x} = \frac{y}{B-x} \rightarrow y = \frac{HB-Hx}{B}$$

Substituint l'àrea queda: $A(x) = 2x \frac{HB-Hx}{B} = \frac{2xHB-2Hx^2}{B}$

Derivem i igulem a zero: $A'(x) = \frac{2HB-4Hx}{B} = 0 \rightarrow x = \frac{B}{2}$

Comprovem la condició de màxim: $A''(x) = \frac{-4H}{B} < 0$ sempre. Per tant, és màxim.

Troblem el valor de l'altura y i l'àrea del rectangle per substitució.

SOLUCIÓ:

(u significa "unitat" ja que no s'ha especificat si són cm, m, etc en l'enunciat)

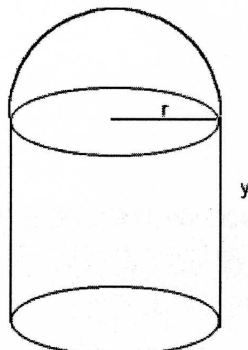
Les dimensions del rectangle són: base $2x = B$ u ; altura $y = \frac{H}{2}$ u

L'àrea màxima: $A = \frac{BH}{2}$ u²

2

En un cilindre substituïm una de les tapes per una semiesfera tal que la superfície total de la figura és de $\pi \text{ cm}^2$. Calcular les dimensions per a que el volum sigui màxim.

(Cal recordar les fórmules del cilindre, esfera, etc)



Amb les variables indicades a la figura la funció a maximitzar és:

$$V(r,y) = \pi r^2 y + \frac{2}{3} \pi r^3$$

La relació entre les variables és: $\pi r^2 + 2\pi r y + 2\pi r^2 = \pi$

Aïllant la variable y i simplificant s'obté: $y = \frac{1-3r^2}{2r}$ (*)

Substituint en el volum a maximitzar i simplificant:

$$V(r) = \pi \left(r^2 \frac{1-3r^2}{2r} + \frac{2}{3} r^3 \right) = \pi \cdot \left(\frac{3r-5r^3}{6} \right) (**)$$

Derivem la funció i igulem a zero:

$$V'(r) = \frac{\pi}{6} \cdot (3 - 15r^2) = 0 \rightarrow r = \pm \sqrt{\frac{3}{15}} = \pm \sqrt{\frac{1}{5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$$

De les quals només té sentit la solució positiva

Comprovem la seva condició de màxim:

$$V''(r) = \frac{\pi}{6} \cdot (-30r) \rightarrow V''\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right) < 0 \text{ per tant, és un màxim.}$$

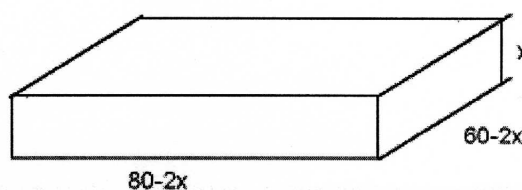
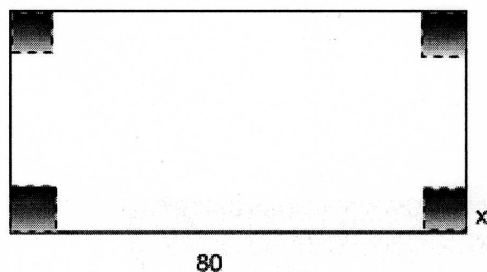
Trobem el valor de l'altura y i el volum V per substitució en (*) i (**)

SOLUCIÓ:

Les dimensions són: $r = \frac{\sqrt{5}}{5}$ $y = \frac{\sqrt{5}}{5}$ El volum màxim: $V = \frac{\pi\sqrt{5}}{15} \text{ cm}^3$

3

En una cartolina rectangular de 80x60 cm retallem en els 4 vèrtex uns quadrats iguals. Alcem les pestanyes i formem una capsa. Quines han de ser les dimensions dels quadrats per a que el volum de la capsa sigui màxim.



Segons la figura, el volum a maximitzar és:

$$V(x) = (80 - 2x) \cdot (60 - 2x) \cdot x = 4800x - 280x^2 + 4x^3$$

Derivant i igualant a zero: $V'(x) = 4800 - 560x + 12x^2 = 0 \rightarrow x = \frac{70 \pm 10\sqrt{3}}{3}$

Si agafem valors aproximats:

$x_1 \cong 35,35$ cm (no té sentit ja que si calculem les dimensions: $60 - 2 \cdot 35,35 < 0$)

$x_2 \cong 11,31$ cm

Comprovem la seva condició de màxim:

$V''(x) = -560 + 24x \rightarrow V''(11,31) = -288,56 < 0$. Per tant efectivament és un màxim.

