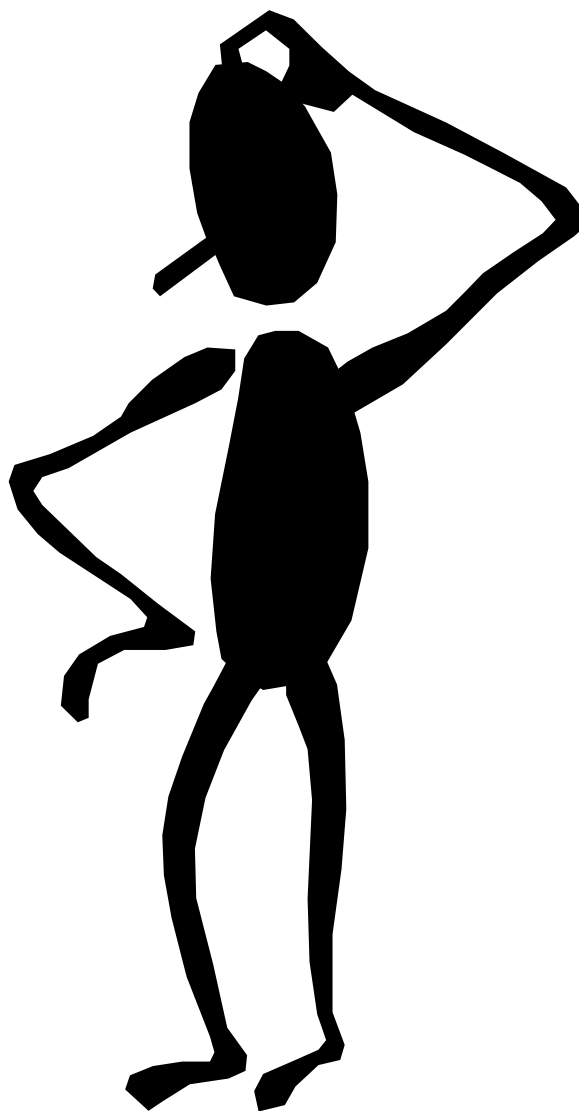


IES EL CASTELL



MATEMÀTIQUES
4t d'ESO

Si has aprovat la matèria i vols fer estudis postobligatoris, per tal de seguir amb èxit les Matemàtiques del 1r curs, és molt convenient tenir un bon domini del temari de Matemàtiques de l'ESO. És per això que des del Departament de Matemàtiques creiem molt recomanable que et preparis durant l'estiu, i et proposem que treballis aquesta col·lecció de problemes per tal de consolidar tot allò que has après durant l'ESO.

Si continues estudis de batxillerat al nostre centre es molt important que sàpigues que el dossier "Treball D'Estiu" no es lliurarà, obligatoriament, al professorat del curs vinent però durant les primeres setmanes d'octubre es farà un examen dels problemes d'aquesta col·lecció i això suposarà un 10% de la nota final de la Primera Avaluació.

El professorat del Departament de Matemàtiques espera que sabreu valorar la conveniència de treballar una mica durant l'estiu.

Molt bon estiu!

Llista 1**ÀLGEBRA: POLINOMIS I EQUACIONS**

1.- Aquestes expressions són equacions? Si ho són, indica el grau i el número d'incògnites.

a) $5x^2 - 7 \cdot (x-2) - 6$

b) $4a^2 - 5b + 7a = 3a + 5$

c) $7x^2 - 5x + 4 = 0$

d) $0 = 4a^2 - 5b^2 + 30c^5$

e) $(-5) + (-3) = +8$

f) $3x = 7$

g) $5 \cdot (x-2) = x+2$

h) $\frac{2x}{3} + 3 = \frac{8x+1}{5}$

i) $\left. \begin{array}{l} x+y=5 \\ -2x+y=-1 \end{array} \right\}$

2.- Per a l'equació: $\sqrt{2x} = x-4$

a) 3 és solució?

b) 8 és solució?

c) -1 és solució?

3.- Comprova que per l'equació: $3(x-15) + 5 = 3x - 40$

Tots els nombres són solució. Es tracta d'una IDENTITAT.

