

Experiments i esdeveniments

- Els **experiments deterministes** segueixen unes lleis estrictes i mai no depenen de l'atzar.
- Els **experiments aleatoris** depenen de factors que no es poden determinar ni controlar.
- Un **esdeveniment elemental** correspon a cadascun dels resultats possibles d'un experiment; si es combinen diversos esdeveniments elementals, el resultat és un **esdeveniment compost**.
- L'**espai mostral** (Ω) d'un experiment és el conjunt de tots els esdeveniments elementals possibles que l'integren. Qualsevol subconjunt de l'espai mostral és un **esdeveniment**.

Esdeveniment segur	Esdeveniment impossible	Esdeveniments contraris	Esdeveniments compatibles	Esdeveniments incompatibles
Ocorre sempre i coincideix amb l'espai mostral.	No ocorre mai; es representa amb $(\emptyset)$.	Són aquells en què si se'n fa un, l'altre no es pot donar: $\bar{A} = \Omega - A$	Són aquells que poden ocórrer simultàniament.	Són aquells que no poden ocórrer simultàniament.

1 Digues quins d'aquests experiments són deterministes (D) i quins són aleatoris (A):

- | | |
|--|------------------------------------|
| a) Obtenir un 4 en llançar un dau. | d) Que l'aigua bulli als 100 oc. |
| b) Fer fred quan neva. | e) Trobar una amiga al cinema. |
| e) Arribar a un semàfor i que estigui en verd. | f) Obtenir el premi gros de Nadal. |

2 Digues quins d'aquests esdeveniments són elementals (E) i quins són compostos (C):

- | | |
|--|---|
| a) Sortir cara en llançar una moneda. | d) Cridar l'ascensor i que estigui a la planta baixa. |
| b) Dir el joc preferit. | e) Arribar a un semàfor en vermell i portar corbata. |
| e) Extreure d'una baralla dues sotes seguides. | f) Treure una fitxa determinada en el dòmino. |

3 Digues quins d'aquests esdeveniments són segurs (S) i quins són impossibles (I):

- a) Sumar 9 punts en extreure una fitxa doble en el dòmino.
- b) Extreure una carta de cors, rombes, piques o trèvols d'una baralla de pòquer.
- e) Sumar 20 punts en llançar tres daus de parxís.
- d) Haver nascut un 30 de febrer.
- e) Estar un cotxe en marxa o aturat.

4 Escribeu l'esdeveniment contrari de cadascun dels següents:

- | | |
|--|--|
| a) Preferir un mes de l'any que tingui 30 dies. | d) Obtenir una figura d'una baralla espanyola. |
| b) Triar el color blau o vermell en jugar al parxís. | e) Sortir cara en llançar una moneda. |
| c) Extreure una fitxa doble del dòmino. | |

Operacions amb esdeveniments

Unió d'esdeveniments	Intersecció d'esdeveniments	Diferència d'esdeveniments	Complementari d'un esdeveniment
 Esdeveniment $A \cup B$	 Esdeveniment $A \cap B$	 $A - B = A \cap \bar{B}$	 $\bar{A} = \Omega - A$
Formada per tots els resultats presents en A o en B .	Formada per tots els resultats presents en A i en B , simultàniament.	Formada pels resultats presents en A però no en B .	Formada per tots els resultats de l'experiment no presents en A .

- **Freqüència absoluta (f_a)** d'un esdeveniment: Nombre de vegades que ocorre quan es fa un experiment aleatori.
- **Freqüència relativa (f_r)** d'un esdeveniment: Quocient entre la freqüència absoluta d'un esdeveniment i el nombre de realitzacions.