Calcularem les dimensions de la capsa i el volum màxim per substitució.

SOLUCIÓ (aproximada):

Les dimensions són:

$$60 - 2x \cong 37,68 \text{ cm}$$

$$80 - 2x \cong 57,68 \text{ cm}$$

$$x \cong 11,31 \text{ cm}$$

$$\text{El volum màxim: } V \cong 24580,95 \text{ cm}^3$$

4

Una empresa obté un benefici net de 15€ per cada client si contracta el manteniment a 100 clients. Per cada client de més el benefici disminueix en 1 cèntim d'euro. Quants clients ha de tenir per a que el benefici total net sigui màxim? (Suggeriment: Agafar com incògnita el número de clients de més de 100)

Esquema de la situació:

Nombre clients	100	$100 + x$
Benefici/client	15 €	$15 - 0,01x$
Benefici total	$100 \cdot 15 = 1500$	$(100 + x)(15 - 0,01x)$

La funció a maximitzar és:

$$B(x) = (100 + x)(15 - 0,01x) = -0,01x^2 + 14x + 1500$$

$$\text{Derivem i igualem a zero: } B'(x) = -0,02x + 14 = 0 \rightarrow x = 700$$

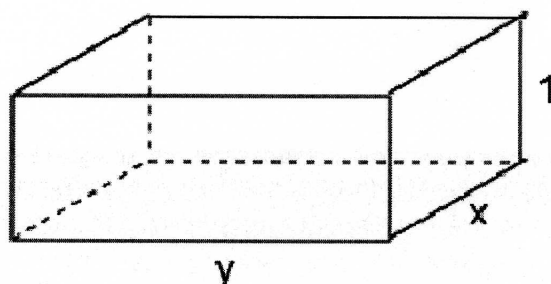
$$\text{Comprovem la condició de màxim: } B''(x) = -0,02 \rightarrow B''(700) < 0.$$

SOLUCIÓ:

El nombre de clients per obtenir màxim benefici és de $100 + x = 100 + 700 = 800$
El benefici màxim aconseguit és de $800 \cdot (15 - 0,01 \cdot 700) = 6400$ €.

5

Un contenidor té forma d'ortoeidre (capsa de sabates) d'altura 1 metre. El preu de construcció per cada metre quadrat de base és de 50€, el de la tapa superior és de 60 € i el de les cares laterals és de 40 €. Si el volum del contenidor ha de ser de 9 metres cúbics, quines dimensions ha de tenir per a que el cost de fabricació sigui mínim?



Volum de la figura: $V(x,y) = x \cdot y \cdot 1 = xy = 9 \text{ m}^3 \rightarrow y = \frac{9}{x}$

Cost de fabricació considerant el preu de cadascuna de les parets:

$$C(x,y) = 50xy + 60xy + 2 \cdot 40x + 2 \cdot 40y = 110xy + 80y + 80x$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\underbrace{\hspace{2cm}}$
 Base Tapa Laterals

Substituint la funció a maximitzar és: $C(x) = 990 + \frac{720}{x} + 80x$

Derivant i igualant a zero: $C'(x) = \frac{-720}{x^2} + 80 = 0 \rightarrow x^2 = 9 \rightarrow x = \pm 3$

De les solucions només la positiva té sentit. Comprovem la condició de mínim:

$$C''(x) = \frac{1440}{x^3} \rightarrow C''(3) = \frac{1440}{27} > 0$$

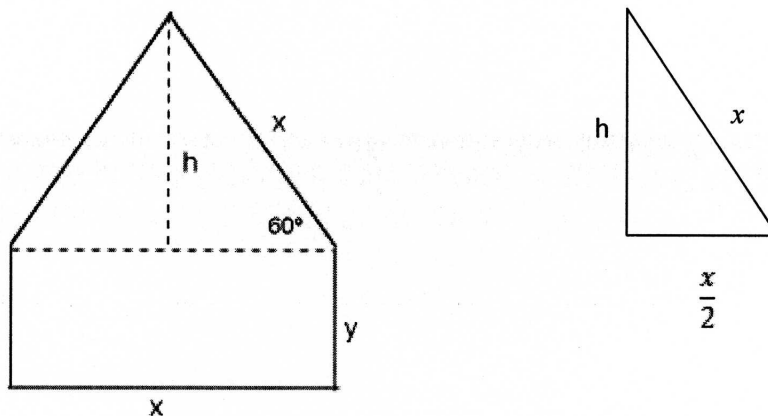
SOLUCIÓ:

Les dimensions són: $x = y = 3 \text{ m}$ i per tant el cost mínim seria de $C(3) = 1470\text{€}$

6

En una finestra rectangular hem substituït un costat per un triangle equilàter. El perímetre total de la finestra ha de ser de 6 metres. Quines dimensions ha de tenir per a que la superfície sigui màxima?

