



APLICACIONS DE LA DERIVADA

1. RECTA TANGENT I NORMAL

2. DETERMINACIÓ DE PARÀMETRES

3. CREIXEMENT I DECREIXEMENT

4. VELOCITAT I ACELERACIÓ - PUNTS SINGULARS

1. RECTA TANGENT I NORMAL

1.1

Trobeu l'equació de la recta que passa per l'origen i és tangent a la funció $y = f(x)$ en $x = a$ i $f'(a) = 3$.

Sol: $y = 3x$

1.2

Donada la funció $y = x^3 + x^2 + 2x - 1$. Trobeu les equacions de les rectes tangents en: a) $x = 0$ b) $x = 1$ i c) $x = -1$.

RAONAMENT

c) Punt d'abscissa $x = -1$. Ordenada del punt de contacte $y(-1) = -3$
Punt de contacte $A(-1, -3)$.

Pendent de la recta tangent en A: $y' = 3x^2 + 2x + 2$, $m = y'(-1) = 3$, $m = 3$

Feix de rectes de pendent $m = 3$: $y = 3x + n$

La que passa pel punt $A(-1, -3)$ compleix: $-3 = 3(-1) + n$; $\Rightarrow n = 0$

Equació de la recta tangent $y = 3x$

Sol:

a) $y = 2x - 1$

b) $y = 7x - 4$

c) $y = 3x$

1.3



a) Si la recta tangent a la funció $f(x)$ en $x = 1$ és $y = 3x + 2$, calculeu $f'(1)$.	b) Si en $x = 2$ la recta tangent és $y = -x + 5$, calculeu $f'(2)$.
---	--

Sol:

a) $f'(1) = 3$

b) $f'(2) = -1$

1.4

Trobeu la recta tangent a la paràbola $y = x^2$ en el punt $(0,0)$ i dibuixeu-la

Sol: $y = 0$

1.5

Trobeu l'equació de les rectes tangents a la funció $y = x^2/3$ en els punts d'abscissa:

a) $x = 0$

b) $x = 1$

c) $x = 2$

RAONAMENT

c) Punt d'abscissa $x = 2$. Ordenada del punt de contacte $y(2) = 4/3$
Punt de contacte $A(2, 4/3)$.

Pendent de la recta tangent en A: $y' = 2x/3$, $m = y'(2) = 4/3$, $m = 4/3$

Feix de rectes de pendent $m = 4/3$: $y = 4x/3 + n$

La que passa pel punt $A(2, 4/3)$ compleix: $4/3 = 8/3 + n$; $\Rightarrow n = -4/3$

Equació de la recta tangent $y = 4x/3 - 4/3$

Sol:

a) $y = 0$

b) $y = 2x/3 - 1/3$

c) $y = 4x/3 - 4/3$

1.6

Trobeu l'equació de les rectes tangents a la funció $y = x$ en els punts



d'abscissa:

a) $x = 0$

b) $x = 9$

Sol:

a) $x=0$

b) $y=-x/6 - 9/6$

1.7

a) Calculeu l'angle (α) que forma la recta tangent a la funció $y=2x^2-3x+1$ amb l'eix OX en el punt d'abscissa $x=1$. b) Digues si la funció en el punt $x=1$ es creixent o decreixent.

RAONAMENT

a) Punt de contacte A : si $x=1 \Rightarrow y(1)=2-3+1=0$ punt A(1,0)

Pendent de la recta tangent en A: $m = y'(1)=4(1)-3=1 \Rightarrow m = 1$

atès que $\text{tg}(\alpha)=m \Rightarrow \text{tg}(\alpha)=1 \Rightarrow (\alpha)=45^\circ$

b) Atès que en el punt A, $m = \text{tg}(\alpha)=1 > 0$ positiva, la funció creix

1.8

Trobeu els punts de la funció $y=x^3+x^2+x$ en que la tangent és paral·lela a la recta $y=2x+5$.

