b) De la seqüència anterior deduïm que: $A^{60124} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

6

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

a) $X + BC = A^2$ $\longrightarrow$ $X = A^2 - BC = A \cdot A - BC$

$X = ?$

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -1 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$$

b) C^6? C^7?

$$C^2 = C \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$$

$$C^3 = C^2 \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C^4 = C^3 \cdot C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igual que C^2!

...

Es dedueix que: $C^1 = C^3 = C^5 = \ldots = C^{\text{senar}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$C^2 = C^4 = C^6 = \ldots = C^{\text{parell}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{I}$

Avaluació unitat "Matrius"

1 $A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix}$ $\quad A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2-6 & 3x+3y \\ -2x-2y & -6+y^2 \end{pmatrix}$

$A^2 = A$ Condició $\longrightarrow \begin{pmatrix} x^2-6 & 3x+3y \\ -2x-2y & -6+y^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 3 \\ -2 & y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x^2-6 = x & (1) \\ 3x+3y = 3 & (2) \\ -2x-2y = -2 & (3) \\ -6+y^2 = y & (4) \end{cases}$

De l'eq. (1): $x^2 - x - 6 = 0$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1+24}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2} = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$$

De l'eq. (4): $y^2 - y - 6 = 0 \longrightarrow y = \begin{cases} 3 \\ -2 \end{cases}$

De l'eq. (2): $x + y = 1$

$x=3,\ y=3 \longrightarrow 3+3=1$ ✗

$x=3,\ y=-2 \rightarrow 3-2=1$ ✓ $\longrightarrow$ Possibles solucions:

$x=-2,\ y=3 \rightarrow -2+3=1$ ✓

$x=-2,\ y=-2 \rightarrow -2-2=1$ ✗

$(x,y) = (3,-2)$

$(x,y) = (-2,3)$

---

2 $A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix}$

a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Condició a, b?

$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a+b & 1 \\ 0 & a-b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & (a+b)+(a-b) \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a+b)^2 & 2a \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} (a+b)^2 & 2a \\ 0 & (a-b)^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{cases} (a+b)^2 = 1 \\ 2a = 2 \\ 0 = 0 \ ✓ \\ (a-b)^2 = 1 \end{cases} \longrightarrow a = 1 \Rightarrow b = 0$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^5 = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^6 = \cdots = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

c) Per deducció de la sèrie de potències anteriors: $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

---

3 $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

a) x, y ?

$$\begin{cases} x - 2y = A \\ 2x - y = B \end{cases} \xrightarrow{\cdot 2} \begin{array}{r} 2x - 4y = 2A \\ - \quad 2x - y = B \\ \hline / \quad -3y = 2A - B \end{array}$$

Resolem el sistema per reducció.

$$y = \frac{2A - B}{-3} = -\frac{1}{3} \cdot (2A - B)$$

$$y = -\frac{1}{3} \cdot \left(\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -4 & -16 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \right) = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & -9 \\ -8 & -15 \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} \frac{-6}{-3} & \frac{-9}{-3} \\ \frac{-8}{-3} & \frac{-15}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ \frac{8}{3} & 5 \end{pmatrix}$$

De la 1a eq.: $x - 2y = A$

$$x = A + 2y = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ \frac{16}{3} & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ \frac{10}{3} & 2 \end{pmatrix}$$

b) $(A + 2\mathbb{I})^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)^2 = \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right)^2 =$

$$= \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 9 \\ 6 & 42 \end{pmatrix}$$

14

$$A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}$$

a) $A^2+2AB+B^2$

$$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&-2\\2&-1\end{pmatrix}$$

$$2AB=2\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0&8\\1&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&16\\2&6\end{pmatrix}$$

$$B^2=\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7&-3\\-2&10\end{pmatrix}$$

$$A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}3&-2\\2&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&16\\2&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}7&-3\\-2&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10&11\\2&15\end{pmatrix}$$

b) $$(A+B)^2=\left(\begin{pmatrix}2&-1\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&3\\2&-2\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}3&+2\\3&-2\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}3&+2\\3&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&+2\\3&-2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}15&+2\\3&10\end{pmatrix}$$

És pot comprovar en aquesta activitat que en el cas de les matrius en general no es cumpleix que $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$.

5

$$A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$$

a) $$A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^3=A^2\cdot A=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\-1&0&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=-\mathbb{I}$$

$$A^4=A^3\cdot A=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}=-A$$

$$A^5=A^4\cdot A=-A\cdot A=-A^2=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&-1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$$A^6=A^5\cdot A=-A^2\cdot A=-A^3=\mathbb{I}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$A^7=A^6\cdot A=\mathbb{I}\cdot A=A\qquad A^8=A^2=\dots$$

• • •