

**TREBALL DE CONSOLIDACIÓ
MATEMÀTIQUES APLICADES
A LES CIÈNCIES SOCIALS**

1r de Batxillerat

INS EL CASTELL

EXERCICIS I PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES APLICADES A LES CIÈNCIES SOCIALS

1r curs de Batxillerat.

Aquest dossier conté les solucions d'una selecció d'exercicis dels diferents temes del llibre que hem treballat: *Matemàtiques aplicades a les Ciències Socials 1, Ed. Barcanova*.

No es tracta de fer tots els exercicis, però, si és convenient **repassar totes les unitats**. Cadascú pot fer, alhora, la seva col·lecció personal. Molts d'aquests exercicis s'han treballat a classe. Així, us podeu ajudar amb els apunts.

LA NUMERACIÓ DE LES UNITATS ES CORRESPON A L'ORDENACIÓ DEL LLIBRE.

A la **primera setmana d'octubre** es farà una **prova** dels continguts bàsics de primer de Batxillerat. Aquesta prova suposarà un **10%** de la qualificació del primer trimestre.

Aquest recull d'exercicis és, també, una **guia d'estudi per l'alumnat que té les Matemàtiques de primer curs pendents** per preparar l'examen de recuperació de la convocatòria extraordinària de setembre.

Naturalment, el que queda d'aquest curs i durant les primeres setmanes del proper estaré a la vostra disposició per resoldre tots els dubtes que pugueu tenir.

Que passeu un bon estiu!

Relació d'exercicis

UNITAT 1: NOMBRES REALS

- **Radicals:** del 42 al 45 de la pàg. 29
- **Intervals:** del 54 al 60 pàg. 30
- **Logaritmes:** del 61 al 67 de la pàg. 30

UNITAT 2: ARITMÈTICA MERCANTIL

- **Percentatges:** del 19 al 24, pàg. 53
- **Interessos:** del 25 al 31, pàg. 53
- **Problemes:** del 45 al 48, pàg. 54

UNITAT 3: ÀLGEBRA

- **Factorització:** 37 al 40, de la pàg. 78.
- **Equacions amb radicals:** 45 de la pàg. 79
- **Equacions amb la x en el denominador:** del 46 al 50 de la pàg. 79
- **Equacions exponencials i logarítmiques:** 51, 52 i 53 de la pàg. 80
- **Sistemes:** 56, 57 de la pàg. 80
- **Inequacions. Interpretació solucions:** 66, 67 i 68 de la pàg. 81

UNITATS 4 i 5: LES FUNCIONS ELEMENTALS

- **Gràfics, domini i transformacions:** 17, pàg. 102, del 20 al 24 de la pàg. 107
- **Representacions de funcions elementals:** 28, 33, 34, 37 i 38 pàg. 107-109.
- **Composició i funció inversa:** del 6 al 10, pàg. 125

UNITAT 6: LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES.

- **Continuïtat:** 27, 28 de la pàg. 151
- **Visió gràfica del límit:** 29 i 30 de la pàg. 152
- **Límit en un punt i límit quan $x \rightarrow \pm \infty$:** 31 al 38 de la pàg. 152
- **Asíptotes:** 44 pàg. 153

UNITAT 7: INICIACIÓ AL CÀLCUL DE DERIVADES. APLICACIONS

- **Regles de derivació:** del 48 al 62 pàg 177
- **Recta tangent:** del 77 al 80 pàg 177

NOMBRES REALS

$$= 180\sqrt{2}$$

$$b) 2\sqrt{\frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$c) \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$$

$$d) (\sqrt[3]{2^2 \cdot 3})^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2^3 \sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2^3 \sqrt[3]{18}$$

$$e) (\sqrt[6]{2^5})^3 = \sqrt[2]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2 \sqrt{2} = 4\sqrt{2}$$

$$f) \sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$$

42. Expressa com una sola arrel:

$$a) \sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}; b) \sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}; c) (\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$$

$$a) \sqrt[12]{4}; b) \sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$$

$$c) \sqrt[20]{\frac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a \sqrt[20]{a}$$

43. Racionalitza els denominadors i simplifica:

$$a) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}; b) \frac{2}{\sqrt{2}}; c) \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}; d) \frac{3}{3+\sqrt{3}}$$

$$e) \frac{\sqrt{72} + 3\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$$

$$a) \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 3^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$b) \frac{2\sqrt[3]{4}}{2} = \sqrt[3]{4}; c) \frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

$$d) \frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

$$e) \frac{\sqrt{2^3 \cdot 3^2} + 3\sqrt{2^5} - \sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}} = \frac{3\sqrt{8} + 6\sqrt{8} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}} =$$

$$= \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 8$$

44. Calcula i simplifica:

$$a) 5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$$

$$b) \sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$$

$$c) \sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24}$$

$$d) (\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$$

$$a) 25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$$

$$b) 2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} = -20\sqrt[3]{2}$$

$$c) 5\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{6}$$

$$d) \sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$$

45. Simplifica al màxim les expressions següents:

$$a) 3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{2}$$

$$b) \sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}$$

$$c) 7\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$$

$$a) 3\sqrt[3]{2^4} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 4\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$$

$$b) \sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{-53}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$c) 7\sqrt[3]{3^4 \cdot a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} =$$

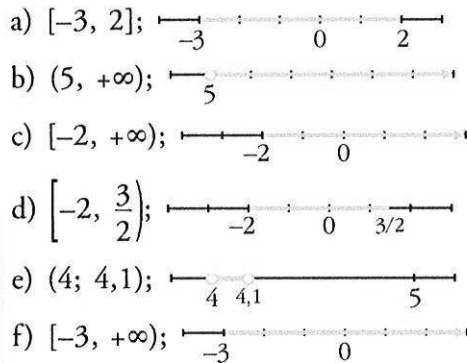
$$= 21\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{106}{5} - 2a\right)\sqrt[3]{3a}$$

NOMBRES REALS

Intervals i valor absolut

54. Representa gràficament i expressa com a intervals aquestes desigualtats:

- a) $-3 \leq x \leq 2$; b) $5 < x$; c) $x \geq -2$;
d) $-2 \leq x < 3/2$; e) $4 < x < 4,1$; f) $-3 \leq x$.



55. Escriu la desigualtat que verifica qualsevol nombre x que pertanyi a aquests intervals:

- a) $[-2, 7]$; b) $[13, +\infty)$; c) $(-\infty, 0)$;
d) $(-3, 0]$; e) $[3/2, 6)$; f) $(-\infty, +\infty)$;
a) $-2 \leq x \leq 7$; b) $x \leq 13$; c) $x < 0$;
d) $-3 < x \leq 0$; e) $\frac{3}{2} \leq x < 6$;
f) $-\infty < x < +8$

56. Expressa com a interval la part comuna de cada parell d'intervals ($A \cap B$) i ($I \cap J$):

- a) $A = [-3, 2]$ $B = [0, 5]$
b) $I = [2, +\infty)$ $J = (0, 10)$
a) $[0, 2]$; b) $[2, 10)$.

57. Escriu en forma d'intervals els nombres que verifiquen aquestes desigualtats:

- a) $x < 3$ o $x \geq 5$; b) $x > 0$ i $x < 4$;
c) $x \leq -1$ o $x > 1$; d) $x < 3$ i $x \leq -2$
Representa'ls gràficament, i si són dos intervals separats, com en a), escriu:

$(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$.

- a) $(-\infty, 3) \cup [5, \infty)$; b) $(0, 4)$;
c) $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$; d) $[-\infty, 3]$.