RAONAMENT

Cerquem un punt de contacte (a,b) tal que: $y'(a)=2$

Atès que $y'(x) = 3x^2+2x+1$, $y'(a)=2 \Rightarrow 3a^2+2a+1=2 \Rightarrow$

$$3a^2+2a-1=0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = 1/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -1 \\ b = 13/27 \end{cases}$$

Dues solucions $\begin{cases} A_1(-1,-1) \\ A_2(\frac{1}{3}, \frac{13}{27}) \end{cases}$



1.9

Trobeu els valors d' x per tal que: la tangent a la funció $f(x)$ formi un angle de 45° amb l'eix horitzontal, en els casos següents:

a) $f(x) = x^2 + x$ b) $f(x) = 2x^2 - 5x$ c) $f(x) = 3x^2 + 7x - 1$

RAONAMENT

c) si $f(x) = 3x^2 + 7x - 1 \Rightarrow f'(x) = 6x + 7$ per tot valor d' x .

Atès que: $\begin{cases} m = 6x + 7 \\ m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \end{cases} \Rightarrow 6x + 7 = 1 \Rightarrow x = -1$

Ordenada del punt de contacte: $y(-1) = 3(-1)^2 + 7(-1) - 1 = -5 \Rightarrow y = -5$

Punt de contacte $A(-1, -5)$

Sol:

a) $x = 0$

b) $x = 3/2$

c) $x = -1$

1.10

Trobeu els valors d' x per tal que: la tangent a la funció $f(x)$ sigui paral·lela a l'eix horitzontal en els casos següents:

a) $f(x) = x^2 - 8x$ b) $f(x) = x^3 - 12$ c) $f(x) = 3x + 1$

RAONAMENT

a) si $f(x) = x^2 - 8x \Rightarrow f'(x) = 2x - 8$ per tot valor d' x .

Atès que: $\begin{cases} m = 2x - 8 \\ m = \operatorname{tg} 0^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = 4$

Ordenada del punt de contacte: $y(4) = (4)^2 - 8(4) = -16 \Rightarrow y = -16$

Punt de contacte $A(4, -16)$

Sol:

a) $x = 4$

b) $x = 0$

c) cap



1.11

Calculeu l'angle que forma la recta tangent a la funció $f(x)$ en $x=0$ amb l'eix horitzontal.

a) $f(x)=x^2+x$

b) $f(x)=x^2-5$

c) $f(x)=x^3-3x$

RAONAMENT

c) $f(x)=x^3-3x$ $f'(x)=3x^2-3$ per tot valor d' $x \Rightarrow m = f'(0) = -3$

$$\begin{cases} m = -3 \\ m = \operatorname{tg} \alpha \end{cases} \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha = -3 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg}(-3) = -71'56^\circ$$

Sol:

a) 45°

b) 0°

c) $\operatorname{arc} \operatorname{tg}(-3)$

1.12

Determina els punts de la corba $y = \frac{x}{x+1}$ de manera que la seva tangent formi un angle de 45° amb l'eix horitzontal

Sol: $x=0$ $x=-2$

1.13

Calculeu la recta tangent a la funció $y = \ln x$ en el punt d'abscissa $x=1$.

Sol: $y=x$

1.14

Calculeu la recta tangent a la funció $y = \sin x \cdot \cos x$ en el punt d'abscissa $x = \pi$.

Sol: $y = x$



1.15

Determina el punt de la funció $f(x)=x^2-4x+3$ en que la seva recta tangent és paral·lela a l'eix d'abscisses.

RAONAMENT

si $f(x) = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow f'(x) = 2x - 4$ per tot valor d' x .

Atès que: $\begin{cases} m = 2x - 4 \\ m = \operatorname{tg} 0^\circ = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$

Ordenada del punt de contacte: $y(2) = (2)^2 - 4(2) + 3 = -1 \Rightarrow y = -1$

Punt de contacte $A(2, -1)$

1.16

Trobeu la recta tangent a la funció $f(x)=x^3+x$ en el punt $P=(1,0)$.