- 1** S1, S2, S3, S4, S5 i S6 són els esdeveniments corresponents a obtenir 1, 2, 3, 4, 5 o 6, respectivament, en llançar un dau de parxís. Calcula:
- a) $\{S5, S6\} \cup \{S2, S4, S6\} =$ c) $\{S1, S3, S5\} \cap \{S3, S4, S5, S6\} =$
b) $\{S4, S5, S6\} \cup \{S1, S3, S5\} =$ d) $\{S4, S6\} \cup [\{S2, S3, S4\} \cap \{S2, S4\}] =$
- 2** En l'espai mostral $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ d'un experiment aleatori s'estableixen els esdeveniments $A = \{2, 3, 4, 5\}$ i $B = \{4, 5, 7\}$. Calcula les operacions següents:
- a) $A \cup B =$ e) $A \cup \bar{A} =$
b) $A \cap B =$ f) $B \cap \bar{B} =$
c) $\bar{A} =$ g) $\Omega \cap B =$
d) $A - B =$ h) $\Omega \cup A =$
- 3** Es llança una xinxeta i s'observa la posició en què es queda aturada; amb la punta cap amunt o inclinada. Contesta:
- a) Quina és la probabilitat que, després de llançar-la, la xinxeta quedi amb la punta cap avall?
b) Es fan 80 llançaments i s'observa que en 42 ocasions la xinxeta queda cap avall.
1. Calcula la freqüència relativa que li correspongui.
 2. Compara aquesta freqüència amb la probabilitat teòrica.
- c) Completa la taula de llançaments i calcula les freqüències relatives que corresponguin. Com evolucionen aquestes?

Llançaments	100	150	240	420	660	1 200
f_a	49	77	118	209	333	599
f_r						

La probabilitat: càlcul i propietats

- La **probabilitat** P d'un esdeveniment és la quantificació del seu caràcter aleatori i mesura el grau de possibilitat que ocorri; el seu valor oscil·la entre 0 i 1.
- Regla de Laplace:** S'utilitza per calcular la probabilitat en cas d'esdeveniments equiprobables (que tinguin la mateixa probabilitat que ocorrin): $P(A) = \frac{\text{Nre. de resultats favorables d'A}}{\text{Nre. de resultats possibles}}$

Propietats de la probabilitat			
Per a un esdeveniment A: $0 \leq P(A) \leq 1$	Per a tot esdeveniment segur (Ω): $P(\Omega) = 1$	Per a tot esdeveniment impossible ($\emptyset$): $P(\emptyset) = 0$	Per a $\bar{A}$, esdeveniment contrari d'A $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Para A i B, esdeveniments incompatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$	Per a A i B, esdeveniments compatibles: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$		Si l'espai mostral (Ω) és finit i hi ha un esdeveniment $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$: $P(S) = P(x_1) + P(x_2) + \dots + P(x_n)$

- En una caixa hi ha 20 boles de les quals 8 són blaves, 6 són vermelles, 4 són grogues i 2 són verdes. Calcula la probabilitat que en triar-ne una a l'atzar sigui ...:
 - ... blava.
 - ... vermella.
 - ... groga.
 - ... verda.
 - ... blava, vermella, groga o verda.
 - ... blanca.
 - ... no sigui blava.
 - ... vermella, verda o blava.
- Un dau s'ha llançat 400 vegades i les freqüències relatives dels llançaments que se n'ha fet són: $f(1) = 0,16$; $f(2) = 0,15$; $f(3) = 0,17$; $f(4) = 0,16$; $f(5) = 0,18$; $f(6) = 0,18$. Calcula les probabilitats següents:
 - Obtenir un nombre primer.
 - Obtenir un nombre imparell.
 - Obtenir un nombre parell.
 - Obtenir un nombre superior a 4.
 - Obtenir un nombre inferior a 3.
 - Obtenir un nombre parell o múltiple de 5.
 - Obtenir un nombre imparell o un divisor de 4.
 - Obtenir un nombre parell o un divisor de 6.
- Observa aquesta taula sobre les edats d'uns alumnes d'ESO:

	14 anys	15 anys	16 anys	17 anys
Noies	5	8	12	5
Nois	11	10	--	9
Total	16	18	12	14

- Calcula la probabilitat de triar a l'atzar un alumne de més de 15 anys o que sigui una noia.
 - Calcula la probabilitat de triar a l'atzar un alumne que sigui un noi o que sigui una noia de 16 anys.
- Es tria a l'atzar un nombre de l'1 al 100; calcula:
 - La probabilitat que sigui múltiple de 5.
 - La probabilitat que sigui múltiple de 7 o de 8.
 - La probabilitat que sigui múltiple de 6 o divisor de 24.