58. Expressa, en forma d'interval, els nombres que compleixen cada una d'aquestes expressions:

- a) $|x| < 7$; b) $|x| \geq 5$; c) $|2x| < 8$;
d) $|x - 1| \leq 6$; e) $|x + 2| > 9$; f) $|x - 5| \geq 1$
a) $(-7, 7)$; b) $[-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$;
c) $(-4, 4)$; d) $[-5, 7]$; e) $(-11, 7)$;
f) $(-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$.

59. Esbrina quins valors de x compleixen:

- a) $|x - 2| = 5$; b) $|x - 4| \leq 7$
c) $|x + 3| \geq 6$
a) 7 i -3; b) $-3 \leq x \leq 11$; $[-3, 11]$
c) $x \leq -9$ i $x \geq 3$; $(-\infty, -9) \cup [3, \infty)$

60. Troba la distància entre els parells de nombres següents:

- a) 7 i 3 b) 5 i 11 c) -3 i -9
d) -3 i 4
a) $|7 - 3| = 4$ b) $|11 - 5| = 6$
c) $|-9 - (-3)| = |-9 + 3| = |-6| = 6$
d) $|4 - (-3)| = 7$

Logaritmes

61. Calcula, fent servir la definició de logaritme:

- a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$
b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$
a) $6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$
b) $-5 - 3 - 0 = -8$

NOMBRES REALS

62. Calcula la base d'aquests logaritmes:

a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$

a) $x^3 = 125$; $x = 5$; b) $x^{-2} = \frac{1}{9}$; $x = 3$

63. Calcula el valor de x en aquestes igualtats:

a) $\log 3^x = 2$; b) $\log x^2 = -2$; c) $7^x = 115$;
d) $5^{-x} = 3$

a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4,19$; b) $2 \log x = -2$; $x = \frac{1}{10}$;

c) $x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2,438$;

d) $x = -\frac{\log 3}{\log 5} = -0,683$

64. Troba amb la calculadora i comprova el resultat de la potenciació:

a) $\log \sqrt{148}$ b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11})$

c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5})$ d) $\log_3 42,9$

e) $\log_5 1,95$ f) $\log_2 0,034$

a) 1,085; b) 26,16; c) -9,50; d) 3,42;
e) 0,41; f) -4,88

65. Troba el valor de x en aquestes expressions, aplicant-hi les propietats dels logaritmes:

a) $\log x = \log 17 + \log 13$

b) $\ln x = \ln 36 - \ln 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5$

d) $\log x = \log 12 + \log 25 - 2 \log 6$

e) $\log x = 4 \log 2 - \frac{1}{2} \log 25$

Per logaritme d'un producte: $\ln x = \ln (17 \cdot 13)$.

a) $\ln 17 + \log 13$

$\ln x = \ln (17 \cdot 13) \Rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221$

b) $\log x = \log \frac{36}{9} \Rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = \ln 5^3 \Rightarrow x = 5^3 \Rightarrow x = 125$

d) $\log x = \log \frac{12 \cdot 25}{6^2} \Rightarrow x = \frac{25}{3}$

e) $\log x = \log 2^4 - \log \sqrt{25}$

$\log x = \log 16 - \log 5$

$\log x = \log \frac{16}{5} \Rightarrow x = \frac{16}{5}$

66. Sabent que $\log 3 = 0,477$, calcula el logaritme decimal de 30; 300; 3 000; 0,3; 0,03; 0,003.

$\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 =$
 $= 0,477 + 1 = 1,477$

$\log 300 = \log (3 \cdot 10^2) = \log 3 + 2 \log 10 =$
 $= 2,477$

$\log 3 000 = 0,477 + 3 = 3,477$

$\log 0,3 = \log (3 \cdot 10^{-1}) = 0,477 - 1 = -0,523$

$\log 0,03 = \log (3 \cdot 10^{-2}) = 0,477 - 2 = -1,523$

$\log 0,003 = 0,477 - 3 = -2,523$

67. Sabent que $\log k = 14,4$, calcula el valor de les expressions següents:

a) $\log \frac{k}{100}$ b) $\log 0,1 k^2$

c) $\log \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ d) $(\log k)^{1/2}$

a) $\log k - \log 100 = 14,4 - 2 = 12,4$

b) $\log 0,1 + 2 \log k = -1 + 2 \cdot 14,4 = 27,8$

c) $\frac{1}{3}(\log 1 - \log k) = -\frac{1}{3} \cdot 14,4 = -4,8$

d) $(14,4)^{1/2} = \sqrt{14,4} = 3,79$

Pàgina 31

68. Calcula la base de cada cas:

a) $\log_x \frac{1}{4} = 2$ b) $\log_x 2 = \frac{1}{2}$

$$m = \frac{100\,000 \cdot \frac{8}{1\,200}}{\left(1 + \frac{8}{1\,200}\right)^{84+1} - \left(1 + \frac{8}{1\,200}\right)} =$$

$$= 886,05 \text{ €}$$

18. Es vol estaviar 150 000 € en 10 anys al 6 % anual.

a) Quina serà la mensualitat?

b) Si els pagaments són trimestrals, quina serà la quota?

$$a) i = \frac{6}{1\,200} = 0,005$$

$$a = \frac{150\,000 \cdot 0,005}{(1,005)^{121} - 1,005} = 13\,233,69 \text{ €}$$

$$b) i = \frac{6}{400} = 0,015$$

$$a = \frac{150\,000 \cdot 0,015}{1,015^{41} - 1,015} = 3\,205,48 \text{ €}$$

Pàgina 53

Per practicar

Percentatges

19. Una entrada de cine costava l'any passat 3,30 € i enguany, 4,10 €. Quin ha estat l'índex de variació? I el percentatge d'augment?

$$\text{Índex de variació} = \frac{4,10}{3,30} = 1,24$$

$$\text{Percentatge d'augment} = 24,24 \%$$

20. Esbrina l'índex de variació del preu d'un televisor que costava 450 €, després d'apujar-lo un 15 % i de rebaixar-lo en un 25 %. Quin és el preu actual?

$$\text{Índex de variació} = 1,15 \cdot 0,75 = 0,8625$$

$$\text{Preu actual} = 450 \cdot 0,8625 = 388,125 \text{ €}$$

21. La quantitat d'aigua d'un embassament ha disminuït en un 35 % respecte de la que hi havia el mes passat. Ara conté 74,25 milions de litres. Quants litres tenia el mes passat?

$$0,65x = 74,25 \Rightarrow x = 114,23 \text{ milions de litres.}$$

22. He pagat 11,80 € per un llibre que estava rebaixat un 20 %. Quin era el preu abans de la rebaixa?

$$0,80x = 11,80 \Rightarrow x = 14,75 \text{ €}$$

23. Si el preu d'un article ha passat de 35 € a 100 € en uns anys, quin és l'índex de variació? Quin ha estat l'augment expressat en percentatges?

$$\text{índex} = \frac{100}{35} = 2,857 \Rightarrow 285,7 \%$$

24. El preu d'un ordinador ha baixat durant els últims anys, passant de costar 3750 € a 1560 €. Calcula l'índex de variació i la disminució percentual del preu.

$$\text{índex} = \frac{1560}{3750} = 0,418$$

Interessos

25. Un banc paga el 10 % dels diners que s'hi dipositen, sempre que s'hi mantinguin sense treure res durant un any. Quant et donaran al cap d'un any si diposites 18 500 €? I si els hi deixes durant 5 anys sense treure'n res?