Sol: $y=4x-4$

1.17

Trobeu el pendent i l'equació de la recta tangent a la funció $f(x)=x^2-x+2$ en el punt $x=1$.

Sol: $m=1 \quad y=x+2$

1.18

Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $y=x^2-4x+3$ en els punts, en que la paràbola talla a l'eix horitzontal.

RAONAMENT

Càlcul de l'abscissa dels punts de tall amb l'eix OX.



$$x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases}$$

Càlcul dels punts de tall amb l'eix OX.

$$\begin{cases} x = 1 \\ x = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1(1,0) \\ A_2(3,0) \end{cases}$$

Pendent de les rectes tangents:

$$y = m x + n \quad m = y'(x) = 2x - 4 \Rightarrow \begin{cases} m_1 = 2(1) - 4 = -2 \\ m_2 = 2(3) - 4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{Terme independent } n = y - m x \Rightarrow \begin{cases} n_1 = 0 - (-2)(1) = 2 \\ n_2 = 0 - 2(3) = -6 \end{cases}$$

$$\text{Equacions de les rectes tangents} \Rightarrow \begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = 2x - 6 \end{cases}$$

1.19

Trobeu el pendent de la recta tangent a la funció $y = x^2 - 3x + 2$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

Sol: $m = 1$

1.20

Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = 5x^2 - 8x + 1$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

Sol: $y = 12x - 19$

1.21

Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = 1/x$ en el punt



d'abscissa $x=2$.

Sol: $y=-x/4+1$

1.22

Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $y=x^3-3x^2+2x+1$ en el punt d'abscissa $x=-1$.

RAONAMENT

Punt d'abscissa $x = -1$. Ordenada del punt de contacte $y(-1) = -5$

Punt de contacte $A(-1, -5)$.

Pendent de la recta tangent en A: $y'=3x^2-3x+2$, $m=y'(-1)=11$, $m=11$

Feix de rectes de pendent $m = 11$: $y = 11x + n$

La que passa pel punt $A(-1, -5)$ compleix: $-5 = -11 + n$; $\Rightarrow n = 6$

Equació de la recta tangent $y = 11x+6$

1.23

Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $y=x^2+2x-2$ en els punts en que l'ordenada és igual a l'abscissa.

Sol: $y=4x-3$ $y=-2x-6$

1.24

Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = x/(1+x)$ a l'origen de coordenades.

Sol: $y = x$

1.25

Trobeu els punts de la gràfica de la funció $y=x^3-3x^2-9x+2$ en que la



tangent és paral·lela a l'eix OX.

Sol: $x=-1$ $x=3$

1.26

Trobeu els punts de la gràfica de la funció $y=x^2+7x+7$ en que la tangent és paral·lela a la recta $y=3x$.

RAONAMENT

si $y=x^2+7x+7 \Rightarrow y'=2x+7$ per tot valor d' x .

Atès que: $\begin{cases} m = 2x + 7 \\ m = 3 \end{cases} \Rightarrow 2x + 7 = 3 \Rightarrow x = -2$

Ordenada del punt de contacte: $y(-2)=(-2)^2+7(-2)+7=-3 \Rightarrow y = -3$

Punt de contacte $A (-2, -3)$

1.27

Donada la funció $f(x)=x^2+3x$, trobeu els punts de la funció en que la seva tangent forma amb l'eix horitzontal un angle de 45° .

Sol: $(-1, -2)$

1.28

Trobeu l'equació de la tangent i la normal a la corba: $y=x^3+2x-1$ en el punt d'abscissa $x=1$.