Si treballes la igualtat veuràs que dona $0 = 0$

4.- Aquesta equació: $5 + 2 \cdot (x-4) = 2x + 2$

No té solució. Es tracta d'una EQUACIÓ SENSE SOLUCIÓ.

Si ho treballes veuràs que et dona $0 = 5$

5.- Classifica les expressions següents en equacions amb solució, equacions sense solució o identitats

a) $3x^2 + 1 = 3 \cdot (x^2 + 1) - 2$

b) $7 - 3 \cdot (x-5) = -3x + 1$

c) $x^2 - \frac{2x^2+3}{2} = -\frac{3}{2}$

6.- Escriu de la manera més simple possible les següents expressions algebraïques:

(Recorda. donat que són expressions algebraïques no té sentit buscar solució, només es poden "endreçar";

NO ES POT TREURE DENOMINADOR)

a) $6 - [5x - 2 \cdot (x-3) - 8] =$

b) $\frac{x}{6} - \frac{2}{9} \cdot x - \frac{x}{3} =$

c) $\frac{5x-7}{2} - \frac{x-2}{6} =$

d) $\frac{2 \cdot (x-3)}{3} - \frac{1-3x}{5} + 2 =$

7.- Resol les següents equacions:

a) $3 \cdot (x-7) - x = 5 + 2 \cdot (x-1)$

b) $4 + 5 \cdot [2x - 3 \cdot (x-2)] = (9+8) \cdot 2$

c) $\frac{6-4x}{x-5} = 3$

d) $\frac{7}{3} - \frac{-8x+2}{6} + 2 = 0$

e) $2 + \frac{2-3x}{5} = x+1$

f) $\frac{x+1}{2} - \frac{x-2}{16} = \frac{x-1}{8}$

8.- Donat el sistema de 2 equacions de primer grau amb 2 incògnites:

$$\left. \begin{array}{l} x-3y=7 \\ 3x+2y=-1 \end{array} \right\}$$

Sense resoldre el sistema, respon justificadament,:

a) És solució $x = 10$, $y = 1$?

b) És solució $x = 1$, $y = -2$?

9.- Resol el següent sistema pel mètode de SUBSTITUCIÓ:

$$\left. \begin{array}{l} 3x-2y=2 \\ 2x+y=13 \end{array} \right\}$$

10.- Resol el següent sistema pel mètode d'IGUALACIÓ:

$$\left. \begin{array}{l} x+3y=1 \\ 2x+4y=6 \end{array} \right\}$$

11.- Resol els següents sistemes pel mètode de REDUCCIÓ:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \quad \left. \begin{array}{l} 2x - y = 1 \\ x + 3y = 11 \end{array} \right\} \\ \text{b)} \quad \left. \begin{array}{l} 10x - 3y = 1 \\ -2x + 2y = 4 \end{array} \right\} \end{array}$$

12.- Resol les següents equacions de 2n (i 3r grau). Fes els passos que creguis convenients. Si l'equació és incompleta no utilitzis el mètode del discriminant.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} x^2 - 2x - 35 = 0 & \text{b)} 5x^2 + x = 0 & \text{c)} \frac{3}{5}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{7}{10} = 0 \\ \text{d)} 7 \cdot (x^2 + 5x) = 35x + 14 & \text{e)} x^2 - 2x = x + \frac{x^2 - 9}{2} & \text{f)} x^3 + 5x^2 + 2x = 0 \end{array}$$

13.- Calcula a per tal que l'equació $a \cdot x^2 - 10x + 12 = 0$ tingui per solució $x = 2$.