Al cap d'un any ens donaran 1850 € d'interessos; és a dir, tindrem 20 350 €.

Al cap de cinc anys tindrem $18\,500 \cdot 1,1^5$

ARITMÈTICA MERCANTIL

= 29 794,44 €; és a dir, 11 294,44 € d'interessos.

26. Troba en quant es transforma un capital de 10 000 euros al 5 % anual durant 2 anys i 3 mesos si el període de capitalització és: a) anual; b) mensual.

a) 2 anys i 3 mesos = 2,25 anys

$$10\,000 \cdot (1,05)^{2,25} = 11\,160,30 \text{ €}$$

b) 2 anys i 3 mesos = 27 mesos; 5 % anual = $\frac{5}{12}$ % mensual

$$10\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{1200}\right)^{27} = 11\,188,11 \text{ €}$$

27. En quant es transforma un capital de 3 500 € dipositats durant tres mesos al 8,5 % anual? I si es manté 5 anys amb períodes de capitalització trimestrals?

En tres mesos:

$$8,5\% \text{ anual} \rightarrow \frac{8,5}{4} = 2,125 \text{ trimestral}$$

$$3\,500 \cdot 1,02125 = 3\,574,38 \text{ €}$$

En cinc anys: (20 trimestres)

$$3\,500 \cdot 1,02125^{20} = 5\,329,78 \text{ €}$$

28. Un capital col·locat al 15 % anual durant quatre anys, s'ha convertit en 5 596,82 €. A quant ascendia aquest capital?

$$C \cdot (1,15)^4 = 5\,596,82 \Rightarrow C = 3\,200 \text{ €}$$

29. Quants anys ha d'estar dipositat un capital de 15 000 € per convertir-se en 18 000 € al 4,7 % anual?

$$15\,000 \cdot 1,047^x = 18,000; x = 3,97 \text{ anys}$$

30. Calcula el tant per cent anual a què

s'han de col·locar 600 € perquè en dos anys es converteixin en 699,84 €.

$$600 \cdot \left(1 + \frac{r}{100}\right)^2 = 699,84 \Rightarrow r = 8\%$$

31. Dipositem 32 500 € en un banc durant un any i mig i es converteixen en 32 720 €. Quin tant per cent mensual ens dona el banc?

$$32\,500 \cdot \left(1 + \frac{x}{1200}\right)^{18} = 32\,720$$

$$x = 0,4498$$

$$\text{Percentatge} = 44,98\%$$

Amortització de préstecs

32. Un comerciant demana al banc un préstec de 5 000 euros per tornar en un sol pagament al cap de tres mesos. A quant ha d'ascendir aquest pagament si el preu dels diners està al 12 % anual? 12 % anual és un 3 % trimestral. El pagament serà de:

$$5\,000 \cdot 1,03 = 5\,150 \text{ €}$$

33. Rebem un préstec de 8 500 € al 15 % anual, que hem de tornar en un sol pagament. Quants anys han transcorregut si en liquidar-lo paguem 14 866,55 €?

$$8\,500 \cdot (1,15)^t = 14\,866,55 \Rightarrow t = 4 \text{ anys}$$

34. Es demana un préstec de 4 000 € al 6,5 % d'interès semestral amb el compromís de tornar-lo, en un sol pagament, al cap de dos anys. A quant ascendirà aquest pagament?

$$4\,000 \cdot (1,065)^4 = 5\,145,87 \text{ €}$$

35. Hem d'amortitzar 50 000 € en cinc

ARITMÈTICA MERCANTIL

$$(-2) \begin{cases} 41 = 2a_1 + 11 \cdot d \\ 24 = a_1 + 2 \cdot d \\ 41 = 2a_1 + 11 \cdot d \\ -48 = -2a_1 - 4 \cdot d \\ \hline -7 = 7 \cdot d \end{cases}$$

$$d = -1$$

$$24 = a_1 + 2(-1)$$

$$24 = a_1 - 2$$

$$a_1 = 26$$

45. Un tipus de bacteri es reproduïx per bipartició cada 15 minuts. Quants bacteris hi haurà després de 8 hores?

És una progressió geomètrica de $r = 2$.

En 8 hores tindrem 32 cicles de 15 minuts, per tant:

$$a_{32} = a_1 \cdot r^{32-1}$$

$$a_{32} = 1 \cdot 2^{31}$$

$$a_{32} = 2\,147\,483\,648$$

A les 8 hores tindrem 2 147 483 648 bacteris.

46. Escriu el terme general de la progressió que ens diu en quant es transformen 10 € dipositats al 5 % anual durant n anys. I si el rèdit fos del 10 %?

$$a_1 = 10 \text{ €}$$

$$5 \%$$

n anys

$$a_n = 10 \cdot 1,05^{n-1}$$

$$b) a_n = 10 \cdot 1,1^{n-1}$$

47. Dipositem en un banc 3 000 € al 5 % anual, al començament d'un any determinat. Calcula el capital disponible al final de cada any, durant 4 anys consecutius si no traiem cap quantitat de diners. Demosta que es tracta d'una progressió geomètrica i justifica'n els motius.

Al final del primer any tenim:

$$3\,000 \cdot 1,05 = 3\,150 \text{ €}$$

Al final del segon any tenim:

$$3\,000 \cdot 1,05^2 = 3\,307,5 \text{ €}$$

Al final del tercer any tenim:

$$3\,000 \cdot 1,05^3 = 3\,472,9 \text{ €}$$

Al final del quart any tenim:

$$3\,000 \cdot 1,05^4 = 3\,646,5 \text{ €}$$

Es tracta d'una successió numèrica on la $r = 1,05$

48. Si al començament de cada any ingressem 500 € en un banc al 4 % anual, quant haurem aconseguit estalviar al final del cinquè any?

$$s_1 = 500 \cdot 1,04^5 = 608,3 \text{ €}$$

$$s_2 = 500 \cdot 1,04^4 = 584,9 \text{ €}$$

$$s_3 = 500 \cdot 1,04^3 = 562,4 \text{ €}$$

$$s_4 = 500 \cdot 1,04^2 = 540,8 \text{ €}$$

$$s_5 = 500 \cdot 1,04 = 520 \text{ €}$$

Com que és una progressió decreixent ens resultarà més còmode manejar-la si la invertim:

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= 500 \cdot 1,04 \\ a_2 &= 500 \cdot 1,04^2 \\ a_3 &= 500 \cdot 1,04^3 \\ a_4 &= 500 \cdot 1,04^4 \\ a_5 &= 500 \cdot 1,04^5 \end{aligned} \right\} r = 1,04$$

$$s_5 = \frac{500 \cdot 1,04^5 \cdot 1,04 - 500 \cdot 1,04}{1,04 - 1} =$$

$$= 2\,816,5 \text{ €}$$

Haurem aconseguit estalviar 2 816,5 €

49. Dipositem en un banc 1 000 € a l'1,2 % trimestral durant 2 anys. Calcula el capital disponible al final de cada trimestre durant aquests anys si no en traiem cap quantitat de diners.

