

Expressions algèbriques

- Les **expressions algèbriques** descriuen, en llenguatge matemàtic, situacions en les quals hi ha dades desconegudes. El seu **valor numèric** s'obté calculant les operacions indicades després d'haver substituït cada lletra per un valor determinat.
- Un **monomi** és un terme d'una expressió numèrica (**ax^n**), en què a és el *coeficient*, x és la *variable* o *inde-terminada*, i n és el *grau* del monomi.
- Per a sumar o restar monomis, aquests han de ser **semblants**. Els coeficients se sumen o es resten, i es conserva la mateixa variable i grau: **$ax^n \pm bx^n = (a \pm b)x^n$** .
- Per a multiplicar o dividir monomis només cal que tinguin la **mateixa variable**. Els coeficients i les variables es multipliquen o es divideixen entre si seguint les normes de les potències:

$$ax^m \cdot bx^n = (a \cdot b)x^{m+n} \qquad ax^m : bx^n = (a : b)x^{m-n}$$

1. Escribe aquestes expressions en llenguatge algèbric:

- Sumar dues quantitats diferents.
- Restar una quantitat al doble d'una altra.
- La suma de tres nombres consecutius.
- Multiplicar un nombre pel quàdruple d'un altre disminuït en tres unitats.
- Trobar el quadrat d'un nombre més la tercera part d'un altre.
- Calcular la diferència de les arrels quadrades de dos nombres diferents.

2. Escribe un enunciat per a cada una d'aquestes expressions algèbriques:

- | | | |
|----------------|------------------------|------------------------|
| a) $xy + 2$ | c) $x^2 - \frac{x}{2}$ | e) $x^2 + \frac{x}{3}$ |
| b) $(x + 2)^2$ | d) $\sqrt{x - y}$ | f) $x(x + 1)(x + 2)$ |

3. Calcula el valor numèric d'aquestes expressions algèbriques:

- | | |
|--|---|
| a) $x^2 - 2xy + y^2$, per a $x = 4$ i $y = 2$ | d) $t^3 - 2t^2 + 4t + 5$, per a $t = -2$ |
| b) $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, per a $x = 5$ i $y = -1$ | e) $\sqrt{x} + 2xy$, per a $x = 9$ i $y = 4$ |
| c) $\left(\frac{m}{n}\right)^2 - m \cdot n + 2$, per a $m = -2$ i $n = 3$ | f) $z^4 - 3z^2 + 2z^3 - 5z + 1$, per a $z = 1$ |

4. Calcula aquestes expressions:

- | | | |
|----------------------|----------------------------|---------------------------|
| a) $2x + 3x - 5x$ | c) $4x \cdot 5xy \cdot 6y$ | e) $24xy^3 : 6y$ |
| b) $4xy - 2xy + 6xy$ | d) $2x \cdot (x^2 - 5)$ | f) $-8x^4yz^2 : (-2x^3z)$ |

5. L'aresta d'un cub mesura t centímetres. Expressa mitjançant monomis les expressions següents:

- El volum.
- L'àrea total.
- La suma de les longituds de totes les arestes.

Polinomis

- Un **polinomi** és el resultat de la suma de diversos monomis, en general, amb la mateixa variable: $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, en què $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ són els **coeficients**, n és el **grau** del polinomi i a_0 (monomi de grau zero), és el **terme independent**.
- Les **arrels** d'un polinomi són aquells valors de la variable per als quals el valor numèric del polinomi és 0.
- Un polinomi és **complet** si té tots els graus inferiors al grau del polinomi donat.

1. Completa la taula següent:

Expressió	Variables	Grau	Coeficients	Terme independent
$4x^2 + 5x - 7$				
$3x - 7$				
$y^3 - 4y + 6$				
$x^3 - 5x^2 + 8x - 1$				
$3x^2y - 4y$				

2. Escribe los polinomios correspondientes siguiendo las instrucciones dadas:

Variable	Grau	Coeficients (ordenats de més a menys grau)	Expressió resultant
x	3	-1, -1, 4, 2	
x	2	2, 0, 1	
y	4	2, 3, 0, 0, -7	
z	1	$\frac{-2}{3}, 5$	
z	5	1, 0, -3, 0, 2, 0	

3. Redueix els termes semblants d'aquests polinomis i expressa'n el resultat en ordre decreixent:

a) $x^3 - 4x + 5x - 6x^2 + 5x^3 - 7 + x$

c) $8 + 2x - 4x^3 + 5x^2 - x + 4x^3$

b) $t + 2t^2 - 6 + 2t + t^3 - 5t - 3t^3 + 6$

d) $y^4 + 4y + 4y^2 - y^3 - 2y^3 + 6y + 7 - y^4$

4. Completa aquesta taula a partir del resultat dels polinomis de l'exercici anterior:

Polinomi	És complet?	Ordena'l de manera decreixent	Valor numèric per a (-2)
a)			
b)			
c)			
d)			

Operacions amb polinomis

- Per a **sumar** o **restar** dos polinomis, es redueixen i s'agrupen els termes semblants:

$$(2x^3 + 4x - 5) - (3x^2 - 5x + 6) = 2x^3 + 4x - 5 - 3x^2 + 5x - 6 = 2x^3 - 3x^2 + 9x - 11$$

- Per a **multiplicar** dos polinomis, es multipliquen successivament tots els termes del primer per cada un dels termes del segon; finalment s'agrupen i es redueixen els termes que siguin semblants:

$$(x - 2) \cdot (2x^2 + x - 4) = x \cdot (2x^2 + x - 4) - 2 \cdot (2x^2 + x - 4) = 2x^3 + x^2 - 4x - 4x^2 - 2x + 8 = 2x^3 - 3x^2 - 6x + 8$$

- **Quadrat d'una suma o una diferència:** $(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2$

- **Suma per diferència:** $(x + y) \cdot (x - y) = x^2 - y^2$

1. Opera i redueix els termes semblants:

a) $3x(2x^2 + 2x - 1) - x^2(2x - 4)$

b) $(x^2 - 1)(x^2 + 3x - 2)$

c) $2(x + 1)(x - 1)$

d) $-2[(x + 1)(x - 2) + x^2 - 2] + 2(x - 3)$

2. Resol les operacions a partir dels polinomis següents:

A(x) = x² + 2x - 3

B(x) = x³ - 4x² + 3

C(x) = -x³ + 3x² - 5x + 1

a) A(x) + B(x)

d) A(x) - B(x) - C(x)

g) A(x) · B(x)

b) B(x) - C(x)

e) A(x) + B(x) + C(x)

h) B(x) · C(x)

c) -A(x) + C(x)

f) C(x) - 2 · B(x)

i) A(x) · C(x) - [B(x)]²

3. Desenvolupa els productes notables següents:

a) $(3x + 5)^2$

d) $\left(\frac{2}{5} + \frac{x^3}{3}\right)^2$

b) $(7 - 3t^2)^2$

e) $(5x - 6y^3)(5x + 6y^3)$

c) $\left(\frac{x}{4} - 2\right)^2$

f) $\left(\frac{3x}{7} - \frac{x^2}{4}\right)\left(\frac{3x}{7} + \frac{x^2}{4}\right)$

4. Esbrina de quins productes notables procedeixen aquestes expressions:

a) $x^4 - 2x^3 + x^2$

b) $4x^6 - 9x^8$

c) $x^4 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{16}$

d) $\frac{4x^2}{49} - \frac{25y^4}{36}$

Equacions de primer grau

- Una equació és de **primer grau** si els monomis que la integren són, com a màxim, de grau 1, que poden contenir **una o dues incògnites** o variables.
- Les **solucions** d'una equació són els valors que, substituïts en les incògnites, converteixen l'equació en una identitat numèrica. Resoldre una equació és el procés que se segueix per a obtenir-ne les solucions.
- Per a **resoldre** una equació de primer grau i una incògnita, **s'han de suprimir**, si n'hi ha, els denominadors i els parèntesis, **traslladar i reduir** els termes semblant, **aïllar** la incògnita i **comprovar** el resultat final.
- Si l'equació té **dues incògnites**, se n'**aïlla** una i s'**assignen** valors arbitraris a l'altra per a trobar els valors que corresponen a la primera de les incògnites. En aquest cas, l'equació té **infinites solucions** i la seva representació gràfica és una **recta**.

1. Resol les equacions següents:

- a) $5 - 6x + 9 = -3 - 10x - 7$
- b) $7(7x + 2) = 94 + 9x$
- c) $-2(3x + 2) + 2x + 6(12 - 5x) = 0$
- d) $4x - 11 - 3x + 4 = 6 - 5x - 1 + 3x$
- e) $-1 + 5x = 6x + 3(4 - x)$
- f) $4 - (15 - 2x) = 3[2x - 9 - 2(9 - x)]$

2. Resol les equacions següents:

- a) $\frac{3x}{5} - 2 = x - 4$
- b) $\frac{x}{3} + \frac{x}{2} = -15$
- c) $\frac{x-6}{5} = \frac{x-5}{4} + \frac{1-x}{6}$
- d) $\frac{3x}{5} - 2 = x - 4$
- e) $\frac{7x-21}{7x-26} = \frac{x-1}{x-2}$

3. Donada l'equació $2x + 3y = 6$, calcula:

- a) Els valors de y per a $x = 0, 1, -1, 2, -2, 4, -4$
- b) Quin valor de x correspondria a $y = 0$?
- c) Representa gràficament les solucions trobades en l'apartat a).

Sistemes d'equacions de primer grau: classificació i tipus de resolucions

- Un **sistema d'equacions** de primer grau i dues incògnites es compon de dues equacions les variables de les quals representen els mateixos valors. La **solució** d'un sistema d'equacions és un parell ordenat de nombres que verifica simultàniament les dues equacions.
- Els sistemes d'equacions es classifiquen segons les solucions: **compatible determinat** (solució única), **compatible indeterminat** (infinites solucions) i **incompatible** (cap solució).
- Un sistema d'equacions es pot resoldre **gràficament**, **algèbricament** o mitjançant **recursos digitals**.

1. Escribe las ecuaciones que componen el correspondiente sistema a partir de estos enunciados:
 - a) Busca dos números la suma de los cuales sea 70 y la diferencia de los cuales sea 6.
 - b) En una fiesta hay 37 personas y se sabe que hay tres hombres más que mujeres.
 - c) En una granja hay gallinas y conejos; en total hay 20 cabezas y 60 patas.
 - d) Un examen consta de 100 preguntas. Cada acierto vale un punto y por cada tres errores se descuentan dos puntos; también se sabe que la puntuación final ha sido de 60 puntos.

2. Escribe un enunciado que corresponga a este sistema y di si el par (1, 4) es solución de la ecuación:

$$\begin{cases} x + 2y = 6 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

3. Encuentra gráficamente la solución de este sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 4 \\ 2x + 3y = 12 \end{cases}$$

4. Relaciona con flechas:

1. Sistema incompatible

a. Rectas secantes

2. Sistema compatible indeterminado

b. Rectas paralelas

3. Sistema compatible determinado

c. Rectas coincidentes

5. Resuelve gráficamente estos sistemas y di si son compatibles determinados, compatibles indeterminados o incompatibles:

a)
$$\begin{cases} 3x - y = 6 \\ -6x + 2y = -12 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} x + 3y = 7 \\ 7x - y = 5 \end{cases}$$

c)
$$\begin{cases} 5 - 2y = x \\ 6 + 4y = -2x \end{cases}$$

Sistemes d'equacions de primer grau: resolució algebàrica

Un sistema d'equacions es pot resoldre mitjançant **tres mètodes algebrics**:

- **Substitució**: s'aïlla una de les incògnites en una de les equacions i se **substitueix** en l'altra.
- **Igualació**: s'aïlla la mateixa incògnita en les dues equacions i **s'igualen** els valors respectius.
- **Reducció**: es multipliquen per valors adequats una o les dues equacions per a eliminar una de les incògnites i **reduir** el sistema a una única equació.

1. Resol els sistemes següents mitjançant el mètode de substitució:

$$\text{a) } \begin{cases} x + y = 30 \\ x - y = 14 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 5x + 6y = 7 \\ 10x + 8y = 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 6y - 5x = 4 \\ 7x - 2y = 4 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 4x + 5 = 3y - 2 \\ 2x + y = 39 \end{cases}$$

2. Resol els sistemes següents mitjançant el mètode d'igualació:

$$\text{a) } \begin{cases} 5x + 2y = 29 \\ 2x - 3y = 4 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x + 8y = 26 \\ 4x + 5y = 23 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x - y = 5 \\ 2x - 3y + 11 = 0 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} \frac{7y}{8} + \frac{x}{8} = 6 \\ \frac{5x}{3} + \frac{7y}{6} = 17 \end{cases}$$

3. Resol els sistemes següents mitjançant el mètode de reducció:

$$\text{a) } \begin{cases} 3x + 2y = 12 \\ -x + 4y = 10 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 6x + y - 20 = 0 \\ 5x = 11 + 2y \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 5x + 2y = 19 \\ 2x + 4y = 14 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} 11x - 7y = -3 \\ 6x + 5y = 16 \end{cases}$$

4. Resol els sistemes següents mitjançant el mètode que consideris més convenient:

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 4x - 5y = 3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 12x + 11y = 6 \\ 3y - 2(x - 8) = 44 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 2x + 5y = 69 \\ y - 4(x - 7) = 67 - 3x \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x = 9 - \frac{y}{2} \\ y = 11 + \frac{x}{3} \end{cases}$$

Resolució de problemes amb equacions i sistemes d'equacions

Per a **resoldre problemes** en els quals es planteja una equació de primer grau o un sistema de dues equacions convé seguir aquestes pautes:

1. **Llegir** atentament l'enunciat i identificar clarament les incògnites.
2. **Escriure** de forma algebraica les condicions numèriques de l'enunciat.
3. **Resoldre** l'equació o el sistema d'equacions que s'hagi obtingut.
4. **Interpretar** i **comprovar** el resultat final.

1. Tres ecologistes treballen en la repoblació forestal d'un bosc la cinquena part del qual és de roures i la tercera part de fajos. Si encara els en queden 560 ha per repoblar, quina superfície té el bosc?
2. L'edat d'una noia és cinc vegades la d'un noi, però, en 6 anys, l'edat de la noia només serà el triple de la del noi. Quines són les seves edats actuals?
3. En un club esportiu, els que juguen a frontennis són el doble que els que practiquen natació, mentre que els practicants d'atletisme equivalen al doble de la suma del conjunt dels que juguen a frontennis i fan natació, més unes altres 40 persones. Si el total de socis és de 1174, quantes persones practiquen cada esport?
4. Vuit entrades de cinema i cinc racions de crispetes costen 79 €, mentre que sis entrades i nou racions de crispetes costen 75 €. Quin és el preu d'una entrada i el d'una ració de crispetes?
5. Dues persones han reunit 360 DVD de pel·lícules. Si la primera regala 8 DVD a la segona, aquesta tindrà el doble de DVD que la primera. Quants DVD té cada una?
6. Quines quantitats de cafè de 10 €/kg i 12 €/kg cal barrejar per a obtenir 100 kg de cafè a 11,50 €/kg.
7. Un cotxe parteix d'un punt a 90 km/h; al cap d'una hora, un altre cotxe comença a perseguir-lo a 120 km/h; on i quan l'agafarà?

Equacions de segon grau

- Una equació és **de segon grau** si el grau màxim dels monomis que la integren és 2. La seva expressió general és: **$ax^2 + bx + c = 0$** .
- Les **solucions** o arrels d'una equació de segon grau són els valors que, substituïts a la incògnita, converteixen l'equació en una identitat numèrica. Una equació de segon grau pot tenir **dues, una o cap** solució.
- Una equació de segon grau és **completa** si tots els seus coeficients són diferents de 0. L'equació és **incompleta** si els coeficients b , c , o tots dos, són 0.

1. Escriu la forma general de les equacions de segon grau següents:

a) $2(x^2 + 4) + 6 = x(x + 1)$

c) $2x^2 - \frac{x-2}{3} = \frac{x}{2}$

b) $\frac{x-4}{x+1} = \frac{2}{x}$

d) $(x+2)^2 + 2(9-3x) = 17$

2. Verifica si els valors donats són solucions de cada equació:

a) $3x^2 + 4x - 20 = 0$; per a $x = 2$

d) $5 + 2x = -x^2 + 4$; per a $x = 0$

b) $9 - x^2 = -6 + 3x$; per a $x = -3$

e) $\frac{3+x^2}{2} = -x + 3$; per a $x = 1$

c) $18 + 2x = (x-3)^2$; per a $x = -1$

f) $5 + 4x = x^2 - 2$; per a $x = -2$

3. Esbrina quina equació té per solucions -3 i 2:

a) $x^2 - 3x + 2 = 0$

d) $-x^2 + x + 6 = 0$

b) $4 = -8 - 6y - 2y^2$

e) $x^2 + x - 6 = 0$

c) $4x - 2x^2 = x^2 + 13x$

f) $(x+3)^2 - 9 = 16$

4. Completa aquest quadre:

Equació inicial	Equació transformada	Coeficients			Equació completa?
		a	b	c	
$x(x-2) = -2x$					
$x^2 = 5x$					
$3(x-1)(x+4) = -8$					
$13x - 4(2-x^2) = 4$					

Resolució algebàrica d'equacions de segon grau

Equacions incompletes			Equacions completes: mètode general	
$ax^2 + bx = 0$	$ax^2 + c = 0$	$ax^2 = 0$	$ax^2 + bx + c = 0$	
$x_1 = 0$ $x_2 = \frac{-b}{a}$	$x = \pm \sqrt{\frac{-c}{a}}$	$x_1 = x_2 = 0$	$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	• Si $b^2 - 4ac > 0$: dues solucions • Si $b^2 - 4ac = 0$: una solució • Si $b^2 - 4ac < 0$: sense solució

Equacions biquadrades: $ax^4 + bx^2 + c = 0$. Per a resoldre-les cal realitzar un canvi de variable:

$x^4 = t^2$; $x^2 = t \rightarrow at^2 + bt + c = 0 \rightarrow$ Solucions: $t_1; t_2 \rightarrow x_1 = \sqrt{t_1}; x_2 = -\sqrt{t_1}; x_3 = \sqrt{t_2}; x_4 = -\sqrt{t_2}$

1. Resol les equacions següents:

a) $2x^2 - 8 = 0$

d) $3x^2 + 27x = 0$

b) $\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} = 0$

e) $9x(1-x) = 0$

c) $5x^2 = 0$

f) $5x^2 = 125$

2. Resol les equacions següents:

a) $x^2 - 8x + 12 = 0$

e) $x(x-4) = 21$

b) $x^2 + 14x - 32 = 0$

f) $x^2 - \frac{8x}{3} = 1$

c) $(x+1)^2 = 3+x$

g) $x(x-18) = 2(x-18)$

d) $2x^2 - \frac{3}{10} = \frac{11x}{10}$

h) $4(x-1) = \frac{15}{4} + \frac{x-1}{2x}$

3. Resol les equacions següents:

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$

b) $2x^4 - 8x^2 = 0$

c) $x^4 + x^2 - 2 = 0$

d) $2x^4 - 26x^2 + 72 = 0$

4. Assenyala quantes solucions tenen aquestes equacions sense necessitat de resoldre-les:

a) $x^2 + x - 12 = 0$

b) $6x^2 - 36x = 0$

c) $x^2 + 2x + 6 = 0$

d) $4x^2 - 12x + 9 = 0$

Resolució de problemes amb equacions de segon grau

Per a **resoldre problemes** en els quals es plantegin equacions de segon grau convé seguir aquestes pautes:

1. **Llegir** atentament l'enunciat i identificar clarament les incògnites.
2. **Escriure** de forma algebàrica les condicions numèriques de l'enunciat.
3. **Resoldre** l'equació que s'hagi obtingut.
4. **Interpretar** i **comprovar** el resultat final.

1. Busca un nombre sabent que la suma amb el seu invers és $\frac{29}{10}$.
2. Busca dos nombres consecutius de manera que la diferència dels seus quadrats sigui 19.
3. Si al quadrat de l'edat d'una persona li restem la seva edat actual, tornem a obtenir aquesta edat. De quin nombre es tracta?
4. Troba els catets d'un triangle rectangle sabent que un d'ells mesura 7 cm més que l'altre, però 1 cm menys que la hipotenusa.
5. Calcula les dimensions d'un rectangle sabent que la base mesura 3 cm més que l'altura, però, si se n'allarguen les dimensions 3 cm, l'àrea es duplica.
6. Calcula la longitud de la base d'un triangle sabent que la seva àrea és de 16 cm^2 i que la base mesura 4 cm més que l'altura.
7. Calcula la base més gran d'un trapezi de 130 m^2 d'àrea sabent que l'altra base i l'altura mesuren, respectivament, 2 cm i 4 cm menys que la base.
8. Busca dos nombres sabent que els seus quadrats sumen 25 i la diferència d'aquests és 7.