RAONAMENT

Punt de contacte: $x=1$ $y(1)=1^3+2\cdot 1-1=2 \Rightarrow A(1, 2)$

a) Pendent i terme independent de la recta tangent:

$y'=3x^2+2$ $m=y'(1)=5$ $n=y - m x = 2 - 5 \cdot 1 = -3$

Equació de la recta tangent $y = 5x - 3$



b) Pendent i terme independent de la recta normal

$$m = -1/y'(1) = -1/5 \quad n = y - m x = 2 - (-1/5) \cdot 1 = 11/5$$

Equació de la recta normal $y = -x/5 + 11/5$

1.29

Determineu les equacions de les rectes tangent i normal a les següents funcions en els seus punts d'inflexió.

a) $y = 2x^3 + 3x^2 - x + 1$

b) $y = -x^3 + 3x^2 - 2x$

Sol:

a) $y = -5x/2 + 3/4$

$y = 2x/5 + 11/5$

b) $y = x - 1$

$y = -x + 1$

1.30

Trobeu l'equació de la recta tangent a la funció $y = f(x)$ en els punts indicats:

a) $y = x^2$ en $x = 1$

b) $y = 1/x$ en $x = 0$

Sol:

a) $y'(1) = 2 \Rightarrow y = 2x - 1$

b) $y'(0) = \pm \infty \Rightarrow x = 0$

1.31

Equació de la recta tangent a la gràfica de la funció $y = \ln(x+1)$ en el punt d'abscissa $x = 0$.

Sol: $y = x$



1.32

Equació de la recta tangent a la funció $y = \arctg x$ en el punt d'abscissa $x=1$.

RAONAMENT

Punt de contacte: $x=1 \Rightarrow y=\arctg(1)=\frac{\pi}{4}$ punt $A(1, \frac{\pi}{4})$

Pendent i terme independent de la recta tangent:

$$y' = \frac{1}{1+x^2} \Rightarrow m = \frac{1}{1+1^2} = \frac{1}{2} \quad n = y - m x = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

Equació de la recta tangent:

$$y = \frac{1}{2} x + \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}(x-1) + \frac{\pi}{4}$$

1.33

Equació de la recta tangent a la funció $y = \sin 2x$ en el punt d'abscissa $x=\pi/4$.

Sol: $y=1$

1.34

Donada la funció $y=(x-1)/(x+1)$, trobeu l'equació de les seves tangents paral·leles a la recta: $x-2y+1=0$.

Sol: $x-2y-1=0 \quad x-3y+7=0$

1.35

Equació de la recta tangent a la funció $y = e^x$ que és paral·lela a la recta $y=x+3$.



Sol: $y=x+1$

1.36

Equació de les rectes que formen un angle de 45° amb l'eix horitzontal i són tangents a la corba $y = \frac{x}{x+1}$.

RAONAMENT

Pendent de la recta tangent per tot valor de l'abscissa x :

$$m = y' = \frac{(x+1) - x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$$

la recta cercada té per pendent $m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \Rightarrow$

$$\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{(x+1)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Punts de contacte: } \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1(0,0) \\ A_2(-2,2) \end{cases}$$

Equacions de les rectes tangents:

$$\begin{cases} A_1(0,0) \\ A_2(-2,2) \end{cases} \text{ i } m=1 \Rightarrow \begin{cases} y = 1(x-0)+0 = x \\ y = 1(x+2)+2 = x+4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ y = x+4 \end{cases}$$

1.37

Trobeu els punts de la funció $y = \ln x$ on la tangent és paral·lela a la recta $4x-2y+1=0$.

Sol: $x=1/2$

1.38



Donades les funcions: $y = \sqrt{3x - 2}$ i $y = 3x - 4$ trobeu els seus punts de tall P i P' així com les pendent de les seves tangents en aquests punts.

Sol: $P(1, -1)$, $m_1 = 3$, $m_2 = 3$; $P'(2, 2)$, $m_1 = 3/2$, $m_2 = 3$

1.39

Trobeu el pendent de la recta tangent a la corba $y = x^2 + 3x - 1$ en el punt d'abscissa $x = -1$.