Probabilitat en experiments compostos

- En **experiments compostos**, els esdeveniments A i B són **independents** si el fet que es verifiqui l'esdeveniment A **no influeix** en la verificació de l'esdeveniment B ; en cas contrari són **dependents**.
- Probabilitat d'esdeveniments independents: $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$.
- Probabilitat condicionada $P(B/A)$ per a esdeveniments dependents (probabilitat de B condicionada a A):

$$P(B / A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

- 1 Calcula la probabilitat d'extreure consecutivament dues copes d'una baralla espanyola segons les condicions següents:
 - a) Tornant la primera carta a la baralla.
 - b) Sense tornar la primera carta a la baralla.
- 2 En un estoig hi ha 10 llapis dels quals 3 són vermells, 5 són blaus i 2 són negres. Calcula:
 - a) La probabilitat d'extreure consecutivament dos llapis vermells, amb retorn.
 - b) La probabilitat d'extreure consecutivament dos llapis vermells, sense retorn.
 - c) La probabilitat d'extreure consecutivament un llapis blau i un de negre, amb retorn.
 - d) La probabilitat d'extreure consecutivament un llapis blau i un de negre, sense retorn.
 - e) La probabilitat d'extreure consecutivament tres llapis vermells, amb retorn.
 - f) La probabilitat d'extreure consecutivament quatre llapis blaus, sense retorn.
- 3 En una caixa hi ha 24 bombons dels quals 7 són de trufa, 9 de licor i 8 de praliné. Calcula la probabilitat dels esdeveniments següents:
 - a) Triar tres bombons a l'atzar i que tots siguin de licor.
 - b) Triar tres bombons a l'atzar i que dos siguin de trufa i un de praliné.
 - c) Triar tres bombons a l'atzar i que tots siguin diferents.
- 4 Un dau es llança consecutivament quatre vegades. Calcula la probabilitat dels esdeveniments següents:
 - a) Obtenir un 4 totes les vegades.
 - b) Obtenir un nombre imparell totes les vegades.
 - c) Obtenir un divisor de 6 totes les vegades.
 - d) Obtenir un 5 al menys 3 vegades.

Suma, resta i multiplicació de polinomis

- Per **sumar** o **restar dos polinomis** s'agrupen i es redueixen els termes semblants:

$$(3x^3 + 5x - 6) - (4x^2 - 7x + 2) = 3x^3 + 5x - 6 - 4x^2 + 7x - 2 = 3x^3 - 4x^2 + 12x - 8$$

- Per **multiplicar dos polinomis** es multipliquen successivament tots els termes del primer per cadascun dels termes del segon; finalment s'agrupen i es redueixen els termes que siguin semblants:

$$(x - 3) \cdot (2x^2 + x - 2) = x \cdot (2x^2 + x - 2) - 3 \cdot (2x^2 + x - 2) = 2x^3 + x^2 - 2x - 6x^2 - 3x + 6 = 2x^3 - 5x^2 - 5x + 6$$

- **Quadrat d'una suma o una diferència:** $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$
- **Suma per diferència:** $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

1 Siguin els polinomis $A(x) = 3x - 5x^2 - 7$, $B(x) = x^4 - 6x^2 + 5x$ i $C(x) = -2x^2 + 7x - 4 - 3x^4$; calcula:

- | | |
|-------------------------|---------------------------|
| a) $A(x) + B(x) + C(x)$ | c) $B(x) - A(x)$ |
| b) $C(x) - A(x) - B(x)$ | d) $A(x) + [B(x) - C(x)]$ |

2 Calcula:

- a) Amb els polinomis $A(x)$, $B(x)$ i $C(x)$ de l'activitat anterior comprova si es compleix la propietat associativa de la suma.
- b) Amb els polinomis $A(x)$ i $B(x)$ de l'activitat anterior comprova si es compleix la propietat commutativa de la resta.

