MOVIMENT DE CAIGUDA LLIURE. MOVIMENT CIRCULAR

Índex

P1. Moviment de caiguda lliure

Definicions

T.1.1. ***Conceptes bàsics***. En el moviment rectilini de caiguda lliure, la partícula descriu una trajectòria rectilínia en què el vector velocitat és variable en el temps i el vector acceleració és el de la gravetat. Aquest manté el mòdul, la direcció i el sentit invariables en el temps. Anem a veure les equacions de la posició i de la velocitat en funció del temps per a aquest tipus de moviment. Recordeu-vos que es treballa en una dimensió i, per tant, no és imprescindible la notació vectorial.

$$y = y_0 \pm v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

On y és la posició de la partícula en l'instant de temps t, y_0 és la posició de la partícula en l'instant de temps t = 0, v_{0y} és la velocitat d'aquesta en l'instant de temps t = 0, i $g = 9{,}81 \mathrm{m/s}$ és l'acceleració en l'eix Y.

La velocitat en l'eix Y correspon a la d'un moviment uniformement variat:

$$v_y = \pm v_{0y} - gt \qquad (2)$$

D'aquí $\vec{v} = (0, v_y) = (0, v_{0y} - gt)$

On $\vec{v}$ és la velocitat de la partícula en l'instant de temps t.

Cal dir que l'acceleració de la gravetat és negativa, atès que la força de la gravetat que l'origina té el sentit de les Y negatives.

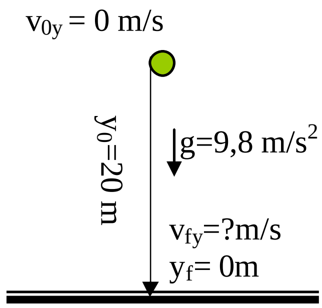
Exercicis

E.1.1. Newton va deixar caure una poma des d'una torre de 20 m. Trobeu la velocitat quan arriba a terra (velocitat d'impacte de la poma amb el terra)

Solució

La poma descriu un moviment de caiguda lliure en l'eix de l'ordenada, l'eix *Y*; per tant, serà un moviment rectilini uniformement accelerat, amb acceleració constant igual a la de la gravetat.

El primer pas que hem de fer és representar el moviment sobre un dibuix i escriure les dades de l'enunciat amb les unitats del sistema internacional.



Per poder calcular la velocitat d'impacte, necessitem saber el temps que triga per arribar a terra.

Hem d'emprar l'equació en què tenim més informació per calcular el temps.

$$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$$

En el nostre cas:

$$0 = 20 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot t^2$$

Per tant:

$-20 = -4.9 \cdot t^2$ **,** és a dir, $20 = 4.9 \cdot t^2$; i d'aquí deduïm que :

$$t^2 = \frac{20}{4.9} = 4.1\text{,} \Rightarrow \ \boldsymbol{t = 2}\textbf{s,}$$

que és el temps que triga la poma per arribar al terra.

Utilitzant, ara, l'equació de la velocitat del moviment uniformement variat, s'obté:

$v_y = v_{0y} - gt$; per tant**:**

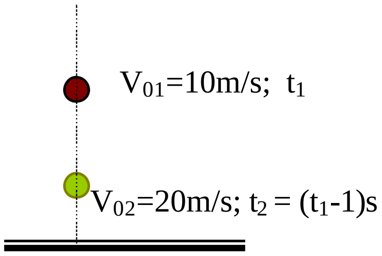
$$v_y = 9.8 \cdot 2 = 19.6\frac{m}{s}$$

19,6 m/s

E.1.2. Es llença des del terra una pilota amb una velocitat inicial de 10 m/s. Un segon després es llença des del mateix punt una altra pilota amb una velocitat de 20 m/s. Indiqueu si es troben les dues pilotes, i en cas afirmatiu, en quin lloc i en quin temps.

Solució

Primer farem el dibuix que representi el moviment dels dos objectes de manera aproximada. Hi posarem tota la informació de l'enunciat amb les unitats del sistema internacional (SI).



No sabem si es troben quan els dos objectes pugen o bé en una altra situació, però el que és clar és que en el moment de trobar-se tots dos objectes tenen la mateixa posició: $y_1 = y_2$; aleshores:

$$y_{01} + v_{01}t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 = y_{02} + v_{02}t_2 - \frac{1}{2}gt_2^2$$

Substituint les dades de l'enunciat a l'equació anterior, ens queda:

$$10t_1 - \frac{1}{2}9{,}8t_1^2 = 20t - \frac{1}{2}9{,}8(t_1 - 1)^2$$

On t_1 = 1,26 s. Ara podem calcular el lloc on es troben substituint el temps que hem trobat en qualsevol de les equacions anteriors de posició temps:

$$y = 10t_1 - \frac{1}{2}9{,}8t_1^2 = 10 \cdot 1{,}26 - \frac{1}{2}9{,}8 \cdot 1{,}26^2 = 4{,}82\text{m}$$

Si volem saber en quina situació es troben, hem d'emprar l'equació velocitat temps.

$$v_1 = 10 - 9{,}8 \cdot 1{,}26 = -2{,}35\text{m/s}$$

$$v_2 = 20 - 9{,}8 \cdot (1{,}26 - 1) = 17{,}45\text{m/s}$$

Fixeu-vos que el mòbil 1 té una velocitat negativa: vol dir que està baixant. En canvi, el mòbil 2 té la velocitat positiva: això representa que està pujant.

Si es troben; 4,82 m, t_1=1,26 s

Tornem-hi…

P.1.1. Es deixa caure un objecte des d'una altura de 100 m. Calculeu la velocitat d'impacte i el temps que triga per arribar a terra. Dades: g = 9,81 m/s^2. Sol.: 44,27 m/s; 4,52 s.

P.1.2. Es llança verticalment cap avall un objecte amb una velocitat de 10 m/s des d'una altura de 100 m. Calculeu la velocitat d'impacte i el temps que triga per arribar a terra. Sol.: 45,38 m/s; 3,81 s.

P.1.3. Es llança un objecte cap amunt amb una velocitat de 10 m/s i des d'una altura de 100 m. Calculeu la velocitat d'impacte i el temps que triga per arribar a terra. Sol.: 45,37 m/s; 5,85 s.

P.1.4. Es llança un objecte cap amunt amb una velocitat de 20 m/s i des d'una altura de 100 m. Calculeu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) la velocitat d'impacte; (c) el temps que triga per arribar a terra. Sol.: 120,46 m; 48,5 m/s; 6,99 s.

P.1.5. Es llança un objecte cap amunt amb una velocitat de 20 m/s i des d'una altura de 200 m. Calculeu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) la velocitat d'impacte; (c) el temps que triga per arribar a terra. Sol.: 220,46 m; 65,28 m/s; 8,74 s.

P.1.6. Es llança un objecte cap amunt amb una velocitat de 15 m/s i des d'una altura de 150 m. Calculeu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) la velocitat d'impacte, (c) el temps que triga per arribar a terra. Sol.: 161,47 m; 56,26 m/s; 7,27 s.