14.- PROBLEMES DE PLANTEIG D'EQUACIONS (de 1r o 2n grau i sistemes)

1. Quatre nombres múltiples de 2 consecutius sumen 52. Quins són?
2. Quin nombre verifica que si li sumem 15 unitats, dóna el triple del seu anterior?
3. Un pare i un fill tenen 34 i 8 anys. Quants anys han de passar per tal que el pare tingui el triple d'anys que el fill?
4. Busquem dos nombres que verifiquen que si al gran li restem el doble del petit dóna 1, i si al doble del gran li restem el triple del petit dóna 5 unitats. Quins són?
5. A una botiga venen dònuts, en *packs* de 2 dònuts i *packs* de 6 dònuts. L'Enric s'ha emportat 10 *packs*, que donen un total de 40 dònuts. Quants *packs* de 2 dònuts, i quants *packs* de 6 dònuts s'ha emportat?
6. Dissabte vaig anar a Barcelona per a fer uns encàrrecs i vaig haver d'agafar varies vegades el metro i l'autobús. En total vaig fer 7 viatges, i em vaig gastar 5,67 euros. Sabent que un viatge de metro costa 0,78 Eur, i un viatge d'autobús 0,85 Eur, quants viatges vaig fer en metro i quants en autobús?
7. Un dels costats d'un rectangle mesura el doble que l'altre. La seva àrea és de 50 m². Determina la mida de l'altre costat.
8. El producte de 2 nombres naturals és 156. La seva suma és 25. Troba aquests nombres.

RECORDA:

Treure factor comú: transformar sumes en productes *Exemple*: $3x - 15 = 3 \cdot (x - 5)$
Propietat distributiva: transformar productes en sumes *Exemple*: $x \cdot (x - 2) = x^2 - 2x$
Quadrat d'una suma: quadrat del primer, mes quadrat del segon, mes el doble producte del primer pel segon: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Quadrat d'una diferència: quadrat del primer, mes quadrat del segon, menys el doble producte del primer pel segon: $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Suma per diferència: diferència de quadrats: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

15.- Transforma les sumes en productes, traient factor comú, quan es pugui:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} m^3 + nm^2 = & \text{b)} 7ab^3 - 5a^2b = & \text{c)} -13x + 39y = \\ \text{d)} 6y^2 - 18xy + 36y^3 = & \text{e)} 14a^2b - 3b^3 + 16 = & \end{array}$$

16.- Desenvolupa aplicant els productes notables, quan calgui:

$$\begin{array}{lll} \text{a)} (2x - 5)^2 = & \text{b)} (x^3 + 2)^2 = & \text{c)} (a - 7) \cdot (a + 7) = \\ \text{d)} (2x + 3y)^2 = & \text{e)} (5a - 3t) \cdot (3t + 5a) = & \text{f)} (5x - 7x)^2 = \end{array}$$

17.- Transforma les sumes en productes, expressant-les com a quadrats perfectes, o producte de suma per diferència, quan es pugui:

- a) $25x^2 - 10x + 1 =$ b) $25 + 70x + 49x^2 =$ c) $x^2 - 16 =$
d) $81x^2 - 9y^2 =$ e) $9y^2 - 15y + 25 =$ f) $9 + x^2 =$
g) $a^2 - 3 =$

18.- Busca el terme que falta per tal que siguin quadrat d'una suma o d'una resta, i escriu-lo:

- a) $x^2 + \underline{\hspace{2cm}} + 9 = \underline{\hspace{2cm}}$ b) $x^2 - 8x + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$
c) $9x^2 + 12x + \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ d) $4x^2 + \underline{\hspace{2cm}} + 25y^2 = \underline{\hspace{2cm}}$

Solucions:

1. a) no equació (expressió algebraica) b) eq. 2n grau, 2 incog. c) eq. 2n grau, 1 incog.
d) eq. 5è grau, 3 incog. e) no equació (càlcul fals)
f) g) h) eq. 1r grau, 1 incog. i) sistema de 2 equacions de 1r grau amb 2 incog.

2. a) c) NO, b) SI

5. a) c) IDENTITATS b) EQUACIÓ SENSE SOLUCIÓ

6. a) $-3x + 8$ b) $\frac{-7x}{18}$ c) $\frac{14x-19}{6}$ d) $\frac{19x-3}{15}$

7. a) No té solució b) $x=0$ c) $x=3$ d) $x=-3$ e) $x = \frac{7}{8}$ f) $x = \frac{-12}{5}$

8. a) NO b) SI 9. $x=4, y=5$ 10. $x=7, y=-2$

11. a) $x=2, y=3$ b) $x=1, y=3$

12. a) $x_1 = 7, x_2 = -5$ b) $x_1 = 0, x_2 = \frac{-1}{5}$ c) no té solució d) $x_1 = +\sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$
e) $x=3$ f) $x_1 = 0, x_2 = \frac{-5+\sqrt{17}}{2}, x_3 = \frac{-5-\sqrt{17}}{2}$