Al final del primer trimestre val:

ÀLGEBRA

- b) $4x^2(x-2)(x+2)$
 c) $x(x+1)^2$
 d) $3(x+5)^2$
 e) $5x(x-3)(x+3)$
 f) $2x(x-2)^2$

37. Descompon en factors i simplifica les fraccions següents:

- a) $\frac{x+1}{x^2-1}$ b) $\frac{x^2-4}{x^2+4x+4}$
 c) $\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ d) $\frac{x^2+x-6}{x-2}$
 a) $\frac{1}{x-1}$ b) $\frac{x-2}{x+2}$
 c) $\frac{x}{x+1}$ d) $x+3$

38. Resol les equacions següents, factoritzant-les prèviament:

- a) $x^3 - 7x - 6 = 0$
 b) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$
 c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$
 d) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$
 a) $x = 3, x = -2, x = -1$
 b) $x = \frac{5}{2}, x = 1, x = -2$
 c) $x = 1, x = 2, x = 3, x = -1$
 d) $x = 1, x = 2, x = \frac{1}{3}$

39. Entre les sis equacions de primer grau següents, n'hi ha dues que no tenen solució, dues que tenen solucions infinites i dues que tenen solució única. Identifica cada cas i resol les que sigui possible:

- a) $\frac{x+1}{2} = x - \frac{2x+3}{4}$
 b) $x + \frac{3-x}{3} - 1 = \frac{2}{3}x$
 c) $\frac{(x+1)^2}{16} - \frac{1+x}{2} = \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{2+x}{4}$

- d) $0,2x + 0,6 - 0,25(x-1)^2 = 1,25x - (0,5x+2)^2$
 e) $(5x-3)^2 - 5x(4x-5) = 5x(x-1)$
 f) $\frac{2x+1}{7} - \frac{(x+1)(x-2)}{2} = \frac{x-2}{2} - \frac{(x-2)^2}{2}$

- a) No té solució.
 b) Infinites solucions.
 c) Infinites solucions.
 d) $x = -3$
 e) No té solucions.
 f) $x = \frac{29}{12}$

40. Resol les equacions següents:

- a) $\frac{x^2-1}{3} + (x-2)^2 = \frac{x^2+2}{2}$
 b) $0,5(x-1)^2 - 0,25(x+1)^2 = 4-x$
 c) $(0,5x-1)(0,5x+1) = (x+1)^2 - 9$
 d) $\frac{3}{2}\left(\frac{x}{2}-2\right)^2 - \frac{x+1}{8} = \frac{1}{8} - \frac{x-1}{4}$
 e) $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{x(x+2)}{4} = \frac{(3x-2)^2}{8} + 1$
 f) $0,3x^2 - x - 1,3 = 0$

* Expressa els decimals periòdics en forma de fracció i obtindràs solucions enteres.

- a) $x = 4$ i $x = \frac{4}{5}$
 b) $x = 5, x = -3$
 c) $x = -\frac{14}{3}, x = 2$
 d) $x = 4, x = \frac{11}{3}$
 e) No té solucions reals.
 f) $x = 4, x = -1$

Pàgina 79

41. Resol aquestes equacions incompletes de segon grau sense aplicar-hi la fórmula general:

ÀLGEBRA

45. Troba les solucions de les equacions següents:

a) $\sqrt{3x+4} + 2x - 4 = 0$

b) $x - \sqrt{7-3x} = 1$

c) $\sqrt{5x+6} - 3 = 2x$

d) $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x+1} = 0$

e) $\sqrt{x^2+3} - \sqrt{3-x} = 0$

a) $(\sqrt{3x+4})^2 = (4-2x)^2$

$$3x+4 = 16 + 4x^2 - 16x$$

$$4x^2 - 19x + 12 = 0$$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361 - 192}}{8} \begin{cases} x = 4 \text{ (no val)} \\ x = 6/8 = 3/4 \end{cases}$$

b) $(x-1)^2 = (\sqrt{7-3x})^2$

$$x^2 + 1 - 2x = 7 - 3x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+24}}{2} \begin{cases} x_1 = -3 \text{ (no val)} \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

c) $(\sqrt{5x+6})^2 = (2x+3)^2$

$$5x+6 = 4x^2 + 9 + 12x$$

$$4x^2 + 7x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49-48}}{8} \begin{cases} x_1 = -3/4 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

d) $(\sqrt{x^2+x})^2 = (\sqrt{x+1})^2$

$$x^2 = 1$$

$$x_1 = 1, x_2 = -1$$

e) $(\sqrt{x^2+3})^2 = (\sqrt{3-x})^2$

$$x^2 + x = 0$$

$$x(x+1) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1$$

Equacions amb la x en el denominador

46. Resol l'equació següent:

$$\frac{x}{x-3} + \frac{2x}{x+3} = \frac{6}{x^2-9}$$

Multipliqua els dos membres de l'equació pel m.c.m. dels denominadors:

$$(x+3)(x-3).$$

$$x^2 + 3x + 2x^2 - 6x = 6$$

$$3x^2 - 3x - 6 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9+72}}{6} \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \end{cases}$$

47. Resol: $\frac{2x}{x+2} = \frac{3x+2}{2x}$

Fes producte de mitjans igual a producte d'extrems.

$$4x^2 = 3x^2 + 2x + 6x + 4$$

$$x^2 - 8x - 4 = 0$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64+16}}{2} \begin{cases} x_1 = 4 + 2\sqrt{5} \\ x_2 = 4 - 2\sqrt{5} \end{cases}$$

48. Resol:

a) $\frac{x}{x+1} = \frac{4}{x+4}$; b) $\frac{3}{x+3} = \frac{x+2}{2-x}$;

a) $x^2 + 4x = 4x + 4$;

$$x^2 = 4$$

$$x_1 = 2, x_2 = -2$$

b) $6 - 3x = x^2 + 3x + 2x + 6$

$$x^2 + 8x = 0$$

$$x(x+8) = 0$$

$$x_1 = 0, x_2 = -8$$

49. Resol:

a) $\frac{x+2}{x} + 3x = \frac{5x+6}{2}$

b) $\frac{1}{x} + \frac{2}{x} + \frac{3}{x} = \frac{x}{3} - 1$

c) $\frac{600}{x} + 80 = \frac{600}{x-2}$

d) $\frac{8}{x+6} + \frac{12-x}{x-6} = 1$

a) $2x + 4 + 6x^2 = 5x^2 + 6x$

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

ÀLGEBRA

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2}$$

$$x = 2$$

$$b) 3 + 6 + 9 = x^2 - 3x$$

$$x^2 - 3x - 18 = 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 72}}{2} \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$c) 600x - 1200 + 80x^2 - 160x = 600x$$

$$80x^2 - 160x - 1200 = 0$$

$$x^2 - 2x - 15 = 0$$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm 8}{2} \begin{cases} x_1 = 5 \\ x_2 = -3 \end{cases}$$

$$d) 8x - 48 + 12x - x^2 + 72 - 6x = x^2 - 36$$

$$2x^2 - 14x - 60 = 0$$

$$x = \frac{14 \pm \sqrt{196 + 480}}{4}$$

$$\begin{cases} x_1 = (14 + 26)/4 = 10 \\ x_2 = (14 - 26)/4 = -3 \end{cases}$$

50. Resol les equacions següents:

$$a) \frac{8-x}{2} - \frac{2x-11}{x-3} = \frac{x+6}{2}$$

$$b) \frac{10}{3} + \frac{5-x}{x+5} = \frac{x+5}{x-5}$$

$$a) 8x - 24 - x^2 + 3x - 4x + 22 =$$

$$= x^2 + 6x - 3x - 18$$

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 128}}{4} \begin{cases} x_1 = (4 + 12)/4 = 4 \\ x_2 = (4 - 12)/4 = -2 \end{cases}$$

$$b) 10x^2 - 250 + 15x - 3x^2 - 75 + 15x =$$

$$= 3x^2 + 15x + 15x + 75$$

$$4x^2 = 400$$

$$x^2 = 100 \begin{cases} x_1 = 10 \\ x_2 = -10 \end{cases}$$

Equacions exponencials i logarítmiques

51. Resol les equacions següents exponencials:

$$a) 3^x = \sqrt[3]{9}$$

* Expressa $\sqrt[3]{9}$ com a potència de base 3.