Gràficament:



La relació entre les variables x i y que proporciona el perímetre és: $3x + 2y = 6$

Aplicant trigonometria o el teorema de Pitàgores al triangle rectangle es pot deduir que: $h = \frac{\sqrt{3}}{2} x$

La funció a optimitzar és la suma de les superfícies del rectangle i del triangle:

$$S(x,y) = xy + \frac{\sqrt{3}x^2}{4}$$

Sabem per la relació inicial que: $y = \frac{6-3x}{2}$, per tant, substituint:

$$S(x) = x \left(\frac{6-3x}{2} \right) + \frac{\sqrt{3}x^2}{4} = \frac{12x-6x^2+\sqrt{3}x^2}{4}$$

Derivem i igulem a zero: $S'(x) = \frac{12-12x+2\sqrt{3}x}{4} = 0 \rightarrow x = \frac{12+2\sqrt{3}}{11} \approx 1,41m$.

Comprovem la condició de màxim: $S''(x) = \frac{-6+\sqrt{3}}{2} \rightarrow S''(1,41) < 0$.

SOLUCIÓ:

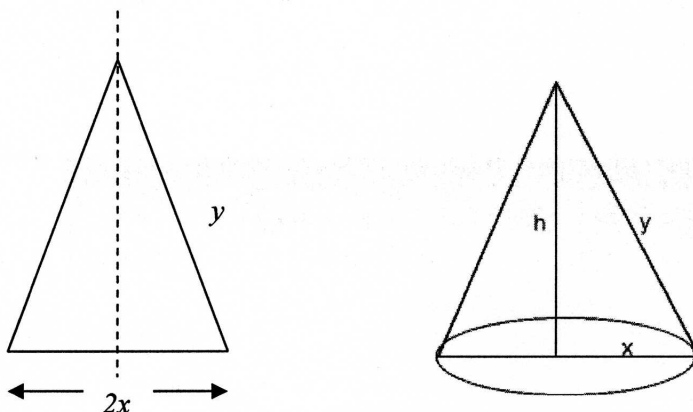
Les dimensions són: $x \approx 1,41 m$ $y \approx 0,89m$ $h \approx 1,22m$

La superfície màxima és: $S \approx 2,1 m^2$

7

Un triangle isòsceles de perímetre 10 cm gira al voltant de l'altura relativa al costat desigual. Trobar-ne les dimensions per a que el volum sigui màxim

Gràficament al girar el triangle genera un con:



Del perímetre del triangle isòsceles es dedueix: $2x + 2y = 10 \rightarrow x + y = 5$

I aplicant el teorema de Pitàgores l'altura del con serà: $h = \sqrt{y^2 - x^2}$

El volum del con a optimitzar segons l'esquema gràfic és:

$$V(x,y) = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{y^2 - x^2}$$

Sabem per la relació inicial que: $y = 5 - x$. I per tant, substituint i operant:

$$V(x) = \frac{1}{3}\pi x^2 \sqrt{25 - 10x} = \frac{\pi}{3} \sqrt{25x^4 - 10x^5}$$

Derivem i igulem a zero: $V'(x) = \frac{\pi}{3} \frac{100x^3 - 50x^4}{\sqrt{25x^4 - 10x^5}} = 0 \rightarrow 100x^3 - 50x^4 = 0$

Amb solucions $x = 0$ (no té sentit una base zero) i $x = 2$.

Comprovem la condició de màxim de la solució, en aquest cas estudiant el signe de la primera derivada al voltant del valor $x = 2$ (la segona derivada es complica massa)

$$V'(1,9) \approx 2,03 > 0 \text{ creixent} \quad V'(2,1) \approx -2,75 < 0 \text{ decreixent}$$

SOLUCIÓ:

Les dimensions del triangle són:

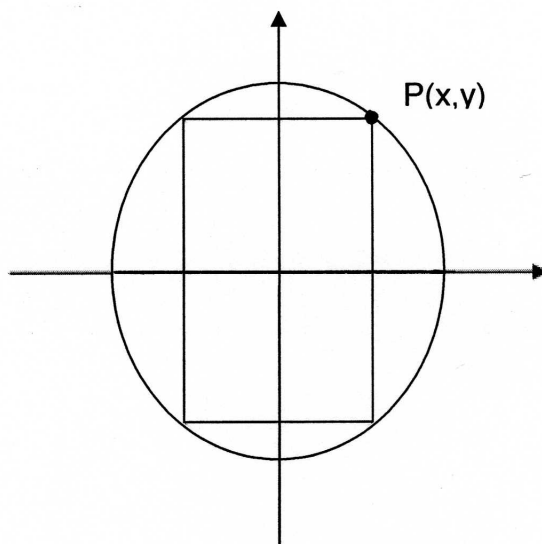
$$\text{Base: } 2x = 4\text{ cm} ; \text{ costat igual: } y = 3\text{ cm} ; \text{ altura: } h = \sqrt{5}\text{ cm}$$

El volum màxim és: $V \approx 9,37\text{ cm}^3$

8

Quina és l'àrea més gran que pot tenir un rectangle de costats paral·lels als eixos de coordenades inscrit en la circumferència $x^2 + y^2 = 5$

Gràficament:



$P(x,y)$ és un punt de la circumferència i per tant les seves coordenades compleixen que: $x^2 + y^2 = 5 \rightarrow y = \sqrt{5 - x^2}$

L'àrea del rectangle és: $A(x,y) = 2x \cdot 2y = 4xy$.

Substituint la funció a maximitzar és: $A(x) = 4x\sqrt{5 - x^2} = 4\sqrt{50x^2 - x^4}$ (*)

Derivem i igulem a zero: $A'(x) = 4 \frac{100x - 4x^3}{2\sqrt{50x^2 - x^4}} = 0 \rightarrow 100x - 4x^3 = 0$

Hi ha tres solucions: $x_1 = 0$, $x_2 = 5$ i $x_3 = -5$, de les que té sentit només $x_2 = 5$.

Comprovem la condició de màxim estudiant el signe de la primera derivada en valors pròxims a 5, ja que la segona derivada es complica molt:

$A'(4,9) \approx 1,5 > 0$ (creixent) $A'(5,1) \approx -1,6 < 0$ (decreixent) $\rightarrow$ és un màxim.

SOLUCIÓ:

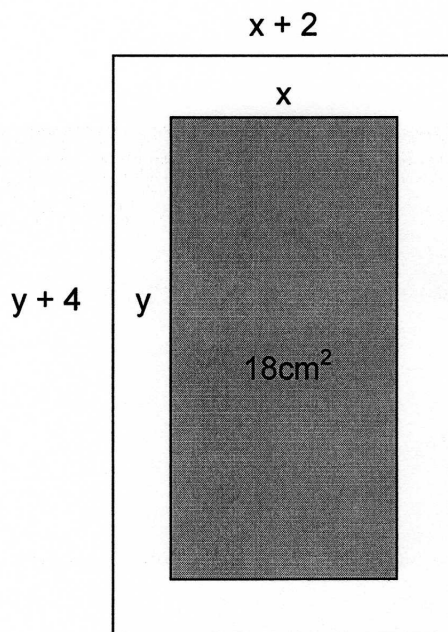
Substituint en la fórmula de l'àrea (*), l'àrea màxima del rectangle és:

$A = 100 \text{ u}^2$ (unitats quadrades, ja que no s'especifica més en l'enunciat)

9

Un full de paper ha de tenir 18 cm^2 de text imprès, marges superior i inferior de 2 cm i marges laterals d'1 cm. Troba raonadament, les dimensions que minimitzen la superfície del paper.

Gràficament:



La relació entre les variables és: $xy = 18$ (àrea impresa) $\rightarrow y = \frac{18}{x}$

La funció a minimitzar és: $S(x,y) = (x+2)(y+4)$

Substituint i operant: $S(x) = (x+2) \cdot \left(\frac{18}{x} + 4\right) \rightarrow S(x) = 4x + \frac{36}{x} + 26$

Derivant i igualant a zero: $S'(x) = 4 - \frac{36}{x^2} = 0 \rightarrow x = \pm 3 \text{ cm}$ on només té sentit la solució positiva (i per tant $y = 6 \text{ cm}$ segons la relació inicial)

Comprovem la condició de mínim: $S''(x) = \frac{72}{x^3} \rightarrow S''(3) \approx 2,7 > 0$ (és un mínim).

SOLUCIÓ:

Les dimensions optimes del full (amb marges inclosos seran):

$$x + 2 = 5 \text{ cm} \quad y + 4 = 10 \text{ cm}$$

i la superfície mínima del full serà: $S = 50 \text{ cm}^2$