13. $a=2$

14. 1) 10, 12, 14, 16 4) 7 i 3 7) 5 i 10 m.
2) 9 5) 5 packs de cada
3) 5 anys 6) 3 bus, 4 metro 8) 12 i 13

- 15 a) $m^2(m+n)$ b) $ab(7b^2 - 5a)$ c) $13 \cdot (-x + 3y)$ d) $6y(y - 3x + 6y^2)$ e) no es pot transformar en producte

- 16 a) $4x^2 - 20x + 25$ b) $x^6 + 4x^3 + 4$ c) $a^2 - 49$ d) $4x^2 + 12xy + 9y^2$ e) $25a^2 - 9t^2$ f) $4x^2$ (EP! el parèntesi!)

- 17 a) $(5x - 1)^2$ b) $(5 + 7x)^2$ c) $(x + 4) \cdot (x - 4)$ d) $(9x + 3y) \cdot (9x - 3y)$ e) no es pot f) tampoc g) $(a + \sqrt{3}) \cdot (a - \sqrt{3})$

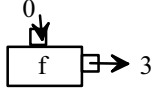
- 18 a) $(x + 3)^2$ (falta +6x) b) $(x - 4)^2$ (falta +16) c) $(3x + 2)^2$ (falta +4) d) $(2x + 5y)^2$ (falta 20xy)

Llista 2 **ALGUNES FUNCIONS ELEMENTALS**

1.- a) Troba l'expressió analítica de la funció afí que té pendent 3 i passa per (0,-2). Fes una taula de valors i representa-la gràficament.

b) Quina és la imatge de 8? I l'antiimatge de 8?

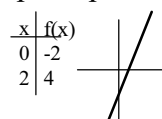
c) Decideix si les afirmacions són Certes o Falses:

- el punt $(2,5)$ és de la gràfica de la funció C F
- $3 \xrightarrow{f} 7$ C F
- l'antiimatge de -5 és -1 C F
-  C F

d) Escriu l'equació d'una recta paral.lela a la donada que tingui ordenada a l'origen +1

Escriu l'equació d'una recta paral.lela a la donada que passi per l'origen de coordenades

Sol: a) $f(x) = 3x - 2$







b) $f(8) = 22, f^{-1}(8) = \frac{10}{3}$

c) F, C, C, F

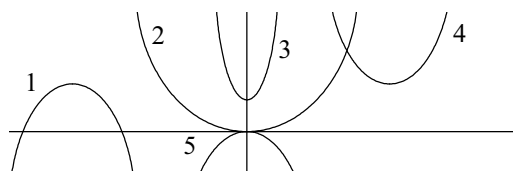
d) $f(x) = 3x + 1, f(x) = 3x$

2.- Copleta la taula següent fes un esbos (de manera aproximada) dels gràfics de les funcions:

expressió analítica	pendent	ordenada a l'origen	tipus de funció	esbos de la gràfica
$y = 3x - 5$				
$y = -3x$				
$y = 2$				
$y = -2x + 3$				

Sol: a) 3, -5, afí,  b) -3, 0, de prop. directa,  c) 0, 2, constant,  d) -2, 3, afí 

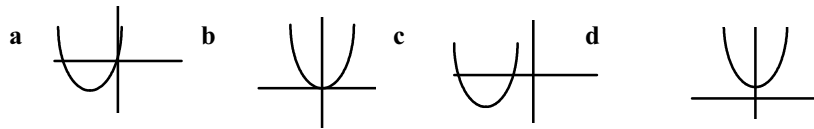
3.- a) Assigna cada gràfic de funció a una expressió analítica:



- $f(x) = -x^2$
- $f(x) = 2x^2 + 3$
- $f(x) = x^2 - 4x + 7$
- $f(x) = \frac{1}{3}x^2$
- $f(x) = -x^2 + 4x + 8$

b) Assigna i justifica cada funció al seu gràfic (suposem a, b, c, positius):