$$b) 2^x \cdot 2^{x+1} = 8$$

* Multiplica el primer membre.

$$c) 5 \cdot 7^{-x} = 35$$

* Divideix els dos membres per 5.

$$d) (0,5)^x = 16$$

* 0,5 és una potència de base 2.

$$e) \sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$$

$$a) x = \frac{2}{3} \quad b) x = 1 \quad c) x = -1$$

$$d) x = -4 \quad e) x = -4$$

52. Resol prenent logaritmes:

$$a) 2^x = 317,5$$

$$b) 1,15^x = 52$$

$$c) 0,73^x = 17$$

$$d) 1,8^{x+1} = 0,003$$

$$a) x = 8,31$$

$$b) x = 28,27$$

$$c) x = -9,0026$$

$$d) x = -10,88$$

53. Resol les equacions següents mitjançant un canvi de variable:

$$a) 2^x + 2^{1-x} = 3$$

$$b) 2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$$

$$c) 8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$$

$$d) 2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$$

$$e) 9^x - 3^x - 6 = 0$$

$$f) 7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$$

$$a) x = 0, x = 1 \quad b) x = 0$$

$$c) x = -1$$

$$d) x = 0, x = 2$$

$$e) x = 1$$

$$f) x = \pm 1$$

54. Resol les equacions:

$$a) \log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$$

$$b) \ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln 3 + \ln(x-1)$$

$$c) 2 \ln(x-3) = \ln x - \ln 4$$

$$d) \log(x+3) - \log(x-6) = 1$$

$$a) x = \pm 5$$

b) $x = 0, x = 5$, però $x = 0$ no és una solució vàlida.

$$c) x = 4$$

$$d) x = 7$$

ALGEBRA

55. Resol les equacions:

- a) $\log(x+9) = 2 + \log x$
 b) $\log \sqrt{3x+5} + \log \sqrt{x} = 1$
 c) $\log(x^2 - 7x + 110) = 2$
 d) $\log(x^2 + 3x + 36) = 1 + \log(x+3)$
- a) $x = \frac{1}{11}$
 b) No té solució real.
 c) $x = 2, x = 5$
 d) $x = 1, x = 6$

56. Resol els sistemes següents:

- a) $\begin{cases} 2x - 11y = -11 \\ 23x + y = 1 \end{cases}$
 b) $\begin{cases} 3x + 5 = 2y + 1 \\ x - 9 = 1 - 5y \end{cases}$
 c) $\begin{cases} \frac{x+1}{3} + y = 1 \\ \frac{x-3}{4} + 2y = 1 \end{cases}$
 d) $\begin{cases} \frac{x}{3} - \frac{y}{2} = 4 \\ \frac{x}{2} - \frac{y}{4} = 2 \end{cases}$

a) $y = 1 - 23x;$
 $2x - 11 + 253x = -11$
 $0 = 255x$

$x = 0, y = 1$

b) $x = 10 - 5y$

$30 - 15y + 5 = 2y + 1$

$34 = 17y$

$y = \frac{34}{17}, y = 2$

$x = 0, y = 2$

c) $\begin{cases} x + 1 + 3y = 3 \\ x - 3 + 8y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + 3y = 2 \\ x + 8y = 7 \end{cases}$

$x = 2 - 3y$

$2 - 3y + 8y = 7; 5y = 5; y = 1$

$x = -1, y = 1$

d) $\begin{cases} 2x - 3y = 24 \\ 2x - y = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x + 3y = -24 \\ 2x - y = 8 \end{cases}$

$2y = -16; y = -8$

$x = 0, y = -8$

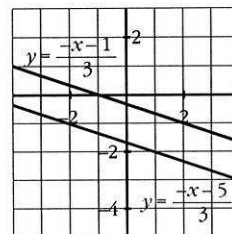
57. Representa gràficament aquests sistemes d'equacions i digues quins no tenen solució:

a) $\begin{cases} x - 3y = 2x + 1 \\ 4x + 3y = 3x - 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + 4 = 4 - y \\ 5x - 3 = 9y - 3 \end{cases}$

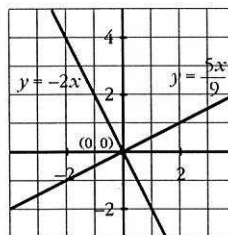
c) $\begin{cases} 3x + 2 = y - 5 \\ 6x + 1 = 2y - 3 \end{cases}$

a)



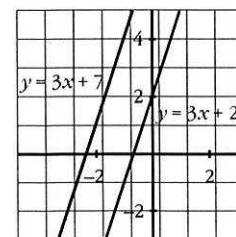
Rectes paral·leles.
El sistema no té solució.

b)



Les rectes es tallen en (0, 0).
La solució és $x = 0, y = 0$.

c)



Rectes paral·leles.
El sistema no té solució.

ÀLGEBRA

$$x_1 = \frac{1}{2}, y_1 = -1; x_2 = \frac{1}{2}, y_2 = \frac{1}{2}; x_3 = -\frac{1}{2},$$

$$y_3 = 1; x_4 = -\frac{1}{2}, y_4 = -\frac{1}{2}$$

63. Resol els sistemes d'equacions següents:

a)
$$\begin{cases} y - x = 1 \\ 2^x \cdot 2^y = 4 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 5^x \cdot 5^y = 1 \\ 5^x : 5^y = 25 \end{cases}$$

a) $x = \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}$

b) $x = 1, y = -1$

64. Resol:

a)
$$\begin{cases} \log x + \log y = 3 \\ \log x - \log y = -1 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ \log_2 \frac{x^2}{y} = 3 \end{cases}$$

a) $x = 10, y = 100$

b)
$$\begin{cases} \log_2 x + 3\log_2 y = 5 \\ 2 \log_2 x - \log_2 y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_2 x + 3 \log_2 y = 5 \\ 6 \log_2 x - 3 \log_2 y = 9 \end{cases}$$

$$7 \log_2 x = 14$$

$$\log_2 x = \frac{14}{7} \rightarrow \log_2 x = 2 \rightarrow [x = 2^2 = 4]$$

$$\log_2 \frac{x^2}{y} = 3 \rightarrow \log_2 \frac{4^2}{y} = 3 \rightarrow \log_2 \frac{16}{y} = 3$$

$$\log_2 \frac{16}{y} = \log_2 2^3$$

$$\frac{16}{y} = 8 \rightarrow 16 = 8y \rightarrow \left[y = \frac{16}{8} = 2 \right]$$

65. Resol:

a)
$$\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$$

a) $x = 4, y = 3$

b) $(x = -1, y = -1), (x = 8, y = 5)$

Pàgina 81

Inequacions

66. Resol les inequacions següents:

a) $2x - 3 < x - 1$

b) $\frac{3x-2}{2} \leq \frac{2x+7}{3}$

c) $-3x - 2 < 5 - \frac{x}{2}$

d) $\frac{3x}{5} - x > -2$

a) $x < 2; (-\infty, 2)$

b) $9x - 6 \leq 4x + 14 \rightarrow 5x \leq 20 \rightarrow x \leq 4; (-\infty, 4]$

