

SOLUCIONS LÍMITS I CONTINUÏTAT

049

•••

Calcula aquests límits:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2 + 1}{x} + \frac{3 - x^2}{x + 2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x} - \frac{2x^2 + 1}{2x - 4} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2 + 1}{x} + \frac{3 - x^2}{x + 2} \right) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5x^2 + 1}{x} + \frac{3 - x^2}{x + 2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^3 + 10x^2 + 4x + 2}{x^2 + 2x} = -\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x} - \frac{2x^2 + 1}{2x - 4} \right) \rightarrow \infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 2x} - \frac{2x^2 + 1}{2x - 4} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{2x^2 - 4x} = 0$$

050

•••

Troba els resultats de:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-3x + 6x^2}}{x^2 + 2}$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 5x^3 - 2x^2}}{3x - 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{-3x + 6x^2}}{x^2 + 2} = 0$

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{2x^4 + 5x^3 - 2x^2}}{3x - 1} = -\infty$

051

•••

Determina.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2}$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{x(2 + \sqrt{x + 4})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2 + \sqrt{x + 4}} = -\frac{1}{4}$$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{(x - 2)(\sqrt{x} + \sqrt{2})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

056

●○○

Determina aquests límits i, si cal, calcula'n els límits laterals:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x - 2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{9 - x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 6}{x - 2} \rightarrow \frac{10}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 + 6}{x - 2} = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 + 6}{x - 2} = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{3}{9 - x^2} \rightarrow \frac{3}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{3}{9 - x^2} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{3}{9 - x^2} = -\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x} \rightarrow \frac{24}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x^2 + 2x}{8 - 2x} = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1} \rightarrow \frac{2}{0}$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4 - 2x}{x^2 - 2x + 1} = +\infty$

058

●●○

Donada la funció $f(x)$ definida a trossos, troba els límits:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x < -2 \\ 9 & \text{si } -2 \leq x < 3 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

g) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$

f) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x)$

h) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -3$

g) $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -5$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$

h) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$ no existeix.

c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -3$

f) $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \frac{9}{2}$

Calcula els límits laterals i el límit següent:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+2)}{(x-3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x-3} \rightarrow \frac{5}{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 6x + 9} = +\infty$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2}$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8}$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x}$$

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(2x-3)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x-3}{x+1} = \frac{9}{2}$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{3x^2 - 7x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-5)}{(x-2)(3x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-5}{3x-1} = -\frac{1}{5}$$

$$\text{c) } \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^3 + 12x^2 - x - 4}{x^3 + 7x^2 + 14x + 8} &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{(x+4)(3x^2-1)}{(x+4)(x^2+3x+2)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -4} \frac{3x^2-1}{x^2+3x+2} = \frac{47}{6} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 9x^2 + 15x + 25}{x^3 - 5x^2 + 2x - 10} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x^2-4x-5)}{(x-5)(x^2+2)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2-4x-5}{x^2+2} = 0$$

$$\text{e) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(2x-7)}{(x-2)(4x-8)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x-7}{4x-8} \rightarrow -\frac{3}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x^2 - 11x + 14}{4x^2 - 16x + 16} = -\infty$$

$$\text{f) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 + 2x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)^2(x-1)}{x(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x} = 2$$

061

●○○

Donada la funció:

$$f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4}$$

determina els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow \frac{0}{0}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)(2x-1)}{(x+2)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x-1}{x-2} = \frac{5}{4}$$

062

●○○

Troba el límit de la funció quan x tendeix a 0 i quan x tendeix a 3.

$$f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 3x^2}$$

Especifica el valor dels límits laterals, si cal.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} \rightarrow \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x - 3} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} \rightarrow \frac{81}{0}$$

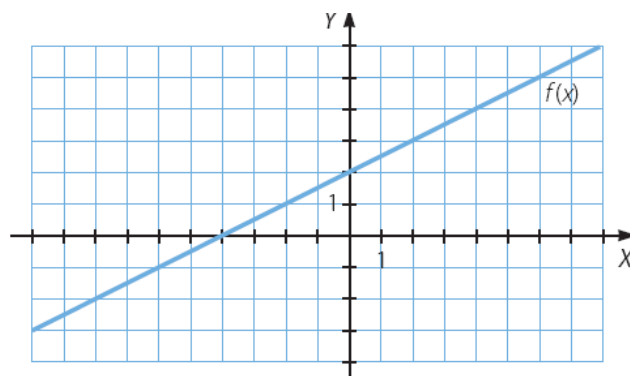
$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^4}{x^3 - 3x^2}.$$

076
●○○

Fixa't en la gràfica de la funció
i determina aquests límits:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 3} f(x) \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$



Estudia la continuïtat
de la funció (x).

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 3,5$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$$

La funció és contínua a excepció de $x = 2$, ja que no existeix $f(2)$.

077
●●○

Completa la taula per a aquesta funció:

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3}$$

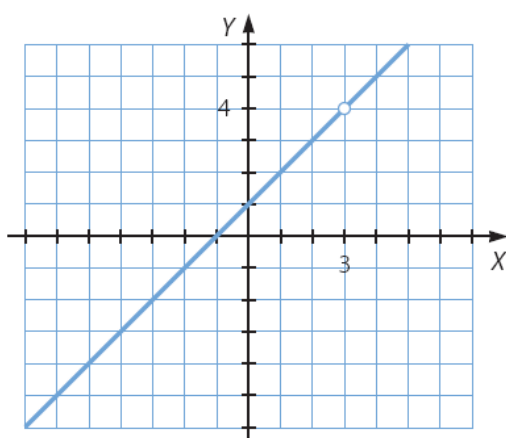
Comprova que el límit, quan x tendeix a 3, és: $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$

Quant val $f(3)$? Fes una representació de la funció.

Quina diferència hi ha entre les gràfiques de $f(x)$ i de $y = x + 1$?

x	2,5	2,9	2,999	3,001	3,01	3,1	3,5
$f(x)$	3,5	3,9	3,999	4,001	4,01	4,1	4,5

No existeix $f(3)$.

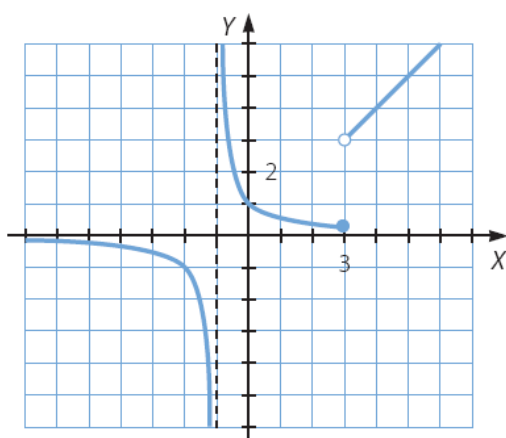


La gràfica de $f(x)$ coincideix amb la gràfica de la recta $y = x + 1$, excepte en el punt $x = 3$.

078
●●○

Dibuixa una funció que sigui contínua, excepte a $x = -1$, que tingui un salt infinit i que tingui un salt finit a $x = 3$.

Resposta oberta.

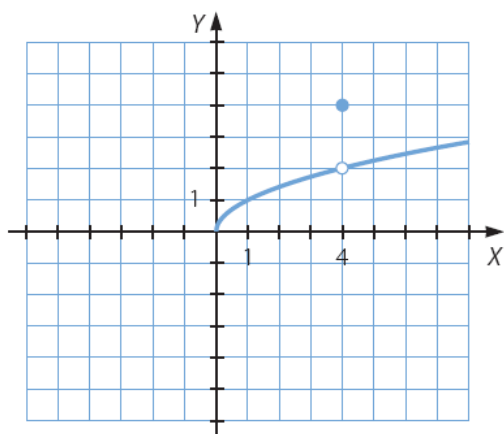


079

●○○

Dibuixa una funció que tingui com a domini $[0, +\infty)$, i que presenti un punt de discontinuïtat evitable a $x = 4$.

Resposta oberta.



080

●●○

Determina els punts de discontinuïtat de les funcions següents:

a) $y = \frac{1}{x+3}$

e) $y = \frac{x+2}{x^2-7x+12}$

b) $y = \frac{x+2}{x^2-x+12}$

f) $y = \sqrt{x-5}$

c) $y = \sqrt{4+x}$

g) $y = \sqrt{x^2-2x-8}$

d) $y = \sqrt{4-3x-x^2}$

h) $y = \sqrt{x^2-2x+8}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-3\}$

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x}{x+3} \rightarrow \frac{1}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x+3} = +\infty$$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{1}{x+3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{1}{x+3} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -3} f(x), \text{ i } x = -3 \text{ és un punt de discontinuïtat inevitable de salt infinit.}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

c) $\text{Dom } f = [-4, +\infty) \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

d) $\text{Dom } f = [-4, 1] \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3, 4\}$

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+2}{x^2-7x+12} \rightarrow \frac{5}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{x^2-7x+12} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x^2-7x+12} = -\infty$$

$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x+2}{x^2-7x+12} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x+2}{x^2-7x+12} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \text{ i } x = 3 \text{ és un punt de discontinuïtat inevitable de salt infinit.}$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+2}{x^2-7x+12} \rightarrow \frac{6}{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{x+2}{x^2-7x+12} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{x+2}{x^2-7x+12} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 4} f(x), \text{ i } x=4 \text{ és un punt de discontinuïtat inevitable de salt infinit.}$$

f) $\text{Dom } f = [5, +\infty) \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

g) $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup [4, +\infty) \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

h) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

081
•••

Estudia la continuïtat de les funcions a $x = 3$. Si presenten discontinuïtat, determina de quin tipus de discontinuïtat es tracta:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x+3 & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x^2 - 2x + 3 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x-3} & \text{si } x < 3 \\ x-15 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \frac{12}{x-1} & \text{si } x < 3 \\ 6 & \text{si } x = 3 \\ x-2 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} \frac{x+1}{x-1} & \text{si } x \neq 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \ln(x-2) & \text{si } x < 3 \\ -2 & \text{si } x = 3 \\ \sin(x-3) & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{a) } f(3) = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (x+3) = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - 2x + 3) = 6 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

Com que $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, la funció és contínua en $x = 3$.

$$\text{b) } f(3) = 6$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{12}{x-1} = 6 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-2) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \text{ i la funció no és contínua en } x = 3.$$

Es tracta d'un punt de discontinuïtat inevitable de salt finit.

$$\text{c) } f(3) = -2$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\ln(x-2)) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sin(x-3) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 0$$

Com que $f(3) \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, la funció no és contínua en $x = 3$.

Es tracta d'un punt de discontinuïtat evitable.

d) $f(3) = -12$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{12}{x-3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} (x-15) = -12 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \text{ i la funció no és } \\ \text{contínua en } x=3.$$

Es tracta d'un punt de discontinuïtat inevitable de salt infinit.

e) $f(3) = -2$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+1}{x-1} = 2$$

Com que $f(3) \neq \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, la funció no és contínua en $x=3$.

Es tracta d'un punt de discontinuïtat evitable.

082
●●○

Quin valor ha de prendre a perquè les funcions siguin contínues?

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{x+1} & \text{si } x < -2 \\ a & \text{si } x = -2 \\ -2x-7 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} \frac{-\pi}{2x} & \text{si } x \leq -2 \\ \log(ax+7) & \text{si } x > -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1} & \text{si } x \leq -2 \\ ax-2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

a) $f(-2) = a$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{3}{x+1} = -3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (-2x-7) = -3 \end{array} \right\} \rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -3$$

La funció és contínua si $f(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \rightarrow a = -3$.

b) $f(-2) = 2^{-3} = \frac{1}{8}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} 2^{x-1} = \frac{1}{8} \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} (ax-2) = -2a-2 \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ si } \frac{1}{8} = -2a-2 \rightarrow a = -\frac{17}{16}$$

c) $f(-2) = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^-} \operatorname{tg} \frac{-\pi}{2x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \log(ax+7) = \log(-2a+7) \end{array} \right\}$$

$$\rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow -2} f(x) \text{ si } 1 = \log(-2a+7) \rightarrow a = -\frac{3}{2}$$

Raona si la funció següent és contínua a $x = 3$ i a $x = 0$.

$$y = \begin{cases} 2^x - 1 & \text{si } x \geq 3 \\ \frac{12}{x} + 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

$$f(3) = 7$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{12}{x} + 3 = 7 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} (2^x - 1) = 7 \end{aligned} \right\} \rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

Com que $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, la funció és contínua en $x = 3$.

No existeix $f(0)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{12}{x} + 3 \right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{12}{x} + 3 \right) = +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ i la funció no és } \\ \text{contínua en } x = 0.$$

Es tracta d'un punt de discontinuïtat inevitable de salt infinit.

Investiga si aquestes funcions són contínues:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \log(x + 7) & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } x = 3 \\ \frac{5}{x + 2} & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} \sqrt{\frac{3x + 5}{2}} & \text{si } x < -1 \\ 0 & \text{si } x = -1 \\ x + 1 & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} \frac{5}{2 - x} & \text{si } x < 1 \\ 5 & \text{si } x = 1 \\ 2^{x+1} + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

- a) Si $x < 3$: $f(x) = \log(x + 7) \rightarrow \text{Dom } f = (-7, 3) \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

Si $x = 3$: $f(3) = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} (\log(x + 7)) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{5}{x + 2} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 1$$

Com que $f(3) = \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, la funció és contínua en $x = 3$.

Si $x > 3$: $f(x) = \frac{5}{x + 2} \rightarrow \text{Dom } f = (3, +\infty) \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

La funció és contínua en $(-7, +\infty)$.

- b) Si $x < -1$: $f(x) = \sqrt{\frac{3x + 5}{2}} \rightarrow \text{Dom } f = \left[-\frac{5}{3}, -1\right) \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

Si $x = -1$: $f(-1) = 1$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \sqrt{\frac{3x + 5}{2}} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \text{ i la funció no és} \\ \text{contínua en } x = -1. \text{ Es tracta d'un punt} \\ \text{de discontinuïtat inevitable de salt finit.} \end{array}$$

Si $x > -1$: $f(x) = x + 1 \rightarrow \text{Dom } f = (-1, +\infty) \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

La funció és contínua en $\left[-\frac{5}{3}, -1\right) \cup (-1, +\infty)$.

- c) Si $x < 1$: $f(x) = \frac{5}{2 - x} \rightarrow \text{Dom } f = (-\infty, 1) \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

Si $x = 1$: $f(1) = 5$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{5}{2 - x} = 5 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2^{x+1} + 1) = 5 \end{array} \right\} \rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 5$$

Com que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, la funció és contínua en $x = 1$.

Si $x > 1$: $f(x) = 2^{x+1} + 1 \rightarrow \text{Dom } f = (1, +\infty) \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

Estudia la continuïtat de la funció següent:

$$g(t) = \begin{cases} \log(t+7) & \text{si } t < 3 \\ 2 & \text{si } t = 3 \\ \frac{4}{7-t} & \text{si } t > 3 \end{cases}$$

Si presenta punts de discontinuïtat, estudia el límit quan t hi tendeix i determina quins tipus de discontinuïtats són.

Si $t < 3$: $g(t) = \log(t+7) \rightarrow \text{Dom } f = (-7, 3) \rightarrow$ No hi ha punts de discontinuïtat.

Si $t = 3$: $g(3) = 2$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 3^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 3^-} \log(t+7) = 1 \\ \lim_{t \rightarrow 3^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 3^+} \frac{4}{7-t} = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow 3} g(t) = 1$$

Com que $g(3) = \lim_{t \rightarrow 3} g(t)$, la funció és contínua en $t = 3$.

Si $t > 3$: $g(t) = \frac{4}{7-t} \rightarrow \text{Dom } f = (3, +\infty) - \{7\}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow 7^-} g(t) = \lim_{t \rightarrow 7^-} \frac{4}{7-t} = +\infty \\ \lim_{t \rightarrow 7^+} g(t) = \lim_{t \rightarrow 7^+} \frac{4}{7-t} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{t \rightarrow 7} g(t) \text{ i la funció no és } \\ \text{contínua en } t = 7.$$

Es tracta d'un punt de discontinuïtat inevitable de salt infinit.

La funció és contínua en $(-7, 7) \cup (7, +\infty)$.

Estudia la continuïtat d'aquestes funcions:

a) $y = [x]$ (Part entera de x)

c) $y = |x^2 - 1|$

b) $y = \frac{x}{|x|}$

d) $y = \frac{1}{|x^2 - 1|}$

a) La funció és contínua llevat en els nombres enters.

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = a - 1 \\ \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = a \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow a} f(x).$$

Tots els nombres enters són punts de discontinuïtat inevitable de salt finit.

b) $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$

No existeix $f(0)$.

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{No existeix } \lim_{x \rightarrow 0} f(x), \text{ i la funció no és contínua en } x = 0.$$

Es tracta d'un punt de discontinuïtat inevitable de salt finit.

La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$c) f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

$$\text{Si } x = -1: f(-1) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} (-x^2 + 1) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$$

Com que $f(-1) = \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$, la funció és contínua en $x = -1$.

$$\text{Si } x = 1: f(1) = 0$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + 1) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$$

Com que $f(1) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, la funció és contínua en $x = 1$.

La funció és contínua en $\mathbb{R}$.

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \text{ o si } x > 1 \\ \frac{1}{-x^2 - 1} & \text{si } -1 < x < 1 \end{cases}$$

No existeix $f(-1)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{-x^2 + 1} = +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{La funció no és contínua en } x = -1.$$

És un punt de discontinuïtat inevitable de salt infinit.

No existeix $f(1)$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{-x^2 + 1} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x^2 - 1} = +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{La funció no és contínua en } x = 1.$$

És un punt de discontinuïtat inevitable de salt infinit.

La funció és contínua en $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

088
●○○

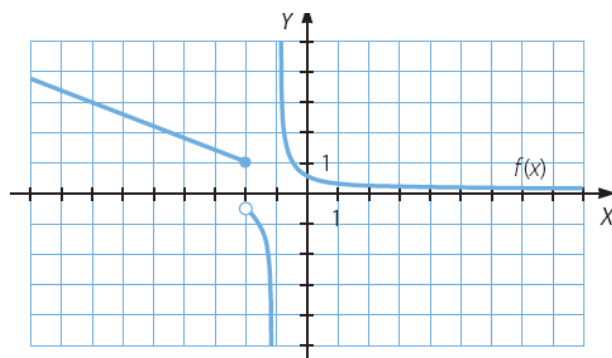
Observa la gràfica de la funció
i determina els límits que s'indiquen:

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$



a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$ no existeix.

d) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ no existeix.

Determina totes les asímptotes de les funcions i situa-hi les branques infinites:

a) $f(x) = \frac{2-6x}{x+3}$

d) $f(x) = \frac{3}{x-1}$

b) $f(x) = \frac{3x^2+2x}{x+1}$

e) $f(x) = \frac{x^3}{x^2-5x+6}$

c) $f(x) = \frac{4x^3}{x-5}$

f) $f(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2-6x}{x+3} \rightarrow \frac{20}{0}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{2-6x}{x+3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{2-6x}{x+3} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asímptota vertical en } x = -3.$$

Per l'esquerra, la branca infinita de la funció tendeix a $-\infty$, i per la dreta, a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-6x}{x+3} = -6 \rightarrow \text{La funció té una asímptota horitzontal: } y = -6.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) > -6$, i quan x tendeix a $+\infty$ la funció està per sobre de l'asímtota.

Si $x = -1.000 \rightarrow f(x) < -6$, i quan x tendeix a $-\infty$ la funció està per sota de l'asímtota.

Com que té una asímptota horitzontal, la funció no té asímptota obliqua.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^2+2x}{x+1} \rightarrow \frac{1}{0}$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3x^2+2x}{x+1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{3x^2+2x}{x+1} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asímptota vertical en } x = -1.$$

Per l'esquerra, la branca infinita de la funció tendeix a $-\infty$, i per la dreta, a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x}{x+1} = +\infty \rightarrow \text{La funció no té asímptota horitzontal.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+2x}{x^2+x} = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x^2+2x}{x+1} - 3x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x+1} = -1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asímptota obliqua: } y = 3x - 1.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - 3x + 1 > 0$, i quan x tendeix a $+\infty$ la funció està per sobre de l'asímtota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - 3x + 1 < 0$, i quan x tendeix a $-\infty$ la funció està per sota de l'asímtota.

$$c) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{4x^3}{x-5} \rightarrow \frac{500}{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{4x^3}{x-5} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{4x^3}{x-5} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asymptota vertical en } x = 5.$$

Per l'esquerra, la branca infinita de la funció tendeix a $-\infty$, i per la dreta, a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x-5} = +\infty \rightarrow \text{La funció no té asymptota horitzontal.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^3}{x^2 - 5x} = +\infty \rightarrow \text{La funció no té asymptota obliqua.}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3}{x-1} \rightarrow \frac{3}{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{3}{x-1} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3}{x-1} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asymptota vertical en } x = 1.$$

Per l'esquerra, la branca infinita de la funció tendeix a $-\infty$, i per la dreta, a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x-1} = 0 \rightarrow \text{La funció té una asymptota horitzontal: } y = 0.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) > 0$, i quan x tendeix a $+\infty$ la funció està per sobre de l'asíptota.

Si $x = -1.000$, $f(x) < 0$, i quan x tendeix a $-\infty$ la funció està per sota de l'asíptota.

Com que té una asíptota horitzontal, la funció no té asíptota obliqua.