1. $f(x) = ax^2 + c$ 2. $f(x) = ax^2 + bx$ 3. $f(x) = ax^2$ 4. $f(x) = ax^2 + bx + c$



Sol: a) 5, 3, 4, 2, 1 b) 1-d, 2-a, 3-b, 4-c

4.- Dibuixa les paràboles, buscant els punts principals:

a) $y = -2x^2 - 4x + 6$

b) $y = x^2 - 2x - 8$

Sol: a) eix: $x = -1$, vèrtex: $(-1, 8)$, tall OY: $(0, 6)$, tall OX: $(-3, 0), (1, 0)$

b) eix: $x = 1$, vèrtex: $(1, -9)$, tall OY: $(0, -8)$, tall OX: $(4, 0), (-2, 0)$

5.- a) Troba el paràmetre a per tal que la paràbola $f(x) = 3x^2 + ax + 1$ passi pel punt $(2, -1)$

b) En quants punts es tallen la paràbola: $y = x^2 + 2x - 8$ i la recta $y = 6x - 12$?

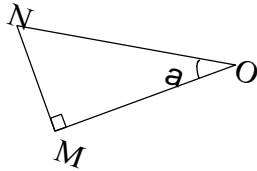
Troba'ls analíticament i gràficament.

Sol: a) $a = -7$ b) es tallen en 1 punt (SECANTS): $(2, 0)$

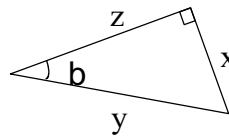
Llista 3 TRIGONOMETRIA

CONCEPTES BÀSICS

1.- Omple:



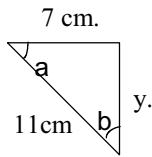
1. $\cos a =$
2. $= \frac{NM}{MO}$
3. $= \frac{ON}{MN}$



4. $\tan b =$
5. $= \frac{z}{y}$
6. $\sin b =$

Sol: 1. $\frac{OM}{ON}$, 2. $\tan a$, 3. RES, 4. $\frac{x}{z}$, 5. $\cos b$, 6. $\frac{x}{y}$

2.- Resol el següent triangle, de la manera que creguis convenient:



Sol: $y = 8,5$ cm, $a = 50'5''$, $b = 39'5''$

3.- a) Quin angle forma la recta $y = \frac{2}{5}x - 3$ amb l'eix OX ?

b) Escriu l'expressió analítica d'una recta que formi 23° amb l'eix OX:

Sol: a) $21'8''$, $y = 0'42x + 5$

4.- Si $\cos a = 0'15$,

a) Sense trobar l'angle calcula $\sin a$ i $\tan a$

b) Ara, amb la calculadora, troba l'angle, expressant-lo en graus minuts i segons

Sol: a) $\sin a = 0'9886$, $\tan a = 6'5912$ b) $81^\circ 22' 23''$

5.- Digues si són certes (C) o falses (F) les següents afirmacions, i justifica-ho

1. $\sin 28^\circ = \cos 62^\circ$

3. $\tan 1^\circ = \tan 89^\circ$

2. $\cos 37^\circ = \sin 63^\circ$

4. $\tan 28^\circ = \frac{1}{\tan 62^\circ}$

Sol: 1, 4: Certes (són complementaris) 2: Falsa (no ho són) 3: Falsa

6.- Completa

$\sin 30^\circ =$

$\cos 90^\circ =$

$\sin 45^\circ =$

$\sin 60^\circ =$

$\tan 45^\circ =$

$\tan 90^\circ =$

Sol: consulta una taula (cal saber-los de memòria)

APLICACIONS

➤ **Recorda:** cal fer el dibuix indicant, en cada cas, les dades conegudes i les que volem calcular.

7.- Resol un triangle rectangle sabent que la hipotenusa mesura 5 cm i un dels seus catets, 4 cm.

Sol: 3 cm, $36^\circ 52'$, $53^\circ 8'$

8.- Resol un triangle rectangle sabent que els seus catets mesuren 12 cm i 5 cm.

Sol: 13 cm, $22^{\circ} 37'$, $67^{\circ} 23'$

9.- Resol un triangle rectangle sabent que la hipotenusa mesura 3 cm i un dels angles és de 70° .