Sol: $m = 1$

1.40

Donada la funció $f(x) = 1/x$ trobeu els punts en que la seva tangent té per pendent $-1/4$. i doneu l'equació de la recta tangent.

RAONAMENT

Pendent de la recta tangent per tot valor de l'abscissa x :

$$m = y' = \frac{-1}{x^2}$$

la recta cercada té per pendent $m = -1/4 \Rightarrow$

$$\begin{cases} m = \frac{-1}{4} \\ m = \frac{-1}{x^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases}$$

$$\text{Punts de contacte: } \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ y = \frac{-1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1(2, \frac{1}{2}) \\ A_2(-2, \frac{-1}{2}) \end{cases}$$



Equacions de les rectes tangents:

$$\begin{cases} y = -\frac{1}{4}(x-2) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x + 1 \\ y = -\frac{1}{4}(x+2) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}x - 1 \end{cases}$$

1.41

Equació de la recta tangent a la corba $y = \ln(x+1)$ en $x=0$

Sol: $y = x$

1.42

Equació de les tangents a la funció $y = x^3 - 3x^2$ que són paral·leles a la recta $9x - y + 3 = 0$.

Sol: $y = 9x$ $y = 9x + 5$

1.43

Equació de les tangents a la funció $y = x^2 + x - 2$ en els punts de tall amb l'eix horitzontal.

Sol: $y = 3x - 3$; $y = -3x - 6$

1.44

Trobeu els punts de la funció $y = \ln x$ en que la tangent és paral·lela a la bisectriu del primer quadrant i l'equació de la tangent i normal en aquests punts.

RAONAMENT

La bisectriu del primer quadrant té per equació $y = x$ i per pendent



$m = 1$. Funció derivada $y' = \frac{1}{x}$

Determinació dels punts de contacte: $\begin{cases} m = 1 \\ m = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow x = 1, \quad y(1) = \ln 1 = 0$

$A(1,0)$

Equació de la tangent

$$\begin{cases} m = 1 \\ A(1,0) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = 1(x - 1) \Rightarrow y = x - 1$$

Equació de la normal

$$\begin{cases} m = -1 \\ A(1,0) \end{cases} \Rightarrow y - 0 = -1(x - 1) \Rightarrow y = -x + 1$$

1.45

Equació de les tangents a la funció $y = \frac{x}{x+1}$ que són paral·leles a la recta $y = 4x - 2$.

Sol: $y = 4x + 1$ $y = 4x + 9$

1.46

Trobeu un valor d' x on les tangents a les funcions $y = x^2 - x + 3$ i $y = x^3 - x^2$ són paral·leles. Doneu les seves equacions.

Sol:

a) $x = 1$; $y = x + 2$, $y = x$ b) $x = 1/3$, $y = -x/3 + 26/9$, $y = -x/3 + 1/27$



1.47

Trobeu els punts de la funció $y = x^3 - 3x^2 + 1$, per tal que la seva recta tangent sigui paral·lela a la recta $y = 9x + 2$.

Sol: $x = -1$ $x = 3$

1.48

Trobeu la tangent i la normal a les corbes en els punts indicats:

a) $y = (x+1)\sqrt{x-2}$ en $x = 3$ b) $y = \sqrt[3]{x-1}$ en $x = 0$

c) $y = \frac{\sin(x) - \cos(x)}{\sin^2 x}$ en $x = \frac{\pi}{4}$ d) $y = e^{\frac{1}{x}} + \ln x$ en $x = 1$

RAONAMENT

d) $y = e^{\frac{1}{x}} + \ln x$ en $x = 1$

Punt de contacte:

$x = 1$ $y(1) = e^{-1} + \ln 1 = 1/e + 0 = 1/e \Rightarrow P(1, 1/e)$

Funció derivada

$$y' = \frac{1}{x^2} e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x}$$

Equació de la recta tangent

$m = y'(1) = (1/1^2) e^{-1} + (1/1) = 1 + 1/e = (e+1)/e$ i $P(1, 1/e)$

$$y = \frac{e+1}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$$

Equació de la recta normal

$m = -1/y'(1) = -e/(e+1)$ i $P(1, 1/e)$

$$y = \frac{-e}{e+1}(x-1) + \frac{1}{e}$$

Sol:

a) tangent $y = 3x - 5$

normal $x + 3y - 15 = 0$

b) tangent $y = x/3 - 1$

normal $y = -3x - 1$



c) tangent $y = 2\sqrt{2}x - \pi\sqrt{2}/2$

normal $y = -x/2\sqrt{2} + \pi/8\sqrt{2}$

d) tangent $y = \frac{1+e}{e}x - 1$

normal $y = \frac{-e}{1+e}x + 1 + \frac{1}{e^2+e}$

1.49

Trobeu un punt de l'interval $(0,5)$ on la tangent a la corba $y = \arctg(2x)$ és paral·lela a la recta $2x - 37y = 6$.

Sol: $x=3$

1.50

Digues en quins punts de la corba $y = x^3 - x^2 - 2x$, la recta tangent forma un angle de 135° amb la part positiva de l'eix d'abscisses.

Sol: $x = -1/3$, $x=1$

1.51

Trobeu els punts de la funció $y = 2x^3 - 3x^2 + 12x$, en que la seva tangent és paral·lela a la recta $y=24x-10$.

Sol: $(-1, -17)$ i $(2, 28)$

1.52

Calculeu l'equació de la recta tangent a la corba $y=x^3-3x^2+2$ en el seu punt d'inflexió.

RAONAMENT

Càlcul del punt d'inflexió:

$$y'' = 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y(1) = 0 \Rightarrow P(1, 0)$$

Pendent de la recta tangent en $x=1$



$$y' = 3x^2 - 6x \quad m = y'(1) = 3(1)^2 - 6(1) = -3$$

Equació de la recta tangent:

$$m = -3 \quad i \quad P(1,0) \Rightarrow y = -3(x - 1) + 0 \Rightarrow y = -3x + 3$$

2. DETERMINACIÓ DE PARÀMETRES

2.1

Calcula el valor d'a per tal que; $f'(2) = 2$ i $f(x) = \frac{x^2 + a}{x}$.

Sol: $a = -4$

2.2

Determineu el valor d'a per tal que la tangent a la corba $y = \frac{x - a}{x + a}$ en el punt d'abscissa $x=0$ tingui el pendent igual a 2.

Sol: $a = 1$

2.3

Trobeu el valor de k per tal que la tangent a la corba $y = \frac{x+1}{x^2}$ en el punt $x=1$ sigui perpendicular a la recta $y = kx$.

RAONAMENT

$$y' = \frac{x^2 - 2x(x+1)}{x^4} \quad m = y'(1) = -3 \quad i \quad m = -1/k \Rightarrow k = 1/3$$

2.4

Equació de la paràbola $y = ax^2 + bx + c$ que passa pel punt $(1, -1)$ i, que



la recta tangent en el punt $(0,-3)$ té per pendent 0.

Sol: $y=2x^2-3$

2.5

Trobeu l'equació de la paràbola $y = ax^2 + bx + c$ que té per tangent $y=4x+1$ en el punt $A(1,2)$ i passa pel punt $B(0,1)$.

Sol: $y=3x^2-2x+1$

2.6

Trobeu l'equació particular de la família de funcions $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ que passa pel punt $(0,3)$ i té tangent horitzontal en els punts d'abscissa en $x = -2$ i $x = 2$.

Sol: $y=x^3-12x+3$

2.7

Trobeu el valor de k , per tal que la funció $f(x) = x^2 - kx$, tingui en $x=2$, una recta tangent que formi un angle de 45° amb l'eix d'abscisses.