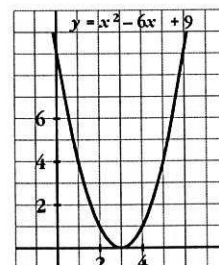
c) $-6x - 4 < 10 - x \rightarrow -14 < 5x \rightarrow x > -\frac{14}{5};$

$\left(-\frac{14}{5}, +\infty\right)$

d) $3x - 5x > -10 \rightarrow -2x > -10 \rightarrow 2x < 10 \rightarrow x < 5; (-\infty, 5)$

67. Observa la representació gràfica d'aquestes paràboles i digues quines són les solucions de les equacions i inequacions proposades:

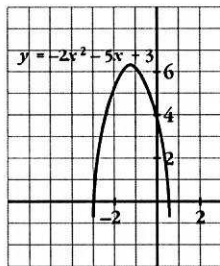
a)



$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$$x^2 - 6x + 9 > 0$$

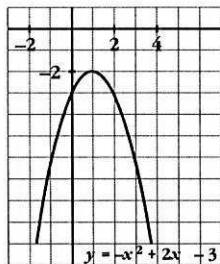
b)



$$-2x^2 - 5x + 3 = 0$$

$$-2x^2 - 5x + 3 \geq 0$$

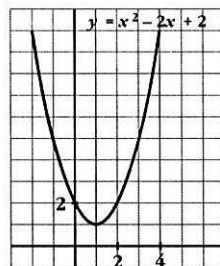
c)



$$-x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$-x^2 + 2x - 3 < 0$$

d)



$$x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$x^2 - 2x + 2 > 0$$

a) Equació: $x = 3$ Inequació: $(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$ b) Equació: $x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$ Inequació: $\left[-3, \frac{1}{2}\right]$

c) Equació: No té solució.

Inequació: \mathbb{R}

d) Equació: No té solució.

Inequació: \mathbb{R}

68. Resol aquestes inequacions:

a) $5(2 + x) > -5x$

b) $\frac{x-1}{2} > x-1$

c) $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

f) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x \rightarrow 10x > -10 \rightarrow x > -1;$
 $(-1, +\infty)$

b) $x-1 > 2x-2 \rightarrow 1 > x \rightarrow x < 1; (-\infty, 1)$

c) $x(x+5) < 0 \rightarrow -5 < x < 0; (-5, 0)$

d) $(3x-2)(3x+2) > 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

e) $(x+2)(x+4) \geq 0 \rightarrow (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $(x+3)(x-5) \leq 0 \rightarrow [-3, 5]$

69. Resol els sistemes d'inequacions següents:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

Resol cada inequació i busca les solucions comunes. Un dels sistemes no té solució.

a) $\begin{cases} 4x < 4 \rightarrow x < 1 \\ x > -4 \end{cases} \rightarrow (-4, 1)$

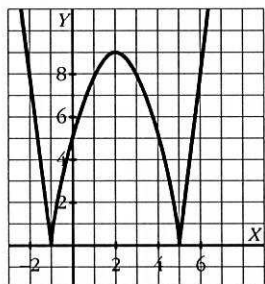
b) $\begin{cases} 3x > -5 \rightarrow x > -5/3 \\ x > 4 \end{cases} \rightarrow (4, +\infty)$

c) $\begin{cases} x > 17 \\ 5x > 19 \rightarrow x > 19/5 \end{cases} \rightarrow (17, +\infty)$

Pàgina 102

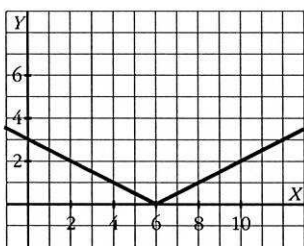
17. Representa:

$$y = |-x^2 + 4x + 5|$$



18. Representa gràficament:

$$y = \left| \frac{x}{2} - 3 \right|$$



Pàgina 107

Per practicar

Domini de definició

19. Indica si els valors de x : 0; -2; 3,5; $\sqrt{2}$; -0,25 pertanyen al domini d'aquestes funcions:

a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; b) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$; c) $y = x - \sqrt{2}$;

d) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; e) $y = \sqrt{x - 3}$;

f) $y = \sqrt{7 - 2x}$

a) 3,5; $\sqrt{2}$; b) Tots excepte -2; c) Tots; d) Tots; e) 3,5; f) Tots.

20. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \frac{3}{x^2 + x}$; b) $y = \frac{x}{(x - 2)^2}$

c) $y = \frac{x - 1}{2x + 1}$; d) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$

e) $y = \frac{2}{5x - x^2}$; f) $y = \frac{1}{x^2 - 2}$

a) $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$; b) $\mathbb{R} - \{2\}$; c) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$;

d) \mathbb{R} ; e) $\mathbb{R} - \{0, 5\}$; f) $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

21. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \sqrt{3 - x}$; b) $y = \sqrt{2x - 1}$

c) $y = \sqrt{-x - 2}$; d) $y = \sqrt{-3x}$

a) $(-\infty, 3]$; b) $[1/2, +\infty)$; c) $(-\infty, -2]$;

d) $(-\infty, 0]$

22. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$; b) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$

c) $y = \sqrt{12x - 2x^2}$; d) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$

e) $y = \frac{1}{\sqrt{4 - x}}$; f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x}}$

g) $y = \frac{-1}{x^3 - x^2}$; h) $y = \frac{2x}{x^4 - 1}$

a) $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = (-\infty, -3] \cup [3, +\infty)$

b) $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R}$

c) $12x - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x(6 - x) \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = [0, 6]$

d) $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 5) \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$

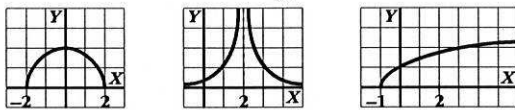
e) $4 - x > 0 \Rightarrow 4 > x \Rightarrow \text{Domini} = (-\infty, 4)$

f) $x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \Rightarrow \text{Domini} = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

FUNCIIONS ELEMENTALS

- g) $x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$
 h) $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1 \Rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

23. A partir de la gràfica d'aquestes funcions, indica quin és el domini de definició i el seu recorregut.



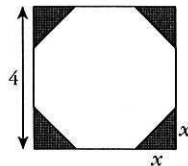
Els dominis són, per ordre: $[-2, 2]$; $(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ i $[-1, +\infty)$.
 Els recorreguts $[0, 2]$; $[0, +\infty)$ o $[0, +\infty)$.

24. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

- a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$; b) $y = \sqrt{x^2 + 3}$;
 c) $y = \sqrt{5 - x^2}$; d) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
 a) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$; b) \mathbb{R} ; c) $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$;
 d) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

25. D'un quadrat de 4 cm de costat, es tallen en els cantons triangles rectangles isòsceles els costats dels quals mesuren x .
 a) Escriu l'àrea de l'octàgon que en resulta en funció de x .

b) Quin és el domini d'aquesta funció?