Sol: 1,03 cm, 2,82 cm 20°

10.- Resol un triangle rectangle sabent que la hipotenusa mesura 4 cm i un dels angles és de 50° .

Sol: 5,22 cm, 3,36 cm, 40°

11.- L'angle d'elevació del punt més alt d'una antena, observat des d'un punt del terra situat a 50 m del seu peu, és de 30° . Calcula l'alçaria de l'antena.

Sol: 28,87 m (29 m)

12. L'angle d'elevació del punt més alt d'una muntanya, observat des d'un punt situat a terra és de 32° . Quan ens aproximem 1000 m en direcció a la muntanya, el nou angle d'elevació és de 41° . Quina és l'altitud de la muntanya si els dos punts d'observació són al nivell del mar?

◆ Recorda! Mètode de la doble mesura: cal plantejar i resoldre un sistema.

Sol: l'alçada és de 2213 m

13.- Calcula el perímetre i l'àrea d'un triangle equilàter de 7 m. de costat.

Sol: P= 21 m., A= 21,21 m²

14.- Calcula el perímetre i l'àrea d'un octògon de 10 cm. de costat.

Sol: P= 80 cm., A= 482,8 cm²

ANGLES ORIENTATS

15.- Representa i digues a quin quadrant pertany cadascun dels angles següents:

- | | | | |
|-------------------|------------------|-------------------|-------------------|
| a) 85° | c) 160° | e) 300° | g) 350° |
| b) -105° | d) 240° | f) -250° | h) -300° |

Sol: Consultar treball de classe

16.- Redueix al primer gir i digues a quin quadrant pertanyen els angles següents:

- | | | | |
|------------------|-------------------|--------------------|-------------------|
| a) 390° | b) 1640° | c) -2080° | d) -740° |
|------------------|-------------------|--------------------|-------------------|

Sol: 30° , 200° , -280° , -20° i consultar treball de classe per indicar el quadrant.

Llista 4**GEOMÈTRIA**

1. Les bases d'un camp en forma de trapezi rectangular mesuren $B = 240$ m, $b = 180$ m i la seva altura és $h = 144$ m.

- a) Quina longitud tenen aquests costats en un dibuix del camp fet a escala 1:400?
- b) Quin és el perímetre del dibuix a escala?
- c) Quina és l'àrea del dibuix fet a escala?

SOL: a) $B' = 60$ cm $b' = 45$ cm $h' = 36$ cm $a' = 39$ cm b) 180 cm c) 1 890 cm².

2. Tallem un cub de 8 cm d'aresta per un pla que passa per dues arestes paral·leles no contigües. Descric la secció obtinguda i troba'n l'àrea.

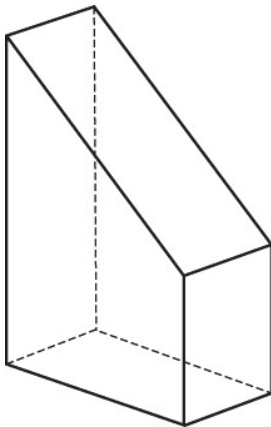
SOL: un rectangle. L'àrea és $64\sqrt{2}$ cm²

3. Una pilastra d'una carretera és un ortoedre de 1,8 m d'altura i base quadrada de 0,8 m de costat, rematat per una piràmide de 0,75 m d'altura.

- a) Troba l'àrea lateral.
- b) Troba el seu volum.
- c) Troba el seu pes, si la seva densitat és de 2,4 kg/dm³.

SOL: a) Àrea lateral = 7,12 m² b) Volum = 1,312 m³ c) Pes = 3 148,8 kg.

4. Donada la figura:



- a) Dibuixa el desenvolupament pla de la figura.
- b) Compta el nombre de cares i vèrtexs i dedueix el nombre d'arestes per la fórmula d'Euler.

SOL.: b) $c = 6$, $v = 8$, Segons la fórmula d'Euler $a = 12$.