RAONAMENT

Punt de contacte $x=2$, $f(2)=4-2k \Rightarrow P(2, 4-2k)$

Funció derivada $f'(x)=2x-k$

Valor del pendent $\begin{cases} m = \operatorname{tg} 45^\circ = 1 \\ m = f'(2) = 4 - k \end{cases} \Rightarrow k=3$

2.8

Trobeu el valor d' a per tal que la funció $y=ax^2+2x+3$ tingui en $x=1$ una recta tangent que formi un angle de 45° amb l'eix d'abscisses.

Sol: $a=-1/2$



2.9

La corba $y = ax^2 + bx + c$ passa pel punt $P(1,5)$, i es tangent en el punt $(0,1)$ a la bisectriu del primer quadrant. Trobeu l'equació de la corba.

Sol: $y = 3x^2 + x + 1$

2.10

Trobeu el valor d' a per tal que la funció $y = x^2 - ax + 2$ tingui un mínim en $x=1$.

Sol: $a=2$

2.11

Trobeu el valor dels paràmetres a , b , c i d per tal que; la funció $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tingui un màxim en el punt $(0,1)$ i un mínim en el punt $(1,2)$.

RAONAMENT

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6ax + 2b$$

per passar per	$(0,1)$	$1 = 0 + 0 + 0 + d$	$d = 1$
per passar per	$(1,2)$	$2 = a + b + c + d$	$a + b + c = 2$

màxim en $x=0$	$f'(0) = 0$	$0 = 0 + 0 + c$	$c = 0$
mínim en $x=1$	$f'(1) = 0$	$0 = 3a + 2b + c$	$3a + 2b = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} d = 1 \\ a + b + c = 2 \\ c = 0 \\ 3a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = -2 \\ b = 3 \\ c = 0 \\ d = 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 1$$



2.12

Trobeu els valors dels paràmetres; b , c i d per tal que la funció $f(x)=x^3+bx^2+cx+d$ tingui un extrem en el punt $(2,0)$ i un punt d'inflexió en el punt d'abscissa $x=1$.

RAONAMENT

$$f(x) = x^3 + b x^2 + c x + d \quad f'(x) = 3x^2 + 2bx + c \quad f''(x) = 6x + 2b$$

$$\begin{array}{llll} \text{per passar per } (2,0) & 2=0+0+0+d & d=2 \\ \text{extrem en } (2,0) & f'(2)=0 & 0=12+4b+c & 4b+c=-12 \\ \text{punt d'inflexió en } x=1 & f''(1)=0 & 0=6+2b & b=-3 \end{array}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d=2 \\ 4b+c=-12 \\ b=-3 \end{cases} \Rightarrow f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$$

2.13

Trobeu el valor de k per tal que la funció $f(x) = x^3 - kx^2 + 3$, tingui en $x=1$ com a recta tangent: $y=-x+3$.

Sol: $k = 2$

2.14

Determineu la funció $y = ax^2 + bx + c$ que passa pel punt $P(1,8)$, i té un mínim en $x=0,5$.

Sol: $y = 3x^2 + 5$

2.15



Trobeu els valors dels paràmetres a , b , c i d per tal que la funció $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ tingui un màxim en el punt $(0,1)$ i un mínim en el punt $(1,2)$.

Sol: $f(x)=-2x^3+3x^2+1$

2.16

Trobeu els valors dels paràmetres b , c i d per tal que la funció $y=x^3+bx^2+cx+d$ tingui un extrem relatiu en el punt $(2,0)$ i un punt d'inflexió en $x=1$.