- a) $A(x) = 16 - 2x^2$
 b) Domini: $(0, 2)$

26. Una empresa fabrica envasos en forma de prisma de dimensions x , $x/2$ i $2x$ cm.

a) Escriu la funció que dona el volum de l'envàs en funció de x .

b) Troba'n el domini sabent que l'envàs més gran té 1 l de volum. Quin és el seu recorregut?

a) $V(x) = x^3$

b) $(0, 10)$

Recorregut $(0, 1000)$

Funcions lineals. Interpolació

27. Digues quin és el pendent de cadascuna de les rectes següents:

a) $y = 2x - 5$; b) $2x - y + 1 = 0$;

c) $y = -x + 5$; d) $y = 5$

a) 2; b) 2; c) -1; d) 0

28. Escriu les equacions de les rectes següents:

a) Passa per $P(1, -5)$ i $Q(10, 11)$.

b) Passa per $(-7, 2)$ i el seu pendent és $-0,75$.

c) Talla els eixos en $(3,5, 0)$ i $(0, -5)$.

d) És paral·lela a la recta $3x - y + 1 = 0$ i passa per $(-2, -3)$.

a) $m = \frac{11 - (-5)}{10 - 1} = \frac{16}{9}$

$y = -5 + \frac{16}{9}(x - 1) = \frac{16}{9}x - \frac{61}{9}$

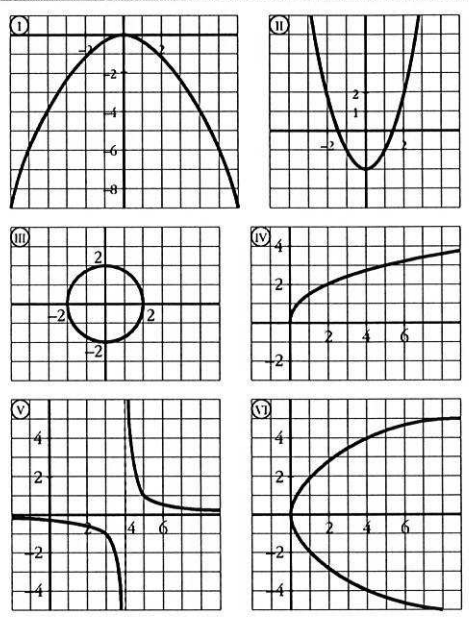
b) $y = 2 - 0,75(x + 7) = -0,75x - 3,25$

c) $\frac{x}{3,5} + \frac{y}{-5} = 1 \Rightarrow y = 1,43x - 5$

d) $m = 3$; $y = -3 + 3(x + 2) = 3x + 3$

29. Elegeix dos punts en cada una d'aquestes rectes i escriu-ne l'equació:

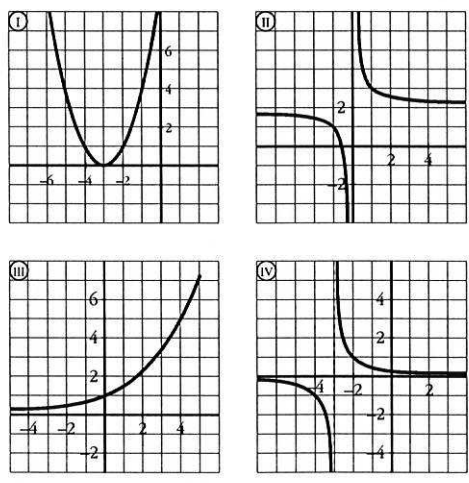
FUNCIIONS ELEMENTALS



a) IV; b) I; c) V; d) II
 III i VI no són funcions.

33. Associa amb cada una de les gràfiques una de les expressions analítiques següents:

- a) $y = \frac{1}{x} + 2$
- b) $y = \frac{1}{x+3}$
- c) $y = (x+3)^2$
- d) $y = \sqrt{x+2}$

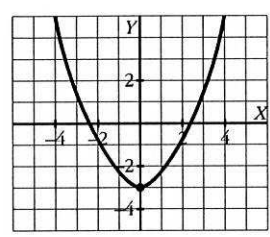


a) II; b) IV; c) I; d) III.

Representació de funcions elementals

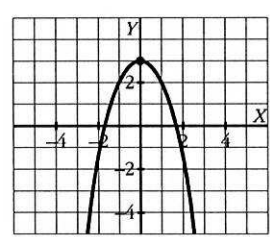
34. Representa gràficament les paràboles següents trobant el vèrtex, els punts de tall amb els eixos de coordenades i algun punt pròxim al vèrtex:

- a) $y = 0,5x^2 - 3$
- b) $y = -x^2 + 3$
- c) $y = 2x^2 - 4$
- d) $y = -\frac{3x^2}{2}$



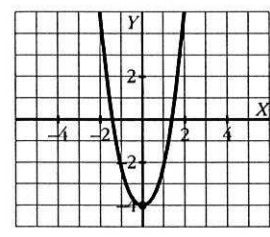
Vèrtex: (0, 3). Tall amb els eixos: $(-\sqrt{3}, 0)$, $(\sqrt{3}, 0)$, (0, 3)

b)



Vèrtex: (0, -4). Tall amb els eixos: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, -4)

c)



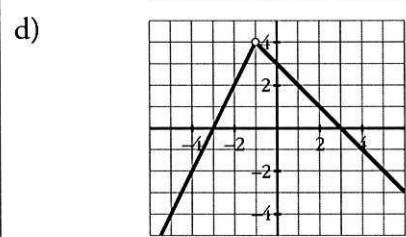
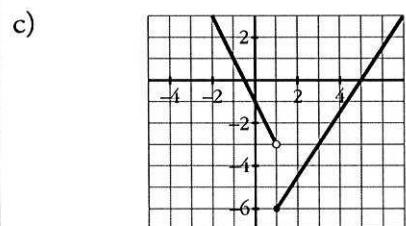
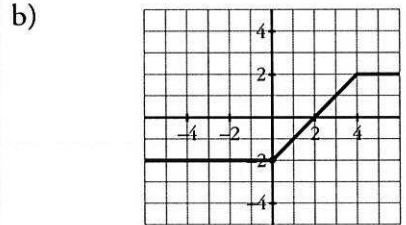
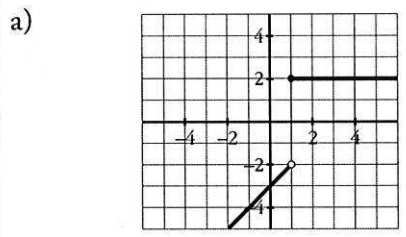
Vèrtex: (0, 0). Tall amb els eixos: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, 0)

FUNCIONS ELEMENTALS

Pàgina 109

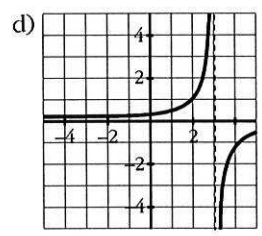
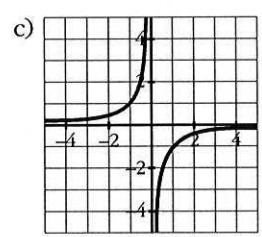
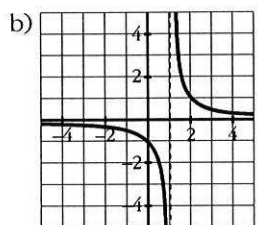
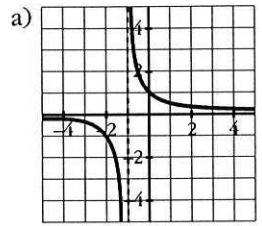
37. Representa gràficament les funcions següents:

- a) $y = \begin{cases} x - 3 & \text{si } x < 1 \\ 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
- b) $y = \begin{cases} -2 & \text{si } x < 0 \\ x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 4 \\ 2 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$
- c) $y = \begin{cases} -2x - 1 & \text{si } x < 1 \\ (3x - 15)/2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$
- d) $y = \begin{cases} 2x + 6 & \text{si } x < -1 \\ -x + 3 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$