5. Un rodet d'una piconadora té 1,8 m de longitud i 0,8 m de diàmetre.

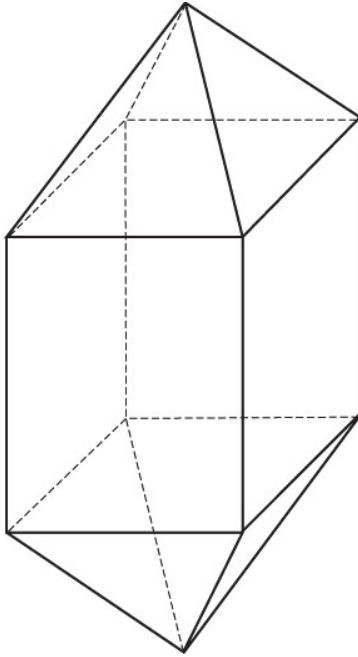
- a) Calcula el seu pes si la seva densitat és de 4,3 kg /dm³.
- b) Calcula quina àrea cobreix el rodet en 500 revolucions.

SOL: a) 3 870 kg b) 2 261,94 m².

6. Un dipòsit per posar gra té la forma de piràmide. La base és un rectangle de 1,8 x 1,5 m i l'altura és de 2 m. Quants hectolitres de gra hi caben?

SOL: $V = 1,8 \text{ m}^3$

7. Fixa't en aquest cos geomètric:



- Digues si aquesta figura tancada correspon a un políedre i per què.
- Quantes cares té aquesta figura?
- Quin tipus de polígons diferents pots observar en les cares d'aquesta figura?
- Quants vèrtex té? Es verifica la relació d'Euler?

SOL. a) Sí, cares planes i són polígons.
 b) 12 cares c) rectangles i triangles.
 d) Té 10 vèrtexs. Sí, Euler, té 20 arestes.

8. El diàmetre de la base d'un con de revolució mesura 12 dm i l'altura 8 dm. Dibuixa aquest con i troba:

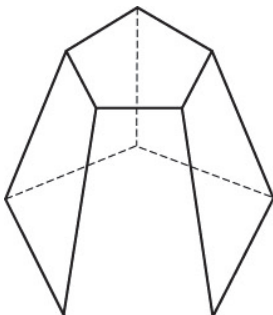
- L'àrea lateral.
- L'àrea total.
- El volum del con.

SOL.: a) $A_l = 188,49 \text{ dm}^2$

b) $A_t = 301,59 \text{ dm}^2$

c) $V = 904,8 \text{ dm}^3$.

9. Donada la figura:



- Dibuixa el desenvolupament pla de la figura.
- Compta el nombre de cares i vèrtexs i dedueix el nombre d'arestes per la fórmula d'Euler

Es aquest fulls escriu els càlculs que hagi fet i en el requadre escriu només la solució.

1. Escriu un polinomi que compleixi les característiques que s'indiquen:

P: De grau 7, amb tres termes i una variable.

Solució:

Q: De grau 4, sense terme independent i amb variable t.

Solució:

2. Calcula:

a. $(5x^2 + 3x - 5) + (x^2 - 4x + 8) =$

Solució:

b. $(2x^3+5) \cdot (6x^3 - 3x^2 + 4x + 7) =$

Solució:

c. $(5x^2 - 4x - 2) - (3x^2 - 4x + 8) =$

Solució:

3. Resol les equacions següents:

a) $4x^2 - 36 = 0$

Solució:

b) $3x^2 - 15x = 0$

Solució:

c) $3x^2 - 11x - 4 = 0$

Solució:

d) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Solució:

