

EXERCICI 27 Discuteix i resol

$$\text{a) } \begin{cases} x - y - z = k \\ x - y + 2z = 1 \\ 2x + y + kz = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & k \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & k & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a & & & \\ 2a - 1a & & & \\ 3a - 2 \cdot 1a & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & k \\ 0 & 0 & 3 & 1 - k \\ 0 & 3 & k + 2 & -2k \end{pmatrix}$$

Sistema *compatible determinat* per a tot k .

Solucions: a partir del sistema escalonat obtingut

$$\begin{cases} x - y - z = k \\ 3z = 1 - k \\ 3y + (k + 2)z = -2k \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= k + y + z && \rightarrow x = \frac{k^2 + k + 1}{9} \\ z &= \frac{1 - k}{3} \\ y &= \frac{-2k - (k + 2)z}{3} && \rightarrow y = \frac{k^2 - 5k - 2}{9} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 3x + 2y + az = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 2 \\ x + y - z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 3 & 2 & a & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 3a & & & \\ 2a & & & \\ 1a & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & a & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1a & & & \\ 2a - 5 \cdot 1a & & & \\ 3a - 3 \cdot 1a & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & a + 3 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1a & & & \\ 2a & & & \\ -2 \cdot 3a + 2a & & & \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 8 & -3 \\ 0 & 0 & 2 - 2a & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 - 2a = 0 \rightarrow a = 1$$

- Si $a = 1 \rightarrow$ Sistema *incompatible*
- Si $a \neq 1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*

Solucions:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ -2y + 8z = -3 \\ (2 - 2a)z = 1 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} x &= 1 - y + z && \rightarrow x = \frac{a - 4}{2 - 2a} \\ y &= \frac{3 + 8z}{2} && \rightarrow y = \frac{7 - 3a}{2 - 2a} \\ &&& \rightarrow z = \frac{1}{2 - 2a} \end{aligned}$$

EXERCICI 27 Discuteix i resol

$$\begin{aligned} \text{a) } \left. \begin{aligned} -x + my + z &= 2 \\ 2x - y + 2z &= 0 \\ -x - 3z &= -2 \end{aligned} \right\} & \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & m & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} -3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & m & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a + 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & m & 4 & 4 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ -2a \\ 3a + 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & m-1 & 0 & 0 \end{array} \right) \end{aligned}$$

- Si $m = 1 \rightarrow$ Sistema *compatible indeterminat*

$$\left. \begin{aligned} x + 3z &= 2 \\ y + 4z &= 4 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} x &= 2 - 3z \\ y &= 4 - 4z \\ z &= \lambda \end{aligned}$$

Solucions: $(2 - 3\lambda, 4 - 4\lambda, \lambda)$

- Si $m \neq 1 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*

$$\left. \begin{aligned} x + 3z &= 2 \\ y + 4z &= 4 \\ (m-1)y &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y &= 0 \\ z &= 1 \\ x &= 2 - 3z = -1 \end{aligned} \quad \text{Solució: } (-1, 0, 1)$$

$$\text{b) } \left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ 3x + 2y + az &= 5 \\ 2x + y + z &= 3 \end{aligned} \right\} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & a & 5 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 3a \\ 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & a & 5 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & a-3 & 5 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ -2a \\ 3a - 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & a-2 & 2 \end{array} \right)$$

- Si $a = 2 \rightarrow$ Sistema *incompatible*

- Si $a \neq 2 \rightarrow$ Sistema *compatible determinat*. El resoltem:

$$\left. \begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ y + z &= -3 \\ (a-2)z &= 2 \end{aligned} \right\}$$

$$z = \frac{2}{a-2}$$

$$y = -3 - z = -3 - \frac{2}{a-2} = \frac{4-3a}{a-2}$$

$$x = -y - z = \frac{-4+3a}{a-2} - \frac{2}{a-2} = \frac{3a-6}{a-2} = 3$$

$$\text{Solució: } \left(3, \frac{4-3a}{a-2}, \frac{2}{a-2} \right)$$

EXERCICI 20 Resol i interpreta geomètricament:

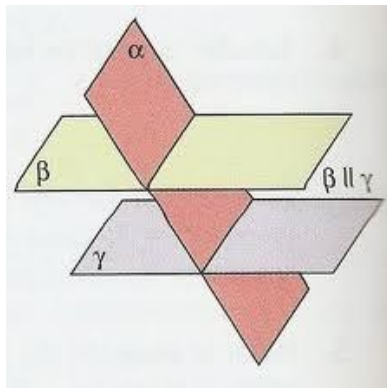
$$\begin{aligned} \text{c) } \left. \begin{aligned} -x + 2y - z &= 1 \\ 2x - 4y + 2z &= 3 \\ x + y + z &= 2 \end{aligned} \right\} & \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 3a \\ 2a \\ 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a - 2 \cdot 1a \\ 3a + 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -6 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a + 2 \cdot 3a \\ 3a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array} \right) \end{aligned}$$

La segona equació és impossible: $0x + 0y + 0z = 5$.

El sistema és *incompatible*.