3 Siguin els polinomis $A(x) = x^3 - 4 + 3x^2$, $B(x) = -2x^3 + x^2 - 5$ i $C(x) = -3 + 2x - 6x^2 + x^3 - x^4$; calcula:

- | | | |
|----------------------|----------------------|-------------------------------|
| a) $A(x) \cdot B(x)$ | b) $B(x) \cdot C(x)$ | c) $C(x) \cdot [B(x) - A(x)]$ |
|----------------------|----------------------|-------------------------------|

4 Calcula:

- a) Amb els polinomis $A(x)$, $B(x)$ i $C(x)$ de l'activitat anterior comprova si es compleix la propietat associativa de la multiplicació.
- b) Amb els polinomis $A(x)$ i $B(x)$ de l'activitat anterior comprova si es compleix la propietat commutativa de la multiplicació.

5 Calcula:

- | | | |
|---------------------|---|--|
| a) $(5 - 2y)^2$ | c) $\left(2x - \frac{1}{3}\right)^2$ | e) $(6 - 3t^2) \cdot (6 + 3t^2)$ |
| b) $(2x^2 + 3xy)^2$ | d) $\left(\frac{x^3}{2} + \frac{x}{4}\right)^2$ | f) $\left(3x - \frac{1}{x^2}\right) \cdot \left(3x + \frac{1}{x^2}\right)$ |

Divisió de polinomis

- Per **dividir un polinomi entre un monomi**, el dividend ha d'estar **ordenat**. A continuació es divideix cada terme del polinomi entre el monomi del divisor; si el residu és 0, la divisió és **exacta**.

$$8x^5 + 6x^3 - 2x^2 - 6 : (-2x^2) \rightarrow 8x^5 : (-2x^2) + 6x^3 : (-2x^2) - 2x^2 : (-2x^2) = -4x^3 - 3x + 1; \text{ residu: } -6$$

- Per **dividir dos polinomis** es tindran en compte aquests passos:
 - El grau del polinomi del dividend ha de ser **més gran o igual** que el del divisor.
 - Els polinomis que s'han de dividir han d'estar **ordenats de manera decreixent** i s'han de completar amb zeros els termes que hi manquin.
 - Dividir el **primer mono mi del dividend entre el primer del divisor**; el quocient obtingut forma part del quocient final mentre que el residu s'afegeix al terme següent del divisor.
 - Repetir aquest procés fins que el grau del residu sigui **inferior al del divisor**.
- Regla de Ruffini**: S'utilitza per dividir un polinomi de **grau n** entre un binomi **$(x-a)$** on el quocient és un altre polinomi de grau **$(n-1)$** . El primer coeficient del quocient coincideix amb el primer del dividend mentre que el **darrer** és el **residu de la divisió**:

$$\begin{array}{r} 2x^3 - 4x^2 - 5x + 4 : (x - 3) \rightarrow \begin{array}{rrrr} 2 & -4 & -5 & +4 \\ 3) & & +6 & +6 & +3 \\ \hline & 2 & +2 & +1 & +7 \end{array} \rightarrow \rightarrow \rightarrow \text{Quocient } Q(x) : 2x^2 + 2x + 1 \dots \text{Residu } R(x) : 7 \end{array}$$