RAONAMENT

$$y = x^3 + b x^2 + c x + d \quad y' = 3x^2 + 2bx + c \quad y'' = 6x + 2b$$

per passar pel punt $(2, 0)$

$$8 + 4b + 2c + d = 0$$

extrem relatiu en el punt $(2, 0)$ $y'(2)=0$

$$12 + 4b + c = 0$$

punt d'inflexió en $x = 1$ $y''(1)=0$

$$6 + 2b = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8 + 4b + 2c + d = 0 \\ 12 + 4b + c = 0 \\ 6 + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = -3 \\ c = 0 \\ d = 4 \end{cases} \Rightarrow y = x^3 - 3x^2 + 4$$

3. CREIXEMENT I DECREIXEMENT

3.1

Estudieu el creixement o decreixement de la funció $f(x) = x^2 - 3x$ en els punts d'abscissa $x=0$ i $x=2$.

Sol: $x=0$ $m=-3$ (decreixent), $x=2$ $m=1$ creixent

3.2

Estudieu el creixement i decreixement de la funció $f(x)=2x^3-3x^2$.

RAONAMENT



$$f'(x)=6x^2-6x \quad f'(x)=0 \quad \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} (-\infty, 0) & f' > 0 \quad \text{creix} \\ x=0 & f'=0 \\ (0, 1) & f' < 0 \quad \text{decreix} \\ x=1 & f'=0 \\ (1, \infty) & f' > 0 \quad \text{creix} \end{array} \right.$$

Creixent en $(-\infty, 0) \cup (1, +\infty)$, decreixent en $(0, 1)$

3.3

Estudieu el creixement i decreixement de les funcions:

a)	b)	c)	d)	e)	f)
$(x-1)/2$	$x^2 - 2$	$3x^2 + 5x - 2$	$x^3 - 3x^2 + 3$	x^3	$(x-1)^2$

Sol:

a)	b)	c)
creixent en $\mathbb{R}$	decreixent en $(-\infty, 0)$, creixent en $(0, +\infty)$	decreixent en $(-\infty, -5/6)$, creixent en $(-5/6, +\infty)$
d)	e)	f)
creixent $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$, decreixent $(0, 2)$	creixent en $\mathbb{R}$	decreixent en $(-\infty, 1)$, creixent en $(1, +\infty)$

4. VELOCITAT I ACELERACIÓ - PUNTS SINGULARS

4.1

Un moviment rectilini horitzontal té per equació: $x = 3t^2 + 2$.

a) Calcula la velocitat mitjana entre $t = 2$ i $t = 4$ s	b) Calcula la velocitat instantània si $t = 5$ s
---	--

RAONAMENT



$$a) \quad v = \frac{dx}{dt} = 6t \quad v(2) = 12 \text{ m/s} \quad v(4) = 24 \text{ m/s} \quad v_M = (24 + 12)/2 = 18 \text{ m/s}$$

$$b) \quad v(5) = 30 \text{ m/s}$$

4.2

L'espai x (metres) en funció del temps t (segons) té per equació $x = t^2 + 3t$

a) Calculeu la velocitat als 3 b) Calculeu la velocitat als 10 segons metres de recorregut.

RAONAMENT

$$a) \quad v = \frac{dx}{dt} = 2t + 3 \quad v(3) = 9 \text{ m/s}$$

$$b) \quad x = t^2 + 3t \quad 10 = t^2 + 3t \Rightarrow \begin{cases} t = 2s \\ t = -5s \end{cases} \Rightarrow v(2) = 7 \text{ m/s}$$

4.3

Trobeu els punts singulars de la funció: $y = x^3 - 3x^2 + 2$.

Sol: $x = 0$; $x = 2$

4.4

Trobeu els punts de les següents funcions en que la derivada és zero

$$a) \quad y = x^2 + x + 1$$

$$b) \quad y = x^3 - 3x^2$$

Sol:

$$a) \quad x = -1/2$$

$$b) \quad x = 0, x = 2$$



4.5

Trobeu el vèrtex de la paràbola $y = x^2 + 4x + 3$ cercant el màxim de la funció.

Sol: $x = -2$