Interpretació geomètrica:

$$\begin{aligned} \text{plans 1 i 2: } & \frac{-1}{2} = \frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \neq \frac{1}{3} \quad \text{són paral·lels} \\ \text{plans 2 i 3: } & \frac{2}{1} \neq \frac{-4}{1} \quad \text{són secants} \\ \text{plans 1 i 3: } & \frac{-1}{1} \neq \frac{2}{1} \quad \text{són secants} \end{aligned}$$



$$d) \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 4x + y - z = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 4 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a + 1a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 6 & -2 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{matrix} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & | & 0 \\ 3 & -1 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases}$$

$$y = 3x$$

$$z = -2x + 3y = -2x + 9x = 7x$$

$$x = \lambda$$

$$\text{Solucions: } (\lambda, 3\lambda, 7\lambda)$$

Sistema compatible indeterminat

Interpretació geomètrica: són 3 plans secants en una recta comuna.

$$\begin{aligned} \text{plans 1 i 2: } \quad \frac{2}{3} &\neq \frac{-3}{-1} && \text{són secants} \\ \text{plans 2 i 3: } \quad \frac{3}{4} &\neq \frac{-1}{1} && \text{són secants} \\ \text{plans 1 i 3: } \quad \frac{2}{4} &\neq \frac{-3}{1} && \text{són secants} \end{aligned}$$

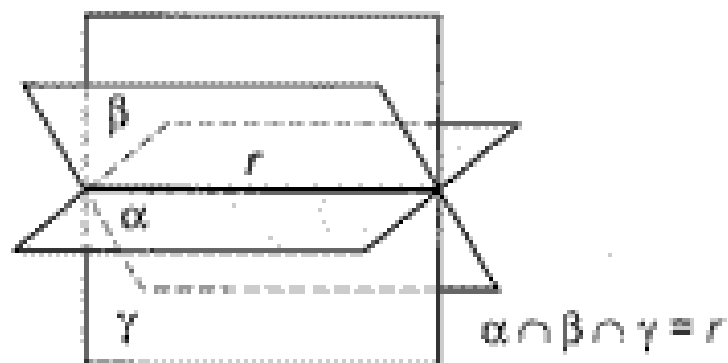


figura 4

EXERCICI 19 Resol i interpreta geomètricament

$$a) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 3z = 1 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 5 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a - 3 \cdot 1a \\ 3a - 5 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & -2 & 8 & -4 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{l} 1a \\ 2a \\ 3a - 2 \cdot 2a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{cases} x + y - z = 1 \\ -y + 4z = -2 \end{cases}$$

$$y = 4z + 2$$

$$x = 1 - y + z = 1 - (4z + 2) + z = -1 - 3z$$

$$z = \lambda$$

$$\text{Solucions: } (-1 - 3\lambda, 2 + 4\lambda, \lambda)$$

Sistema compatible indeterminat

Interpretació geomètrica: són 3 plans secants en una recta comuna.

$$\begin{aligned} \text{plans 1 i 2: } \quad \frac{1}{3} &\neq \frac{1}{2} && \text{són secants} \\ \text{plans 2 i 3: } \quad \frac{3}{5} &\neq \frac{2}{3} && \text{són secants} \\ \text{plans 1 i 3: } \quad \frac{1}{5} &\neq \frac{1}{3} && \text{són secants} \end{aligned}$$

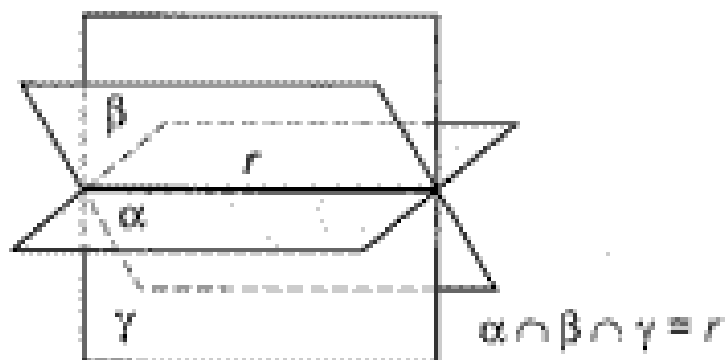


figura 4

$$\text{b) } \begin{cases} 3x + 4y - z = 3 \\ 6x - 6y + 2z = -16 \\ x - y + 2z = -6 \end{cases} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -1 & 3 \\ 6 & -6 & 2 & -16 \\ 1 & -1 & 2 & -6 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 3a \\ 2a : 2 \\ 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 3 & -3 & 1 & -8 \\ 3 & 4 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a - 3 \cdot 1a \\ 3a - 3 \cdot 1a \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & -5 & 10 \\ 0 & 7 & -7 & 21 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} 1a \\ 2a : (-5) \\ 3a : 7 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} x - y + 2z = -6 \\ z = -2 \\ y - z = 3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = 3 + z = 3 - 2 = 1 \\ x = -6 + y - 2z = -6 + 1 + 4 = -1 \end{cases}$$

Solució: $(-1, 1, -2)$

Sistema compatible determinat

Interpretació geomètrica: són 3 plans secants en un punt de coordenades $(-1, 1, -2)$