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} \rightarrow \frac{8}{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asíptota vertical en } x = 2.$$

Per l'esquerra, la branca infinita de la funció tendeix a $+\infty$, i per la dreta, a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} = +\infty \rightarrow \text{La funció no té asymptota horitzontal.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - 5x^2 + 6x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} - x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^2 - 6x}{x^2 - 5x + 6} = 5 \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{La funció té una} \\ \text{asímtota obliqua:} \\ y = x + 5.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - x - 5 > 0$, i quan x tendeix a $+\infty$ la funció està per sobre de l'asímtota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - x - 5 < 0$, y cuando x tiende a $-\infty$ la funció està per sota de l'asímtota.

$$\left. \begin{aligned} x \rightarrow 3^- \quad \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{x^3}{x^2 - 5x + 6} &= +\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asímtota vertical en } x = 3.$$

Per l'esquerra, la branca infinita de la funció tendeix a $-\infty$, i per la dreta, a $+\infty$.

f) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow$ La funció no té asímtota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 + x + 1} = 0 \rightarrow \text{La funció té una asímtota horitzontal: } y = 0.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) > 0$, i quan x tendeix a $+\infty$ la funció està per sobre de l'asímtota.

Si $x = -1.000$, $f(x) < 0$, i quan x tendeix a $-\infty$ la funció està per sota de l'asímtota.

Com que té una asímtota horitzontal, la funció no té asímtota obliqua.

Determina totes les branques infinites i les asímptotes de les funcions, i també la posició que tenen entre si:

$$\text{a) } f(x) = \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3}$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8}$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8}$$

$$\text{d) } f(x) = \frac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8}$$

$$\text{a) } \text{Dom } f = \mathbb{R} - \left\{0, \frac{2}{5}\right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} \rightarrow \frac{1}{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asímptota vertical en } x = 0.$$

Les dues branques infinites de la funció tendeixen a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} \rightarrow \frac{-1,736}{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow \frac{2}{5}^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = +\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asímptota vertical en } x = \frac{2}{5}.$$

Per l'esquerra, la branca infinita de la funció tendeix a $-\infty$, i per la dreta tendeix a $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 5x^3} = -\frac{1}{5} \rightarrow \text{La funció té una asymptota horitzontal: } y = -\frac{1}{5}.$$

Si $x = 1.000$, $f(x) < -\frac{1}{5}$, i quan x tendeix a $+\infty$ la funció està per sota de l'asíptota.

Si $x = -1.000$, $f(x) > -\frac{1}{5}$, i quan x tendeix a $-\infty$ la funció està per sobre de l'asíptota.

Com que té una asíptota horitzontal, la funció no té asíptota obliqua.

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} \rightarrow \frac{7}{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asíptota vertical en } x = -2.$$

Per l'esquerra, la branca infinita de la funció tendeix a $+\infty$, i per la dreta tendeix a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} \rightarrow \frac{-5}{0}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = -\infty \end{array} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asíptota vertical en } x = 2.$$

Per l'esquerra, la branca infinita de la funció tendeix a $+\infty$, i per la dreta tendeix a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} = +\infty \rightarrow \text{La funció no té asymptota horitzontal.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^3 - 8x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 - 8} - \frac{1}{2}x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 1}{2x^2 - 8} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{La funció té una} \\ \text{asímtota obliqua:} \\ y = \frac{1}{2}x. \end{array}$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - \frac{1}{2}x < 0$, i quan x tendeix a $+\infty$ la funció està per sota de l'asímtota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$, i quan x tendeix a $-\infty$ la funció està per sobre de l'asímtota.

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} \rightarrow$ La funció no té asímtota vertical.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8} = +\infty \rightarrow \text{La funció no té asímtota horitzontal.}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^3 + 8x} = \frac{1}{2} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8} - \frac{1}{2}x \right) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-11x + 1}{2x^2 + 8} = 0 \end{aligned} \right\} \rightarrow \begin{array}{l} \text{La funció té una} \\ \text{asímtota obliqua:} \\ y = \frac{1}{2}x. \end{array}$$

Si $x = 1.000$, $f(x) - \frac{1}{2}x < 0$, i quan x tendeix a $+\infty$ la funció està per sota de l'asímtota.

Si $x = -1.000$, $f(x) - \frac{1}{2}x > 0$, i quan x tendeix a $-\infty$ la funció està per sobre de l'asímtota.

d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-4\}$

$$\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8} \rightarrow \frac{-35}{0}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -4^-} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8} &= +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -4^+} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8} &= -\infty \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{La funció té una asímtota vertical en } x = -4.$$

Per l'esquerra, la branca infinita de la funció tendeix a $+\infty$, i per la dreta tendeix a $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x + 8} = +\infty \rightarrow \text{La funció no té asímtota horitzontal.}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{2x^2 + 8x} = +\infty \rightarrow \text{La funció no té asímtota obliqua.}$$