P.1.7. Un objecte es llança des de terra amb una velocitat de 20 m/s, calculeu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) el temps total que triga per arribar de nou a terra; (c) la velocitat d'impacte. Sol.: 20,4 m; 4,08 s; 20 m/s.

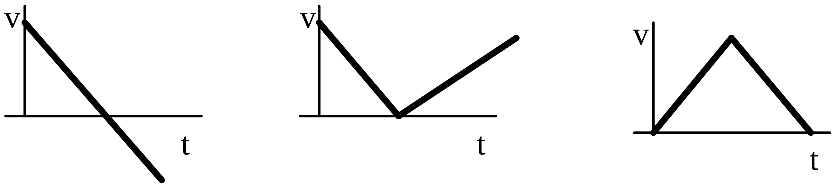
P.1.8. Un objecte es llança des de terra amb una velocitat de 40 m/s, calculeu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) el temps total que triga per arribar de nou a terra; (c) la velocitat d'impacte. Sol.: 81,63 m; 40 m/s; 8,16 s.

P.1.9. Un objecte es llança cap amunt amb una velocitat inicial 10 m/s des d'una altura de 50 m. Determineu: (a) l'altura màxima que assoleix l'objecte; (b) el temps total que triga per arribar a terra; (c) la velocitat d'impacte. Sol.: 55,10 m; 4,37 s; 32,86 m/s.

P.1.10. Un objecte es llança cap avall amb una velocitat inicial 15 m/s des d'una altura de 100 m. Determineu: (a) el temps total que triga per arribar a terra, (b) la velocitat d'impacte. Sol.: 3,24 s; 46,74 m/s.

P.1.11. Una pilota que es llança verticalment cap amunt tarda 4 s a tornar a terra. Determineu: (a) quina va ser la velocitat de llançament; (b) quina altura va aconseguir la pilota. Sol.: 19,6 m/s, 19,6 m

P.1.12. Quin gràfic representa la velocitat d'una pedra que es llança verticalment cap amunt en l'instant t = 0 i cau de nou? Quin valor ha de tenir el pendent en cada tram? Sol.: la del mig; l'acceleració de la gravetat.



P.1.13. Es dispara un projectil verticalment amb una velocitat de 100 m/s. Mig segon més tard, amb la mateixa arma, es dispara un segon projectil en la mateixa direcció. Determineu: (a) la posició on es troben els dos mòbils; (b) la velocitat de cada un en trobar-se. Sol.: 510 m i (-2,41 m/s ; 2,49 m/s).

P.1.14. Es llança des del terra una pilota amb una velocitat inicial de 20 m/s. Un segon després es llança des del mateix punt una altra pilota amb una velocitat de 30 m/s. Indiqueu si es troben les dues pilotes, i en cas afirmatiu, en quin lloc i en quin temps. Sol.: 20 m; 1,76 s.

P.1.15. Un paracaigudista salta amb una velocitat vertical cap avall de 10 m/s, baixa 50 m sense fricció de l'aire. Obre el paracaigudes en aquest punt i l'aire el frena amb una acceleració de 2 m/s^2, baixa verticalment i arriba al terra amb una velocitat de 3 m/s. Determineu l'altura en què es trobava el paracaigudista i el temps que va estar en l'aire. Sol.: 317,75 m; 17,26 s.

P.2. Composició de moviments. Tir parabòlic

Definicions

T.2.1. **Conceptes bàsics**. L'estudi del moviment d'un projectil en un llançament oblic es fa component dos moviments rectilinis en uns eixos de coordenades *xy*. L'un és uniforme en l'eix de les abscisses, i l'altre uniformement variat en l'eix de les ordenades. S'ha de tenir en compte que l'única força que actua sobre el cos és el pes; per tant, en tot moment l'acceleració d'aquest cos és la de la gravetat: $\vec{a} = \vec{g} = -g\vec{j}\,\frac{m}{s^2}$. Per desenvolupar un problema d'aquestes característiques, el que s'ha de fer primer és expressar el vector velocitat inicial en les seves components:

$$\vec{v}_0 = v_0 \cdot \cos\varphi\vec{i} + v_0 \cdot \sin\varphi\vec{j} = v_{0x}\vec{i} + v_{0y}\vec{j} \qquad (3)$$

Aleshores, les equacions del moviment són:

$$x = x_0 + v_{0x}t \qquad (4)$$

$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 \qquad (5)$$

La velocitat del projectil en qualsevol instant es trobarà de la manera següent:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = v_{0x}\vec{i} + \left(\pm v_{0y} - gt\right)\vec{j} \qquad (6)$$

on: $v_x = v_{0x}$ i, $v_y = \pm v_{0y} - gt$

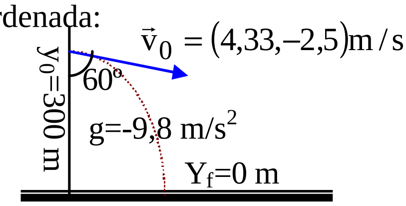
Exercicis

> E.2.1. En Newton tira una poma cap avall des d'una torre de 300 m d'alçària respecte al terra, que forma un angle de 60º amb la vertical. Si la velocitat inicial és de 5 m/s, trobeu el temps que triga per arribar a terra i la velocitat d'impacte.

Solució

Per poder respondre a les qüestions de l'enunciat haurem de fer el dibuix col·locant tota la informació de l'enunciat amb les unitats adients indicades pel sistema internacional (SI).

Si escrivim l'equació de moviment aplicada al nostre enunciat i considerem que el moviment uniformement variat es localitza en l'eix de l'ordenada:



$$y = y_0 \pm v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2 .$$

on $v_{0y} = v_0 \cdot \cos 60^\circ = 5 \cdot 0.5 = 2.5\,\frac{m}{s}$

Aquesta component de la velocitat, d'acord amb el dibuix, és negativa. Quan la poma arriba a terra, $y = 0$. Amb aquestes dades resolem l'equació posició temps:

$0 = 300 - 2.5t - 4.9\,t^2$

i, per tant, $t = 7.6s$

Per calcular la velocitat en el moment d'arribar a terra emprem l'equació velocitat temps del tir parabòlic:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = (v_{0x}, \left(v_{0y} - gt\right) = \left(4{,}33,\ -2{,}5 - 9{,}8 \cdot 7{,}6\right) = \left(4{,}33\ \ ,\ \ -76{,}98\ \ \right)m/s$$

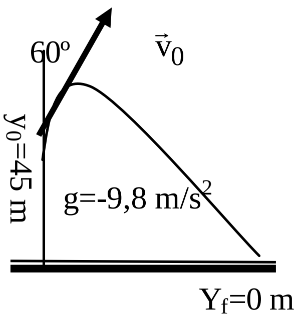
$\boxed{\vec{v}_f = (4.33}$

> E.2.2. En Newton, molt juganer, tira ara la poma cap amunt des d'una torre de 45 m d'alçària respecte al terra, que forma un angle de 60º amb la vertical. Si la velocitat inicial és de 200 m/s, trobeu: (a) el temps que triga per arribar a terra i la velocitat d'impacte; (b) l'altura màxima; (c) la distància màxima sobre l'eix de les *X* (abast).