e) $x^2 - x + 3 = 0$

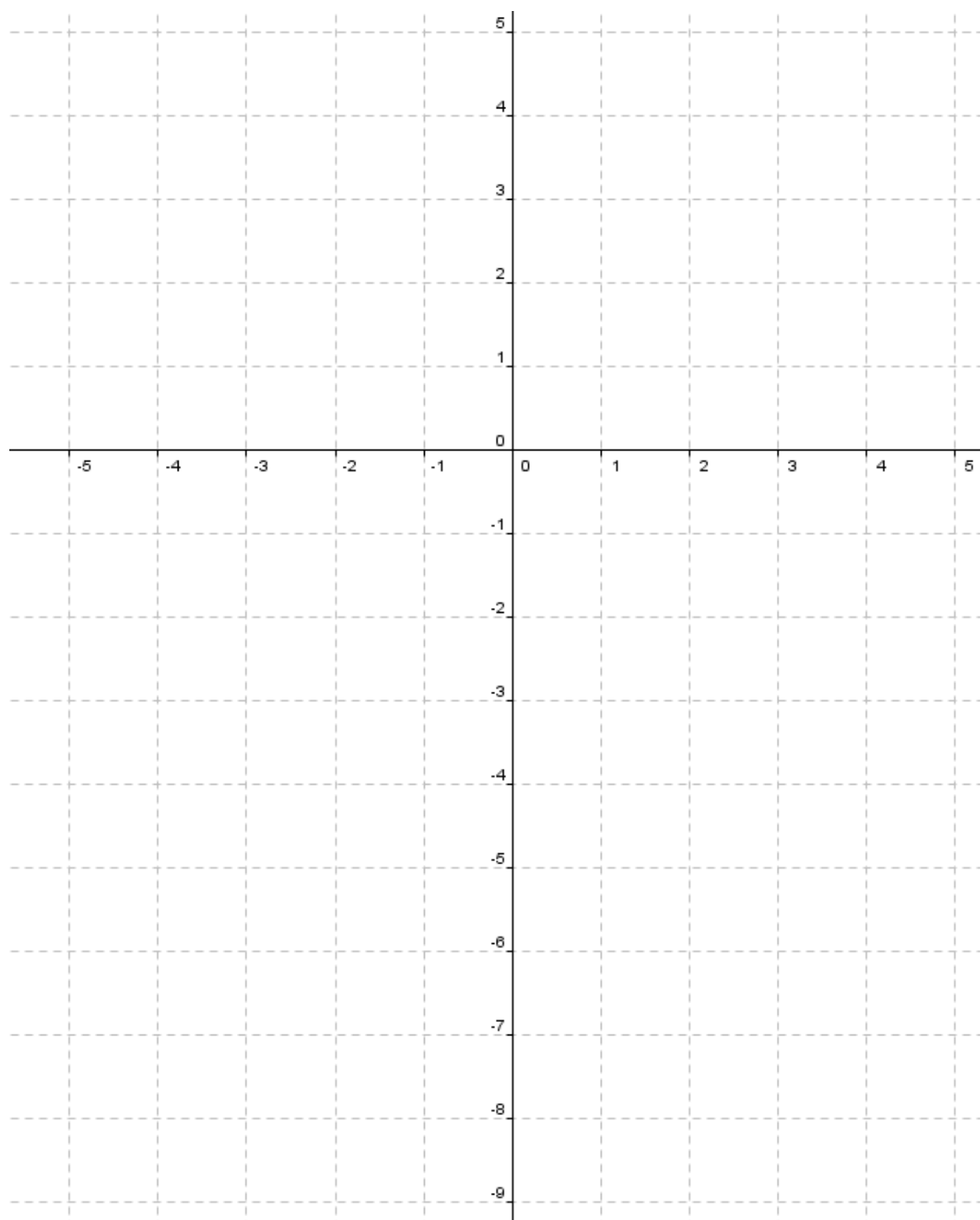
Solució:

4. Dibuixa, trobant els punts rellevants, la funció:

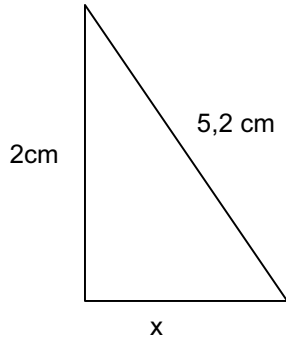
$$y = x^2 + 2x - 8$$

Solució punts rellevants:

Solució gràfic de la funció:

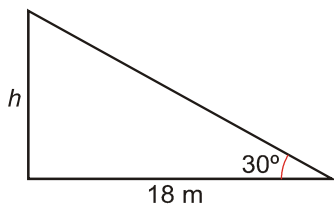


5. Fent servir el teorema de Pitàgores, calcula el costat que falta:



Solució:

6. Troba l'alçada d'un arbre sabent que a una distància de 18 m en veiem la part superior amb un angle de 30° .



Solució: