

DEFINICIÓ DE MATRIU. OPERACIONS

1

Escriu de forma explícita la matriu quadrada d'ordre tres els termes de la qual siguin $a_{ij} = (i-j-1)^3$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -8 & -27 \\ 0 & -1 & -8 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

2

Amb les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcula: **A + B;** **A - B;** **A x B;** **B x A;** **A^t.**

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+1 & 0+0 & 1+1 \\ 3+1 & 0+2 & 0+1 \\ 5+1 & 1+1 & 1+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0-0 & 1-1 \\ 3-1 & 0-2 & 0-1 \\ 5-1 & 1-1 & 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \\ 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 0 + 0 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 3 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 & 5 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 & 5 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 0 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \\ 1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 0 \cdot 5 & 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 & 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3

Amb les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Calcula: $(A + B)^2$; $(A - B)^2$; $(B)^3$; $A \cdot B^t \cdot C$.

$$A + B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(A + B)^2 = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 & -14 & 42 \\ 19 & -6 & 35 \\ 34 & -15 & 73 \end{pmatrix}$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(A - B)^2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 0 \\ 9 & 0 & -1 \\ -16 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B^3 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -6 & 14 \\ 12 & -5 & 14 \\ -3 & -4 & 14 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & -27 & 70 \\ 33 & -26 & 70 \\ -24 & -11 & 42 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot B^t \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 5 & 4 & 9 \\ -3 & -1 & 3 \\ 20 & 17 & 16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 & 23 & 16 \\ 14 & 3 & 3 \\ 30 & 52 & 47 \end{pmatrix}$$

4

Amb les matrius:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$$

Es demana:

a) A^T, C^T

b) Raonar si són possibles els productes:

$(A^t \cdot B) \cdot C$ i $(B \cdot C^t) \cdot A^t$

sigui una matriu quadrada? c) Quina dimensió hauria de tenir la matriu M si volem efectuar el producte: $A \cdot M \cdot C$?

d) Quina dimensió hauria de tenir la matriu M si volem que el resultat del producte: $C^T \cdot M$

a)

$$A^t = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

b) $(A^t \cdot B) \cdot C$ $(A^t_{3 \times 2} \cdot B_{2 \times 2}) \cdot C_{3 \times 2} = (A^t \cdot B)_{3 \times 2} \cdot C_{3 \times 2}$ no es pot efectuar perquè el número de columnes de $(A^t \cdot B)$ no coincideix amb el número de files de C.

$(B \cdot C^t) \cdot A^t$ Si es pot efectuar:

$$(B_{2 \times 2} \cdot C^t_{2 \times 3}) \cdot A^t_{3 \times 2} = (B \cdot C)_{2 \times 3} \cdot A^t_{3 \times 2} = (B \cdot C^t \cdot A^t)_{2 \times 2}$$

c) $A_{3 \times 2} \cdot M_{m \times n} \cdot C_{3 \times 2}$ $m = 2$ $n = 3$ 2×3

d) $C^t_{2 \times 3} \cdot M_{m \times n}$ $m = 3$ $n = 3$

5

Demostra que: $A^2 - A - 2I = 0$, amb:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^2 - A - 2I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

6

Calcula A^n amb $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Procediment de demostració per inducció:

1. Calculem A^2 , A^3 , fins poder trobar una hipòtesi d'inducció:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Els elements de la matriu que van canviant són potències successives de 2.

2. Hipòtesi d'inducció: $A^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix}$

3. Comprovació d'aquesta hipòtesi per A^{n+1} :

$$A^{n+1} = A \cdot A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^{n-1} & 0 & 2^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 2^n \\ 0 & 1 & 0 \\ 2^n & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Ja que $2^{n-1} + 2^{n-1} = 2 \cdot 2^{n-1} = 2^n$

Calcula A^{428} amb $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}$

En aquest tipus d'exercicis no sempre cal obtenir A^n . De vegades, es produeix una repetició en les potències calculades que permet donar la resposta més fàcilment.

1. Calculem A^2 , A^3 , etc.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 5 & -1 \\ -3 & -4 & 1 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

$$A^4 = A \cdot A^3 = A \cdot I_3 = A$$

2. Aquesta repetició en els resultats permet afirmar que:

$$A = A^4 = A^7 = A^{10} = A^{13} = \dots$$

$$A^2 = A^5 = A^8 = A^{11} = A^{14} = \dots$$

$$A^3 = A^6 = A^9 = A^{12} = A^{15} = \dots$$

3. És un cicle d'ordre 3, per tant, si dividim entre 3 l'exponent que ens demanen i el residu ens donarà la potència amb la qual coincideix:

$$428 = 142 \cdot 3 + 2 \quad \text{Residu} = 2$$

$$A^{428} = A^2 = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -3 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

MATRIU INVERSA. EQUACIONS AMB MATRIUS.

8

Troba les matrius inverses de:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Hi ha altres mètodes per obtenir una matriu inversa però quan es tracta d'una matriu d'ordre $n=2$ és molt fàcil trobar-la amb la resolució de dos sistemes senzills:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_2$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x+4y & 3z+4t \\ 5x+7y & 5z+7t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3x+4y & 3z+4t \\ 5x+7y & 5z+7t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{matrix} 3x+4y=1 \\ 5x+7y=0 \end{matrix} \right\} \quad x=7 \quad y=-5 \quad \left. \begin{matrix} 3z+4t=0 \\ 5z+7t=1 \end{matrix} \right\} \quad z=-4 \quad t=3$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$$

Comprovació:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

De la mateixa manera podem obtenir les altres matrius inverses

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & 1/12 \\ 0 & 1/8 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \begin{pmatrix} 5/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

9

Troba la matriu B que verifica que $X \cdot A = B$ amb:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a+2b & b \\ c+2d & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a+2b=5 \\ b=2 \\ c+2d=6 \\ d=3 \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

10

Trobar totes les matrius que commuten amb la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+c & b+d \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a = a+c \\ a+b = b+d \\ c = c \\ c+d = d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = d \end{cases} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$$

11

Troba les matrius A i B que verifiquen el sistema:

$$\begin{cases} 2A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ A-3B = \begin{pmatrix} -4 & -3 & -2 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Multiplicant la segona equació per -2 i sumant:

$$\begin{cases} 2A+B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ -2A+6B = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{cases} \quad 7B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{9}{7} & \frac{8}{7} & \frac{6}{7} \\ 0 & \frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}$$

De la mateixa manera, si multipliquem la primera equació per 3 i sumem, obtenim:

$$7A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ -7 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \frac{-1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ -1 & \frac{3}{7} & \frac{-1}{7} \end{pmatrix}$$

12

Resol $AX = B$ amb $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix}$

- Mètode 1 (sense utilitzar la matriu inversa A^{-1}):

Per les dimensions de les matrius involucrades: $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x - 2y \\ 3x + 8y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} -x - 2y = -10 \\ 3x + 8y = 12 \end{cases}$$

$x = 28$ $y = -9$ i per tant: $X = \begin{pmatrix} 28 \\ -9 \end{pmatrix}$

- Mètode 2 (utilitzant la matriu inversa A^{-1}):

Si $AX = B$, **premultipliquem** per A^{-1} i s'obté: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$,
com $A^{-1} \cdot A = I$ aleshores es dedueix que $X = A^{-1} \cdot B$
(és molt important multiplicar per l'esquerra en els dos membres perquè no hem d'oblidar que la propietat commutativa no es compleix en general)

Calculem A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - 2y & -z - 2t \\ 3x + 8y & 3z + 8t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -x - 2y & -z - 2t \\ 3x + 8y & 3z + 8t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -x - 2y = 1 \\ 3x + 8y = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x = -4 & y = 3/2 \end{matrix} \quad \begin{cases} -z - 2t = 0 \\ 3z + 8t = 1 \end{cases} \quad \begin{matrix} z = -1 & t = 1/2 \end{matrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} -4 & -1 \\ 3/2 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -10 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 40 - 12 \\ -15 + 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28 \\ -9 \end{pmatrix}$$

13

Resol $XA = B$ amb $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$

- Mètode 1 (sense utilitzar la matriu inversa A^{-1}):