Solució

Per poder respondre a les qüestions de l'enunciat haurem de fer el dibuix col·locant tota la informació de l'enunciat amb les unitats adients indicades pel sistema internacional (SI).

a) Si escrivim l'equació de moviment aplicada al nostre enunciat, el moviment uniformement es localitza en l'eix de l'ordenada; per tant:



$$y = y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$$

$$v_{0x} = 200 \cdot \sin 60^\circ = 173.2 \frac{m}{s}$$

i, $$v_{0y} = 200 \cdot \cos 60^\circ = 100 \frac{m}{s}$$

La component v_{0y} de la velocitat, d'acord amb el dibuix, és positiva.

Quan la poma arriba a terra, es compleix que *y* = 0. Amb aquestes dades resolem l'equació posició temps de l'eix *Y*:
$0 = 45 + 100t - 4.9\,t^2$

Com que és una equació de segon grau, obtenim dos resultats matemàtics:
t_1= 20.8 s; t_2=.-........s.

Triarem el valor que tingui significat físic.

Per calcular la velocitat en el moment d'arribar a terra, emprem l'equació velocitat temps del tir parabòlic:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t = (v_{0x}, (v_{0y} - gt) = (173,2\ ,\ 100 - 9,8 \cdot 20,8) = (173,2\ \ ,\ \ -.........\ )m/s$$

b) Quan la poma assoleixi l'altura màxima, la coordenada *y* de la velocitat, v_y, valdrà zero; per tant, a partir de l'equació de la velocitat d'un moviment rectilini uniformement variat es pot calcular el temps que trigarà la poma a assolir l'altura màxima.

$$v_y = v_{0y} - gt \Rightarrow t = \frac{v_{0y} - v_y}{g} = \frac{100}{9.8} = 10.2s$$

Substituint aquest temps en l'equació de la posició de l'eix de l'ordenada, trobem l'altura màxima.

$$y = y_0 \pm v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2.$$

$$y_{màx} = 45 + 100 \cdot 10.2 - \frac{1}{2} \cdot 9.8 \cdot (10.2)^2 = 555.2\text{m}$$

c) Substituint aquest temps en l'equació de la posició en l'eix de les abscisses, obtenim l'abast de la poma, és a dir, la distància respecte al peu de la torre.

$$x = x_0 + v_{0x} t = 173.2 \cdot 20.8 = 3607.8\text{m} \approx 3.6\text{km}$$

$\boxed{3.607{,}8 \text{ m}}$

Tornem-hi…

P.2.1. Un saltador de longitud arriba a una velocitat de 10 m/s en l'instant en què inicia el salt. Si la inclinació amb què el fa és de 25º respecte a l'horitzontal, determineu: (a) el temps total que es troba en l'aire; (b) la longitud mínima que ha de tenir el clot de sorra si comença el salt a 27 cm d'aquest clot. Sol.: 0,86 s i 7,55 m.

P.2.2. Des d'un campanar de 15 m d'alçària llancem obliquament un petard cap amunt amb una velocitat inicial de 30 m/s, que forma un angle de 60º amb l'horitzontal. Calculeu: (a) l'abast horitzontal; (b) la velocitat amb què el petard cau a terra, (c) l'altura màxima i la component *x* d'aquest punt (x, y_{max}). Sol.: 87,45 m, 34,57 m/s, 34,5 m, 39,75 m.

P.2.3. Llancem un cos obliquament cap amunt amb una velocitat de 40 m/s que forma un angle de 60º amb l'horitzontal. Calculeu: (a) l'abast horitzontal; (b) la velocitat 2 segons després d'haver-lo llançat; (c) l'altura màxima; (d) l'equació de la trajectòria. Sol.: 141,4 m, 25 m/s, 61,22 m, $y=1'732x - 0{,}0122x^2$.

P.2.4. Llancem un cos obliquament cap amunt amb una velocitat de 40 m/s que forma un angle de 30º amb l'horitzontal. Calculeu: (a) l'abast horitzontal; (b) la velocitat 1 segon després d'haver-lo llançat; (c) l'altura màxima; (d) l'equació de la trajectòria. Sol.: 70,66 m, 36,11 m/s, 20,41 m, $y=0{,}577-0{,}00408x^2$.

P.2.5. Llancem un cos obliquament cap amunt amb una velocitat de 40 m/s que forma un angle de 45º amb l'horitzontal. Calculeu: (a) l'abast horitzontal; (b) la velocitat 1 segon després d'haver-lo llançat; (c) l'altura màxima; (d) l'equació de la trajectòria. Sol.: 163,24 m, 33,78 m/s, 40,8 m, $y = x -0{,}006127x^2$.

P.2.6. Una avioneta vola horitzontalment a 108 km/h a una altura de 300 m i deixa anar un paquet que ha de caure al terrat d'un edifici de 50 m d'alçària. A quina distància del terra, mesurada horitzontalment, ha de deixar anar el paquet perquè caigui al terra de l'edifici? Sol.**:** 214,28 m.

P.2.7. Una avioneta vola horitzontalment a 108 km/h, a una altura de 300 m, i deixa anar un paquet que ha de caure al terrat d'un edifici de 80 m d'alçària. A quina distància del terra, mesurada horitzontalment, ha de deixar anar el paquet perquè caigui al terra de l'edifici? Sol.: 201 m.

P.2.8. Una avioneta vola horitzontalment a 144 km/h, a una altura de 400 m, i deixa anar un paquet que ha de caure al terrat d'un edifici de 50 m d'alçària. A quina distància del terra, mesurada horitzontalment, ha de deixar anar el paquet perquè caigui al terra de l'edifici? Sol.: 383,3 m.

P.2.9. Un futbolista xuta una pilota amb un angle de 37º i una velocitat de 14,4 m/s. Un segon futbolista, situat a 30 m del primer, comença a córrer cap a la pilota en el mateix moment en què el primer jugador xuta. Quina velocitat mínima ha de portar el segon jugador per arribar a la pilota abans que aquesta xoqui a terra? Sol.**:** 5,46 m/s.

P.2.10. Des d'un penya-segat de 20 m d'alçària, llancem obliquament cap amunt una pedra amb una velocitat de 20 m/s, que forma un angle amb l'horitzontal de 37º. A 10 m del penya-segat hi ha un obstacle i la pedra xoca amb la part de dalt d'aquest obstacle. Calculeu: (a) l'alçària que té l'obstacle; (b) la velocitat amb què la pedra xoca amb l'obstacle. Sol.**:** 25,62 m i 17,03 m/s.

P.2.11. Des d'un penya-segat de 40 m d'alçària, llancem obliquament cap amunt una pedra amb una velocitat de 20 m/s, que forma un angle amb l'horitzontal de 30º. A 10 m del penya-segat hi ha un obstacle i la pedra xoca amb la part de dalt d'aquest obstacle. Calculeu: (a) l'alçària que té l'obstacle; (b) la velocitat amb què la pedra xoca amb l'obstacle. Sol.: 14,13 m, 18,74 m/s.

P.2.12. Llancem un objecte des del terra amb una velocitat inicial de $\vec{v}_o = 20\vec{i} + 40\vec{j}$ m/s, i quan baixa, cau al terrat d'una casa de 35 m d'alçària. Calculeu el temps de volada de l'objecte, la distància a la qual es troba la casa i l'altura màxima a la qual arriba l'objecte. Sol.: 7,17 s; 143,33 m; 81,63 m.

P.2.13. Un noi vol menjar-se una poma situada a la part més alta d'un arbre. Per poder-ho fer, llança una pedra amb el tirador amb una velocitat de 30 m/s, la qual forma un angle α amb l'horitzontal, de manera que sin α = 0,8 i cos α = 0,6. Si l'arbre és a 80 m del noi i aquest llança la pedra des d'1 m del terra, determineu l'alçària de l'arbre i la velocitat de la pedra quan toca la poma. Sol.: 10.88 m i $\vec{v} = 18\vec{i} - 19{,}56\vec{j} m/s$.

P.2.14. Un helicòpter vola a 180 km/h, a una altura de 500 m, i veu venir un camió en sentit contrari. Calculeu a quina distància del camió ha de deixar anar un paquet per fer-lo caure dins la caixa del camió si aquest es mou amb una velocitat constant de 72 km/h. Sol.**:** 707,1 m.

P.2.15. Un helicòpter vola a 200 km/h a una altura de 1000 m i veu venir un camió en sentit contrari. Calculeu a quina distància del camió ha de deixar anar un paquet per fer-lo caure dins la caixa del camió si aquest es mou amb una velocitat constant de 72 km/h. Sol.**:** 707,1 m.

P.2.16. Un caça bombarder vola horitzontalment a 1500 m, amb una velocitat de 180 km/h, i veu venir un tanc en sentit contrari. Calculeu a quina distància del tanc ha de deixar anar un míssil per fer-lo caure sobre el tanc si aquest es mou amb una velocitat constant de 45 km/h. Sol.: 1093,56 m.

P3. Moviment circular uniforme

Definicions

T.3.1. **Conceptes bàsics**. La partícula que descriu un moviment circular uniforme té una velocitat angular constant, i per tant el mòdul del vector velocitat lineal també ho és. Les equacions del desplaçament i la velocitat angular en funció del temps són les següents:

$$\theta = \theta_0 + \omega t \qquad (7)$$

on *q* i *w* són el desplaçament i la velocitat angular, respectivament, en un instant de temps t, i θ_0 i ω_0 són el desplaçament i la velocitat angular, respectivament, en l'instant de temps *t* = 0.

Cal remarcar que **en un moviment circular uniforme**, malgrat que el mòdul del vector velocitat lineal sigui constant, **la seva direcció no ho és**. L'acceleració centrípeta o normal $\vec{a}_c$ és la magnitud física que mesura la variació de la direcció del vector velocitat. Aquesta acceleració és perpendicular a la trajectòria de la partícula i va dirigida cap al centre de la trajectòria circular. El mòdul de $\vec{a}_c$ ve donat per:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R \qquad (8)$$

T.3.2. **Recordeu**

Relació entre magnituds		
Magnitud lineal	*Magnitud angular*	*Relació*
Espai lineal (m)	Espai angular (rad)	S=θ R
Velocitat lineal (m/s)	Velocitat angular (rad/s)	V=ω R

Moviment circular uniforme	
$v = \frac{S}{t}$	$\omega = \frac{\theta}{t}$

Exercicis

E.3.1. Si estem escoltant música d'un disc que gira a raó d'1,5p rad/s durant 10 min, calculeu el desplaçament angular total que ha descrit aquest en unitats del sistema internacional.

Solució:

El disc descriu un moviment circular uniforme, per tant:
$\theta = \theta_0 + \omega t$; en el nostre cas:

$$t = 10\,\text{min} \cdot \frac{60\text{s}}{1\,\text{min}} = 600\text{s}$$

aleshores: $\theta = 1.5\pi \cdot 600 = 900\pi\text{rad}$

$\boxed{900\pi\,\text{rad}}$

> E.3.2. Trobeu l'acceleració centrípeta que adquireix un nen que ha pujat a les voladores de fires quan aquestes giren a una velocitat angular de 0.5π rad/s, i la distància radial és de 3 m.

Solució

L'acceleració centrípeta ve donada per l'expressió:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R = 2.47 \cdot 3 = 7.4\frac{m}{s^2}$$

$\boxed{7{,}4\ \text{m/s}^2}$

> E.3.3. Una mosca es diposita a una distància de 3 cm del centre d'un disc de 15 cm de radi que fa voltes sobre un tocadiscs a una velocitat angular de ω = 45 rpm. Trobeu en unitats del sistema internacional la velocitat lineal de la mosca. Si aquesta hagués caigut sobre la perifèria del mateix disc, quina velocitat lineal portaria?

Solució

Primer cal passar les unitats de la velocitat angular a unitats del sistema internacional.

$$\omega = 45\text{rpm} = 45\frac{\text{rev}}{\text{min}} \cdot \frac{2\pi\text{rad}}{1\text{rev}} \cdot \frac{1\text{min}}{60\text{s}} = 1.5\pi\frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

La velocitat lineal i la velocitat angular d'una partícula estan relacionades mitjançant l'expressió:
$v = \omega \cdot R$

En el primer cas, R = 0.03 *m*, i en el segon cas, R = 0.15 m ; per tant:

$$v = 1.5 \cdot \pi \cdot 0.03 = 0.14 \frac{m}{s}$$

i, $v = 1.5 \cdot \pi \cdot 0.15 = 0.71 \frac{m}{s}$

Cal adonar-se que malgrat que la mosca gira a la mateixa velocitat angular en ambdós casos, la velocitat lineal és diferent, depenent d'on es troba aquesta respecte a l'eix de rotació:

$\boxed{0{,}14 \text{ m/s i } 0{,}71 \text{ m/s}}$

Tornem-hi…

P.3.1. Un disc gira amb una velocitat de 45 rpm. Calculeu-ne la velocitat angular en rad/s. Sol.: 3π/2 rad/s.

P.3.2. Un cotxe recorre una pista circular de 50 m de radi. Quan ha recorregut 200 m, quants radiants ha descrit? Sol.: 4 rad.

P.3.3. Una roda gira a raó de 40 rad/s. Calculeu: (a) la celeritat d'un punt de la roda situat a 20 cm del centre de la roda; (b) la rapidesa d'un punt de la roda situat a 30 cm del centre de la roda. Sol.: 8 m/s; 12 m/s.

P.3.4. Una roda gira a raó de 45 rpm. Calculeu: (a) la rapidesa d'un punt de la roda situat a 20 cm del centre de la roda: (b) la rapidesa d'un punt de la roda situat a 30 cm del centre de la roda. Sol.: 0,3π m/s; 0,9π/2 m/s.

P.3.5. Una roda gira a raó de 40/π voltes/s. Calculeu: (a) la rapidesa d'un punt de la roda situat a 20 cm del centre de la roda; (b) la rapidesa d'un punt de la roda situat a 30 cm del centre de la roda. Sol.: 16 m/s.

P.3.6. Determineu la velocitat angular de les tres busques dels rellotge en rad/s. Sol.: horari: 1,45 10^{-4} rad/s; minutera: 1,74 10^{-3} rad/s, i secundària: 0,105 rad/s.

P.3.7. Un punt de la perifèria d'una roda de 50 cm de radi es mou amb una velocitat lineal de 72 km/h. Calculeu: (a) la velocitat angular de la roda; (b) el nombre de voltes que fa en 10 s. Sol.: 40 rad/s, 400 voltes.

P.3.8. Un punt de la perifèria d'una roda de 40 cm de radi es mou amb una velocitat lineal de 36 km/h. Calculeu: (a) la velocitat angular de la roda (b) el nombre de voltes que fa en 20 s. Sol.: 25 rad/s, 500 voltes.

P.3.9. Un punt de la perifèria d'una roda de 20 cm de radi ha descrit un arc de 20 cm en un temps de 10 s. Calculeu: (a) la velocitat lineal del punt; (b) la velocitat angular de la roda; (c) l'espai lineal que recorre en 2 minuts. Sol.: 0'02 m/s, 0'1 rad/s, 2'4 m.

P.3.10. Un punt de la perifèria d'una roda de 20 cm de radi ha descrit un angle de 45º en un temps de 10 s. Calculeu: (a) la velocitat lineal del punt; (b) la velocitat angular de la roda; (c) el nombre de voltes que fa en 2 minuts. Sol.: 0'005π m/s, π/40 rad/s.

P.3.11. Una mosca se situa en un plat de microones de 10 cm de radi que gira a 10 voltes/s. Si la mosca es troba a una distància de 5 cm del centre, determineu: (a) el nombre de voltes que descriu la mosca en un temps de 10 s; (b) la velocitat lineal de la mosca. Sol.: 100 voltes, π m/s.

P.3.12. Observem diferents punts d'una roda que es mou amb una celeritat angular constant. D'acord amb la taula, distància del punt al centre i velocitat lineal corresponent, determineu la velocitat angular de la roda de manera gràfica.

Radi (m)	Velocitat (m/s)
0	0
0,2	0,2
0,4	0,4
0,6	0,6
0,8	0,8
1	1

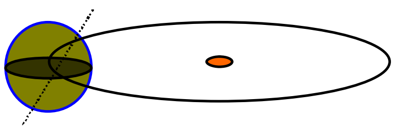
Sol.: 1 rad/s.

P.3.13. Trobeu la velocitat de l'extrem de l'agulla que indica els segons i la seva freqüència. Dada: longitud de l'agulla = 12 mm. Sol.: 1,26 10^{-3} m/s, 1/60 Hz.

P.3.14. Suposant que la Terra gira al voltant del seu eix amb moviment circular uniforme, trobeu: (a) la velocitat angular de la Terra; (b) la freqüència i el seu període. Sol.: 2π/86400 rad/s; $1{,}16\times10^{-5}$ Hz; 86400 s.

P.3.15. Suposant que la Terra gira al voltant del seu eix amb moviment circular uniforme, trobeu: (a) la velocitat lineal d'un punt situat a l'equador de la Terra. (b) la velocitat lineal del punt que representa el centre de la Terra. Dades: radi de la Terra = 6370 km. Sol.: 147,45π m/s; 0 m/s

P.3.16. Determineu la velocitat angular de la Terra al voltant del Sol.



Sol.: $2\cdot10^{-7}$ rad/s

P.3.17. En Pere porta un rellotge que té una agulla minutera d'1 cm. Trobeu: (a) la velocitat angular de l'agulla; (b) la velocitat lineal d'un punt situat a l'extrem de l'agulla; (c) la freqüència i el seu període. Sol.: π/1800 rad/s; $\pi/18\times10^{4}$ m/s; $2{,}78\times10^{-4}$ Hz; 3600 s.

P.3.18. Un disc de 2 m de radi gira al voltant d'un eix perpendicular pel seu centre, amb celeritat constant. Si fa una volta completa en 4 s, es demana:

(a) la velocitat angular de dos punts, un situat a 1 m del seu centre (A) i l'altre a la perifèria (B); (b) la velocitat lineal dels dos punts anteriors; (c) la freqüència del moviment; (d) l'angle girat en un temps de 6 s; (e) la distància recorreguda pels dos punts A i B en 6 s. Sol.: $\pi/2$ rad/s; $\pi/2$ m/s, π m/s, 0,25 Hz, 3π rad; 3π m; 6π m.

P.3.19. Un disc de 2 m de radi gira al voltant d'un eix perpendicular pel seu centre, amb celeritat constant. Si fa una volta completa en 2 s, es demana:

(a) la velocitat angular de dos punts, un situat a 1 m del seu centre (C) i l'altre a la perifèria (D); (b) la velocitat lineal dels dos punts anteriors; (c) la freqüència del moviment; (d) l'angle girat en un temps de 6 s; (e) la distància recorreguda pels dos punts C i D en 6 s. Sol.: π rad/s; π m/s, 2π m/s, 0,5 Hz, 6π rad; 6π m; 12π m.

P.3.20. Un disc de 2 m de radi gira al voltant d'un eix perpendicular pel seu centre, amb celeritat constant. Si fa una volta completa en 4 s, es demana:

(a) la velocitat angular de dos punts, un situat a 0 m del seu centre (A) i l'altre a la perifèria (B); (b) la velocitat lineal dels dos punts anteriors; (c) la freqüència del moviment; (d) l'angle girat en un temps de 6 s; (e) la distància recorreguda pels dos punts A i B en 6 s. Sol.: $\pi/2$ rad/s; 0π m/s, π m/s, 0,25 Hz, 3π rad; 0π m; 6π m.

P.3.21. El diàmetre de les rodes grosses d'una bicileta d'infant és de 0,8 m, i el de les rodes petites de 20 cm. Per anar al jardí les rodes grosses han fet 800 voltes a 40 rpm. Calculeu la velocitat de la bicicleta i el nombre de voltes que han fet les rodes petites. Sol.: 3'35 m/s, 3200 voltes.

P.3.22. El diàmetre de les rodes grosses d'una bicileta d'infant és de 0,6 m i el de les rodes petites de 30 cm. Per anar al jardí les rodes grosses han girat 800 voltes a 40 rpm. Calculeu la velocitat de la bicicleta i el nombre de voltes que han fet les rodes petites. Sol.: 2'51 m/s, 960 voltes.

P.3.23. Determineu l'acceleració normal d'un ciclista que descriu una trajectòria circular de 100 m de radi amb una velocitat de 72 km/h. Sol.: 4 m/s^2.

P.3.24. Suposant que la Terra gira al voltant del seu eix amb moviment circular uniforme. Trobeu: (a) la velocitat lineal d'un punt situat a l'equador de la Terra; (b) l'acceleració normal o radial d'aquest punt. Dades: radi de la Terra = 6370 km. Sol.: $147{,}45\pi$ m/s; $3{,}41\pi^2 x10^{-3}$ m/s^2.

P.4. Moviment circular uniformement variat

Definicions

T.4.1. **Conceptes bàsics**. En aquest tipus de moviment el que és invariable és l'acceleració angular, mentre que la velocitat angular canvia en el temps. Les equacions del desplaçament i la velocitat angular en funció del temps són les següents:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2 \qquad (9)$$

i, $\omega = \omega_0 + \alpha t$

Si s'elimina el temps entre les dues equacions, s'obté:

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta\theta \qquad (10)$$

essent: $\Delta\theta = \theta - \theta_0$

Cal dir que les equacions del moviment circular uniforme i del moviment circular uniformement variat són anàlogues respectivament a les del moviment rectilini; només canvien les magnituds lineals per les angulars.

En aquest tipus de moviment, el vector velocitat lineal té el mòdul i la direcció variables. **La magnitud que mesura la variació del mòdul de la velocitat és l'acceleració tangencial $\vec{a}_t$, i aquesta és tangent a la trajectòria** de la partícula.

L'expressió del mòdul de $\vec{a}_t$ ve donada per:

$$a_t = \frac{dv}{dt} \qquad (11)$$

$$a_t = R \cdot \alpha \qquad (12)$$

L'acceleració tangencial és perpendicular a l'acceleració centrípeta, i ambdues són les **components intrínseques** del vector acceleració; per tant, es pot escriure:

$$\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t \qquad (13)$$

i el mòdul del vector acceleració és el següent:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2}$$

Exercicis

E.4.1. Un disc amb un eix fix de 30 cm de radi, inicialment en repòs, gira amb una acceleració angular constant d'1.5 rad/s^2 durant 10 s. Trobeu el nombre de voltes que fa aquest disc.

Solució

L'equació del desplaçament angular d'un moviment circular uniformement accelerat ve donada per:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2$$

En el nostre cas, *q*$_0$ = 0, i *w*$_0$ = 0, per tant:

$$\theta = \frac{1}{2} \cdot 1.5 \cdot (10)^2 = 75\text{rad}$$

Aleshores:

$$75\text{rad} \cdot \frac{1\text{volta}}{2\pi\text{rad}} = 11{,}94\,\text{voltes}$$

$\boxed{\text{11,94 voltes}}$

E.4.2. Una ciclista que surt del repòs descriu un *looping* circular de 200 m de radi, i assoleix els 72 km/h en 0,5 minuts. Trobeu l'acceleració total de la ciclista un cop ha transcorregut aquest temps.

Solució

El que cal fer primer és unificar unitats:

$$72\frac{\text{km}}{\text{h}} \cdot \frac{1000\text{m}}{1\text{km}} \cdot \frac{1\text{h}}{3600\text{s}} = 20.0\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$0.5\,\text{min} \cdot \frac{60\text{s}}{1\,\text{min}} = 30\text{s}$$

Per trobar l'acceleració total $\vec{a} = \vec{a}_c + \vec{a}_t$ cal buscar les seves components vectorials.

El mòdul de l'acceleració tangencial és:

$$a_t = \frac{v - v_0}{t - t_0} = \frac{20}{30} = 0.67\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

El mòdul de l'acceleració centrípeta és:

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{(20)^2}{200} = 2\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

El mòdul de l'acceleració total és:

$$a = \sqrt{a_c^2 + a_t^2} = 2{,}11\frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

La direcció del vector acceleració total es pot trobar calculant l'angle que forma aquest amb el vector $\vec{a}_t$: $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{a_c}{a_t} = \operatorname{arctg}\dfrac{2}{2{,}11} = 43{,}46^\circ$

$\boxed{2{,}11\ \text{m/s}^2}$

T.4.2. **Recordeu**

Relació entre magnituds		
Magnitud lineal	*Magnitud angular*	*Relació*
Espai lineal, S,(m)	Espai angular, θ, (rad)	$S=\theta R$
Velocitat lineal (m/s)	Velocitat angular (rad/s)	$v=\omega R$
Acceleració lineal o tangencial (m/s^2)	Acceleració angular (rad/s^2)	$a_{tang} = \alpha R$

Moviment circular uniformement variat	
$S = S_0 + V_0 t + \frac{1}{2}\cdot a\cdot t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\cdot\alpha\cdot t^2$
$v = v_0 + a\,t$	$\omega = \omega_0 + \alpha\,t$
$v^2 = v_0^2 + 2\cdot a\cdot\Delta s$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\cdot\alpha\cdot\Delta\theta$

Tornem-hi…

P.4.1. En una fira, una atracció augmenta la velocitat en 10 voltes/s en 2 minuts. Calculeu-ne l'acceleració angular en rad/s^2. Sol**.:** $\pi/6$ rad/s^2.

P.4.2. Una atracció de fira que parteix del repòs adquireix una velocitat angular de 10π rad/s en dos segons. Considerant un moviment circular uniformement variat, calculeu: (a) la seva acceleració angular en rad/s^2; (b) el nombre de voltes que fa en aquest temps. Sol.: 5π rad/s^2 , 5 voltes.

P.4.3. Quant tardarà a aturar-se un disc que gira a 60 rpm si comença a frenar amb una acceleració constant de 2 rad/s^2? Sol.: 3,14 s.

P.4.4. Una atracció de fires va fent voltes i descriu un cercle amb una acceleració angular constant. La velocitat angular en els dos primers segons és de 90 radiants per segon. Si es considera que parteix del repòs, trobeu l'acceleració i el desplaçament angular en aquest període. Sol.: 45 rad/s^2; 90 rad.

P.4.5. Les rodes d'un camió giren amb una velocitat angular constant de ω = 100 rad/s. El conductor veu un obstacle a la carretera i frena, i triga 2 s a aturar-se. Calculeu l'acceleració angular amb la qual frena. Sol.: 50 rad/s^2.

P.4.6. Un disc, partint del repòs, adquireix una velocitat de 45 rpm en un temps d’1,5 s. Calculeu: (a) la seva acceleració angular; (b) el nombre de voltes que fa en aquest temps. Sol.: π rad/s^2; 0,56 voltes.

P.4.7. En una fira, una atracció disminueix la velocitat en 10 voltes/s en 2 minuts. Calculeu l’acceleració angular en rad/s^2. Sol = π/6 rad/s^2.

P.4.8. Una atracció de fira que es mou amb una velocitat angular de 10π rad/s frena i es para en dos segons. Considerant un moviment circular uniformement variat, calculeu: (a) la seva acceleració angular en rad/s^2; (b) el nombre de voltes que fa fins que es para. Sol.: 5π rad/s^2 , 5 voltes.

P.4.9. Un disc partint que gira inicialment amb una velocitat de 45 rpm es para en un temps d’1,5 s. Si es considera un moviment circular uniformement variat, calculeu: (a) la seva acceleració angular; (b) el nombre de voltes que fa fins a aturar-se. Sol.: π rad/s^2; 0,56 voltes

P.4.10. La velocitat angular d’un volant disminueix uniformement de 900 a 800 voltes per minut en 5 s. Calculeu: (a) l’acceleració angular del moviment; (b) el nombre de voltes que fa en aquests 5 s; (c) el temps que triga a parar-se a partir d’aquest instant. Sol.: 2,1 rad/s^2; 70, 8 voltes; 40 s.

P.4.11. La velocitat angular d’una roda disminueix uniformement de 1000 rpm a 500 rpm en 10 s. Calculeu: (a) el nombre de voltes que fa en aquests 10 s; (b) el temps necessari fins a aturar-se. Sol.: 124,9 voltes; 20 s.

P.4.12. La velocitat angular d’una roda disminueix uniformement de 1000 rpm a 500 rpm en 10 s. Calculeu la distància recorreguda en els 10 s per un punt situat a 50 cm de la perifèria. Sol.: 392,5 m.

P.4.13. Un mòbil descriu un moviment circular de 50 m de radi amb una acceleració tangencial o lineal de 2 m/s^2. Si quan el cronòmetre indica 4 s, el mòbil es troba en un angle de 3 rad i movent-se amb una velocitat de 6 m/s, determineu: (a) la posició i la velocitat inicial del mòbil considerant un moviment circular uniformement variat; (b) l’acceleració normal al cap de 4 s. Sol.: -2 m/s; 142 m; 0,72 m/s^2.

P.4.14. Un mòbil descriu un moviment circular de 100 m de radi amb una acceleració tangencial o lineal de 4 m/s^2. Si quan el cronòmetre indica 4 s, el mòbil es troba en un angle de 3 rad i movent-se amb una velocitat de 6 m/s, determineu: (a) la posició i la velocitat inicial del mòbil considerant un moviment circular uniformement variat; (b) l’acceleració normal al cap de 4 s. Sol.: -10 m/s; 308 m; 0,36 m/s^2.

P.4.15. Un mòbil descriu un moviment circular de 50 m de radi amb una acceleració angular de 0,04 rad/s^2. Si quan el cronòmetre indica 4 s, el mòbil es troba en un angle de 150 rad i movent-se amb una velocitat de 6 m/s, determineu: (a) la posició i la velocitat inicial del mòbil considerant un moviment circular uniformement variat; (b) l’acceleració normal al cap de 4 s. Sol.: -2 m/s; 142 m; 0,72 m/s^2.

P.4.16. Un tractor inicialment en repòs es desplaça durant un temps de 90 s. Les rodes del tractor, de 100 cm de radi, giren amb una acceleració angular d'1 rad/s^2 durant els primers 60 s, i mantenen la velocitat adquirida durant els 30 s restants. Determineu: (a) la velocitat final del tractor i (b) el nombre de voltes que fa una roda. Sol.: 60 m/s; 573,25 m.

P.4.17. Un tractor inicialment en repòs es desplaça durant un temps de 120 s. Les rodes del tractor, d'1 m de radi, giren amb una acceleració angular d'1 rad/s^2 durant els primers 60 s, i mantenen la velocitat adquirida durant els 60 s restants. Determineu: (a) la velocitat final del tractor i (b) el nombre de voltes que fa una roda. Sol.: 60 m/s; 859,87 m.

P.4.18. Un tractor inicialment es desplaça amb una velocitat de 72 km/h considerada constant durant 10 s. Seguidament frena amb una acceleració d'1 m/s^2 fins a aturar-se. Les rodes grosses del tractor tenen 1 m de radi, i les petites 50 cm. Ompliu les dues taules següents:

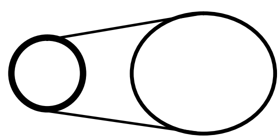
Primer tram	*Velocitat roda gran*	*Velocitat roda petita*	*Espai recorregut roda gran*	*Espai recorregut roda petita*
lineal				
angular				

Segon tram	*Acceleració roda gran*	*Acceleració roda petita*	*Espai recorregut roda gran*	*Espai recorregut roda petita*
lineal				
angular				

P.4.19. Un tractor inicialment es desplaça amb una velocitat de 72 km/h considerada constant durant 10 s. Seguidament frena amb una acceleració d'1 m/s^2 fins a aturar-se. Les rodes grosses del tractor tenen 1 m de radi, i les petites 50 cm. Determineu: (a) la velocitat angular de cada roda en iniciar la frenada; (b) el nombre de voltes totals que ha fet la roda gran. Sol.: ωg = 20 rad/s; ωp = 40 rad/s; 63,7 voltes.

P.4.20. Un mòbil A descriu una trajectòria circular de 50 m de radi amb una velocitat angular constant de 0,3 rad/s. Al cap de 5 s d'haver partit A, surt a darrere seu un altre mòbil B, des del repòs i amb una acceleració de 0,1 rad/s^2. Determineu: (a) la posició i l'instant en què B s'encreua amb A; (b) la velocitat lineal i angular de B en el moment en què s'encreuen els dos mòbils. Sol.: 4,26 rad; 0,92 rad/s; 46 m/s.

P.4.21. La roda petita d'un transmissor de velocitat té un radi de 15 cm, i la roda grossa de 45 cm. El sistema es troba inicialment en repòs. Si la roda petita arranca amb una acceleració, considerada constant, d'1 rad/s^2 ompliu la taula per un temps t = 4 s.



	Acceleració roda petita	*Acceleració roda gran*	*Velocitat (t=4s) roda petita*	*Velocitat (t=4 s) roda gran*
lineal				
angular				

P.5. Moviment circular variat

Definicions

T.5.1. **Conceptes bàsics**. La trajectòria d'una partícula que descriu un moviment circular és una circumferència. Si la partícula es desplaça des d'un punt 1 fins a un punt 2 (vegeu el dibuix), la velocitat angular mitjana es defineix com l'angle central escombrat pel radi, anomenat desplaçament angular (expressat en unitats de radiant en el sistema internacional; el radiant és adimensional), dividit pel temps que triga la partícula per anar des del punt 1 fins al punt 2, és a dir:

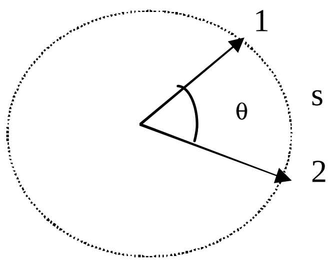
$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} \qquad (14)$$

Si fem el límit quan *Dt* tendeix a zero, obtenim la velocitat angular instantània:

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (15)$$

La unitat de la velocitat angular en el sistema d'unitats internacional és el radiant per segon, rad/s. En alguns casos, aquesta velocitat es dóna en unitats de rpm, que vol dir revolucions dividit per minut; una revolució és igual a 2π radiant. Cal recordar que el desplaçament angular és igual a l'arc *s* (magnitud lineal), descrit per la partícula, dividit pel radi *R* de la circumferència, és a dir:

$$q = \frac{s}{R} \quad ; \quad s = \theta \cdot R$$



per tant:

$$v = w \cdot R \quad \text{ja que} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

L'acceleració angular mitjana d'una partícula que es desplaça des d'una posició 1 fins a una posició 2 és el quocient entre la variació de la velocitat angular entre aquests dos punts i el temps que triga per anar-hi. És a dir:

$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} \qquad (16)$$

Si fem el límit quan *Dt* tendeix a zero, obtenim l'acceleració angular instantània:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (17)$$

La unitat de l'acceleració angular en el sistema d'unitats internacional és el radiant per segon al quadrat, rad /s^2.

Exercicis

E.5.1. L'equació del desplaçament angular d'una partícula que volta sobre una circumferència de radi R = 3 m ve donada per l'expressió $\theta = 4t^2 + 3t$. Trobeu la velocitat lineal i l'acceleració angular en l'instant t = 2 s. (Les unitats de θ és el radiant, i el temps s'expressa en segons.)

Solució

Ja s'ha comentat que l'arc que descriu la partícula en un moviment circular és una magnitud lineal; per tant:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

On arc = R·θ i:
Arc= s=3(4t^2 +3t) = (12t^2 + 9t) m; per tant:

$$v = (24t + 9)\frac{m}{s}.$$

Quan el temps és igual a t = 2s, aleshores:

$$v(2) = 57\,\frac{m}{s}$$

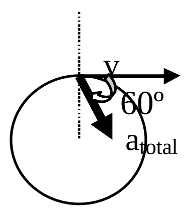
Com que:

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}, \text{ i } \omega = \frac{d\theta}{dt}, \text{ aleshores:}$$

$$\omega = (8t + 3)\frac{rad}{s}, \text{ i } \alpha = 8\,\frac{rad}{s};$$ per tant, l'acceleració angular és constant.

10 m/s; 308 m; 0,36 m/s^2

E.5.2. Una partícula porta una velocitat de 6 m/s en un instant determinat i la seva acceleració és de 8 m/s^2. Si els seus vectors representatius formen un angle de 60º, calculeu: (a) les components intrínseques de l'acceleració i (b) el radi de curvatura.



Solució

La figura ens permet determinar les components intrínseques de l'acceleració, atès què:

a) Per trigonometria es poden calcular les components de l'acceleració:

$$a_t = \frac{ds}{dt} = |\vec{a}|\cos 60^o = 8 \cdot 0{,}5 = 4 m/s^2$$

i: $a_n = \frac{v^2}{R} = |\vec{a}|\sin 60^o = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6{,}93 m/s^2$

b) Com que:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 6{,}93 \Rightarrow R = \frac{6^2}{6{,}93} = 5{,}19 m$$

(a) 4 m/s^2 ; 6,93 m/s^2 (b) 5,19 m.

Tornem-hi…

P.5.1. Una partícula descriu la trajectòria d'un cercle de 250 cm de radi segons l'equació següent: *q* = 2t^2-4*t* + 6, *q* expressat en radiant i *t* en segons. Determineu l'acceleració tangencial de la partícula, expressada en unitats del sistema internacional, en l'instant de temps *t* = 3 s. Sol.: 10 m/s^2 (correspon a un moviment circular uniformement variat).

P.5.2. Segons l'equació de la trajectòria circular del problema anterior, calculeu la velocitat angular, així com l'acceleració centrípeta o radial i angular, expressades en el sistema internacional, en l'instant de temps *t* = 2 s. Sol.: 4 rad/s; 40 m/s^2; 4 rad/s^2

P.5.3. Una partícula descriu la trajectòria d'un cercle de 250 cm de radi segons l'equació següent: *q* = 4t^2-2*t* + 6; *q* expressat en radiant i *t* en segons. Ompliu la taula en unitats del sistema internacional, per a l'instant de temps *t* = 3 s.

	ω	α	a_{tan}	a_{normal}	a_{total}	Angle ($a_{tan,} a_{normal}$)
magnitud						
unitats						

Sol.: 22 rad/s, 8 rad/s^2, 20 m/s^2, 1210 m/s^2, 1210'16 m/s^2, 90º

P.5.4. Una partícula descriu la trajectòria d'un cercle de 200 cm de radi segons l'equació següent: *q* = 8t^2-2*t* + 6; *q* expressat en radiant i *t* en segons. Ompliu la taula en unitats del sistema internacional, per a l'instant de temps *t* = 2 s.

	ω	α	a_{tan}	a_{normal}	a_{total}	Angle (a_{tan}, a_{normal})
magnitud						
unitats						

Sol.: 30 rad/s, 16 rad/s^2, 32 m/s^2, 1800 m/s^2, 1800'28 m/s^2, 90º

P.5.5. Una partícula descriu la trajectòria d'un cercle de 250 cm de radi segons l'equació següent: $q = 4t^3 - 2t + 6$; q expressat en radiant i t en segons. Ompliu la taula en unitats del sistema internacional, per a l'instant de temps t = 1 s.

	ω	α	a_{tan}	a_{normal}	a_{total}	Angle (a_{tan}, a_{normal})
magnitud						
unitats						

Sol.: 10 rad/s, 24 rad/s^2, 60 m/s^2, 250 m/s^2, 257'1 m/s^2, 90º

P.5.6. Una partícula descriu la trajectòria circular de radi R segons l'equació següent: $S = 2t^2 - 4t + 6$; S expressat en metres i t en segons. Determineu l'acceleració tangencial de la partícula, expressada en unitats del sistema internacional, en l'instant de temps t = 3 s. Sol.: 4 m/s^2.

P.5.7. Una partícula descriu la trajectòria circular de radi R segons l'equació següent: $S = 3t^2 - 4t + 6$; S expressat en metres i t en segons. Determineu l'acceleració tangencial de la partícula, expressada en unitats del sistema internacional, en l'instant de temps t = 1 s. Sol.: 6 m/s^2.

P.5.8. El vector posició d'un mòbil és $\vec{r} = 3t\vec{i} + t^2\vec{j} - 3\vec{k}$ (en unitats del sistema internacional). Trobeu les components intrínseques de l'acceleració i el radi de curvatura per a t = 1 s.

Sol.: $a_t = 4\sqrt{13}/13$ m/s^2, $a_n = 6\sqrt{13}/13$ m/s^2, $R = 13\sqrt{13}/6$ m

P.5.9. El vector posició d'un mòbil és $\vec{r} = 3t^2\vec{i} + t\ \vec{j} - 3\vec{k}$ (en unitats del sistema internacional). Trobeu les components intrínseques de l'acceleració i el radi de curvatura per a t = 1 s.

Sol.: $a_t = 36\sqrt{37}/37$ m/s^2, $a_n = 6\sqrt{37}/37$ m/s^2, $R = 37\sqrt{37}/6$ m

P.5.10. El vector posició d'un mòbil és $\vec{r} = 3t\vec{i} + t\vec{j} - 3\vec{k}$ (amb unitats del sistema internacional). Trobeu les components intrínseques de l'acceleració i el radi de curvatura per a t = 1 s.

Sol.: a_t=0 m/s^2, a_n=0 m/s^2, R=0 m trajectòria rectilínia.