1 Calcula:

a) $(4x^4y - 6x^3y^2 - 8x^2y^3 + 2xy^4) : (2xy)$

b) $(5abcd - 10abd + 15adc) : (-5ad)$

2 Calcula:

a) $(x^5 - 7x^4 + x^3 - 8) : (x^3 - 3x + 1)$

e) $(-6x^4 - 3x^3 + 2x) : (3x^2 + 2) =$

b) $(4x^5 + 20x^4 - 18x^3 - 28x^2 + 28x - 6) : (x^2 + 5x - 3)$

d) $(-45x^4 - 120x^3 - 80x) : (-3x^2 - 4)$

3 Aplica la prova de la divisió de l'apartat a) de l'exercici anterior.

4 Aplica la *regla de Ruffini* en les divisions següents:

a) $(5x^4 + 6x^2 - 11x + 13) : (x - 2)$

e) $(-6x^5 + 3x^4 - 2x) : (x + 1)$

b) $(3x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 2x + 13) : (x - 4)$

5 Calcula el valor de m perquè el residu de la divisió $(mx^3 - 3x^2 + 5x + 9m) : (x + 2)$ sigui 1.

Divisibilitat i factorització de polinomis

- Un polinomi $A(x)$ és múltiple de $B(x)$ si hi ha un altre polinomi $C(x)$ tal que: $A(x) = B(x) \cdot C(x)$. Per tant, els polinomis $B(x)$ i $C(x)$ són **divisors** del polinomi $A(x)$.
- **Teorema del residu:** El residu de la divisió del polinomi $P(x)$ entre $(x - a)$ equival al valor numèric del polinomi $P(a)$. En aquest cas, si el **residu** de la divisió és 0, el valor a és una **arrel** del polinomi $P(x)$.
- **Factoritzar** un polinomi de **grau** n consisteix a convertir-lo en **producte d'altres polinomis** els graus dels quals siguin **inferiors a n** . Si això no és possible, el polinomi és irreductible.
- Si tenim dos o més polinomis, es pot obtenir un altre polinomi que sigui el **M.C.D. (màxim comú divisor)** o el **m.c.m. (mínim comú múltiple) corresponent**. Per aconseguir-ho es factoritzen els dos polinomis i es procedeix igual que amb els nombres enters.

- 1 Comprova si el polinomi $A(x) = x^5 - 2x^4 + x^2 - 3$ és múltiple del polinomi $B(x) = x^3 - 2x^2 + 3$.
- 2 Comprova si el polinomi $A(x) = x^2 + 2x - 1$ és divisor del polinomi $B(x) = 2x^4 + 4x^3 + x^2 + 6x - 3$.
- 3 Calcula el residu de les divisions següents sense necessitat d'efectuar-les:
a) $(x^4 + 2x^3 - 5x^2 + 6) : (x - 1)$ c) $(-2x^3 + 8x - 4) : (x + 2)$
b) $(x^5 - x^3 + x - 1) : (x + 1)$ d) $(-2x^4 - x^2 + 3x - 5) : (x - 3)$
- 4 Calcula el valor de m perquè l'oposat del terme independent del divisor sigui una arrel del polinomi:
a) $(x^3 - 4x^2 + mx + 3) : (x + 1)$ b) $(mx^4 - 2x^3 + mx - 2) : (x - 2)$
- 5 Factoritza els polinomis següents:
a) $x^2 - 9x + 18$ c) $x^6 - 1$ e) $25 - 9x^2$
b) $x^3 + x^2 - 4x - 4$ d) $x^4 + x^3 - x^2 + x - 2$ f) $9x^3 - 4x$
- 6 Escriu els polinomis que tinguin les arrels següents:
a) 2, -3, -2 b) 1, -2, 3, -4 c) 0, 2, -3
- 7 Calcula el M.C.D. i el m.c.m. dels polinomis següents:
a) $(x^2 - 9)$ y $(x^2 - 6x + 9)$ b) $(x^3 - 7x^2 + 12x)$ y $(x^4 - 3x^3 - 4x^2)$