Per les dimensions de les matrius involucrades: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y & -3x - 4y \\ z + t & -3z - 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix}$$

Es resolven els dos sistemes:

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 2 \\ -3x - 4y = 5 \end{array} \right\} \quad x = 13 \quad y = -11 \quad \left. \begin{array}{l} z + t = -7 \\ -3z - 4t = 3 \end{array} \right\} \quad z = -25 \quad t = 18$$

i s'obté: $X = \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ -25 & 18 \end{pmatrix}$

- Mètode 2 (utilitzant la matriu inversa A^{-1}):

Si $XA = B$, **postmultipliquem** per A^{-1} i s'obté: $X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$,
com $A \cdot A^{-1} = I$ aleshores es dedueix que $X = B \cdot A^{-1}$
(és molt important multiplicar per la dreta en els dos membres perquè no hem d'oblidar que la propietat commutativa no es compleix en general)

Calculem A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 3y & z - 3t \\ x - 4y & z - 4t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x - 3y & z - 3t \\ x - 4y & z - 4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} x - 3y = 1 \\ x - 4y = 0 \end{array} \right\} \quad x = 4 \quad y = 1 \quad \left. \begin{array}{l} z - 3t = 0 \\ z - 4t = 1 \end{array} \right\} \quad z = -3 \quad t = -1$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -7 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -11 \\ -25 & 18 \end{pmatrix}$$

14

Resol $AX - B = C$ amb:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot X = B - C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Si $AX = B - C$, **premultipliquem** per A^{-1} i s'obté: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (B - C)$,
com $A^{-1} \cdot A = I$ aleshores es dedueix que $X = A^{-1} \cdot (B - C)$
(és molt important multiplicar per l'esquerra en els dos membres perquè no hem d'oblidar que la propietat commutativa no es compleix en general)

Calculem A^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & z \\ y & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x + y & 4z + t \\ -x + y & -z + t \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4x + y & 4z + t \\ -x + y & -z + t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{array}{l} 4x + y = 1 \\ -x + y = 0 \end{array} \right\} \quad x = 1/5 \quad y = 1/5 \quad \left. \begin{array}{l} 4z + t = 0 \\ -z + t = 1 \end{array} \right\} \quad z = -1/5 \quad t = 4/5$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix} \rightarrow X = \begin{pmatrix} 1/5 & -1/5 \\ 1/5 & 4/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ -3 & -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 4/5 & 4/5 & -6/5 & -2/5 \\ -11/5 & 1/5 & 14/5 & -2/5 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4 & 4 & -6 & -2 \\ -11 & 1 & 14 & -2 \end{pmatrix}$$

15

Calcular el rang de la matriu següent:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_1 - 2 \mathbf{F}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_3 - 3 \mathbf{F}_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{F}_3 + 2 \mathbf{F}_1$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{r(A)} = 2.$$

16

Calcular el rang de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & {}^r \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -4 & 2 & -1 \\ 3 & -12 & 6 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} {}^r \begin{pmatrix} \textcircled{1} & -4 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{(2)}{=} {}^r \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & -1 \\ 0 & 7 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{(3)}{=} {}^r \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & -1 \\ 0 & \textcircled{1} & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -25 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & (1) \ f_2 = f_2 - 3f_1 \ ; \ f_3 = f_3 - 2f_1 \quad | \quad (2) \ f_2 \leftrightarrow f_4 \quad | \quad (3) \ f_3 = f_3 - 7f_2
 \end{aligned}$$

Per tant el rang és $r(A) = 3$

17

Calcular el rang de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & {}^r \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 2 & 7 & 12 & 17 \\ 3 & 8 & 13 & 18 \\ 4 & 9 & 14 & 19 \\ 5 & 10 & 15 & 20 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} {}^r \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \stackrel{(1)}{=} {}^r \begin{pmatrix} 1 & 6 & 11 & 16 \\ 0 & -5 & -10 & -15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
 & (1) \ f_5 = f_5 - f_4 \ ; \ f_4 = f_4 - f_3 \ ; \ f_3 = f_3 - f_2 \ ; \ f_2 = f_2 - f_1
 \end{aligned}$$

Per tant $r(A) = 2$.