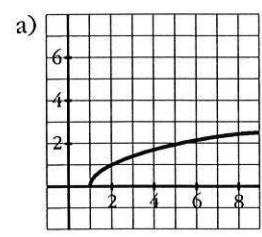
38. Representa les funcions següents:

- a) $y = \frac{1}{x+1}$
- b) $y = \frac{1}{x-1}$
- c) $y = \frac{-1}{x}$
- d) $y = \frac{-1}{x-3}$



39. Representa les funcions següents:

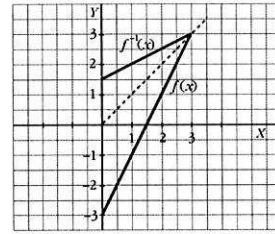
- a) $y = \sqrt{x-1}$
- b) $y = -\sqrt{x+3}$
- c) $y = 2 + \sqrt{x}$
- d) $y = 1 - \sqrt{x}$



Pàgina 125

Per practicar

Composició i funció inversa



6. A partir de les funcions $f(x) = x + 3$ i $g(x) = \frac{5x}{2}$, calcula:

- a) $f[g(2)]$ b) $g[f(-1)]$
c) $f[g(x)]$ d) $g[f(x)]$

a) $f[g(2)] = \frac{5 \cdot 2}{2} + 3 = 8$

b) $g[f(-1)] = \frac{5(-1+3)}{2} = 5$

c) $f[g(x)] = \frac{5x}{2} + 3$

d) $g[f(x)] = \frac{5(x+3)}{2}$

7. Si $f(x) = 2x + 3$ i $g(x) = x^2 - 2x$ obtén l'expressió de les funcions següents:

- a) $f \circ g$ b) $g \circ f$ c) $f \circ f$ d) $g \circ g$

a) $f \circ g = 2(x^2 - 2x) + 3 = 2x^2 - 4x + 3$

b) $g \circ f = (2x + 3)^2 - 2(2x + 3) =$
 $= 4x^2 + 9 + 12x - 4x - 6 =$
 $= 4x^2 + 8x + 3$

c) $f \circ f = 2(2x + 3) + 3 =$
 $= 4x + 6 + 3 = 4x + 9$

d) $g \circ g = (x^2 - 2x)^2 - 2(x^2 - 2x) =$
 $= x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 2x^2 + 4x =$
 $= x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 4x$

8. Quina és la funció inversa de $f(x) = 2x - 3$?

Representa $f(x)$ i $f^{-1}(x)$ en els mateixos eixos coordenats i comprova la seva simetria respecte a la bisectriu del primer quadrant.

$$f^{-1}(x) = \frac{x+3}{2}$$

9. Considera les funcions f i g definides per les expressions: $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = \frac{1}{x}$.

Calcula:

- a) $(f \circ g)(2)$; b) $(g \circ f)(-3)$; c) $(g \circ g)(x)$; d) $(f \circ g)(x)$

a) $\frac{5}{4}$; b) $\frac{1}{10}$; c) $g(g(x)) = x$;

d) $f(g(x)) = \frac{1+x^2}{x^2}$

10. A partir de les funcions $f(x) = 3x + 2$ i $g(x) = \sqrt{x}$, calcula:

- a) $(f \circ g)(x)$; b) $(g \circ f)(x)$; c) $(g \circ g)(x)$

a) $(f \circ g)(x) = 3\sqrt{x} + 2$

b) $(g \circ f)(x) = \sqrt{3x+2}$

c) $(g \circ g)(x) = \sqrt[4]{x}$

11. Amb les funcions $f(x) = \frac{1}{x^2}$ i $g(x) = x - 2$, hem obtingut per composició

les funcions $p(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$ i $q(x) = \frac{1}{x^2} - 2$.

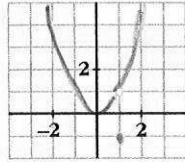
Indica quina d'aquestes expressions correspon a $f \circ g$ i quina a $g \circ f$.

$$p(x) = \frac{1}{(x-2)^2} \Rightarrow f \circ g$$

$$q(x) = \frac{1}{x^2} - 2 \Rightarrow g \circ f$$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

c) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \neq 1 \\ -1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$



a) Contínua; b) Discontínua; c) Discontínua.

27. Comprova si la funció:

$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ és contínua en $x = 0$.

Recorda que, perquè f sigui contínua en $x = 0$, ha de verificar-se que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - 1) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 1) = -1$
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$

És contínua en $x = 0$

28. Comprova si les funcions següents són contínues en els punts que s'hi indiquen:

a) $f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

a) No, perquè no existeix $f(-1)$.

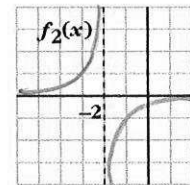
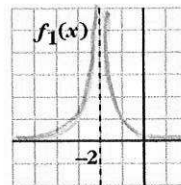
b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (2-x^2) = -2$. Sí és contínua en $x = 2$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$. No és contínua en $x = 1$.

Pàgina 152

Visió gràfica del límit

29.



Aquestes són, respectivament, les gràfiques de les funcions:

$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2}$ i $f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$

Quin és el límit de cada una d'aquestes funcions quan $x \rightarrow -2$?

Observa la funció quan $x \rightarrow -2$ per l'esquerra i per la dreta.

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f_1(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f_1(x) = +\infty$

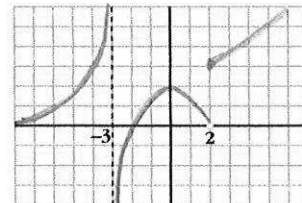
$\lim_{x \rightarrow -2} f_1(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f_2(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = -\infty$

No existeix $\lim_{x \rightarrow -2} f_2(x)$

30. Sobre la gràfica de la funció $f(x)$, troba:



a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; e) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$; f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$;

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; h) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

- a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 2; d) 0; e) 0; f) 3; g) $+\infty$;
h) 0

Límit en un punt

31. Calcula els límits següents:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$;
c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$;
e) $\lim_{x \rightarrow -2} \sqrt{10+x-x^2}$; f) $\lim_{x \rightarrow 4} \log_2 x$;
g) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x$; h) $\lim_{x \rightarrow 2} e^x$
a) 5; b) 0; c) -2; d) $\sqrt{2}$; e) 2; f) 2; g) 1;
h) e^2

32. Donada la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}, \text{ troba:}$$

- a) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

Perquè hi hagi límit en el punt de ruptura, els límits laterals han de ser iguals.

$$\begin{aligned} \text{a) } 5; \text{ b) } 4; \text{ c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 \end{aligned}$$

33. Calcula els límits següents:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x^2 - 2x}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 + 3x}{x}$
c) $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{3b^3 - 2b^2}{b}$ d) $\lim_{b \rightarrow 0} \frac{b^2 - 7b}{4b}$

Treu-ne factor comú i simplifica cada fracció.

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x}{x(x-2)} = -2;$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(2x+3)}{x} = 3;$

c) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2(3h-2)}{h} = 0;$

d) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(h-7)}{4h} = -\frac{7}{4}$

34. Resol els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + x}$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x+2}{x^2 - 4}$ d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x+3}{x^2 + 4x + 3}$ f) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 1}{x^2 - 1}$

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x+1)(x^2 - x + 1)}{x(x+1)} = -3$

c) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(x+2)}{(x+2)(x-2)} = -\frac{1}{4}$

d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+1)(x-2)}{(x-2)} = 3$

e) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)}{(x+3)(x+1)} = -\frac{1}{2}$

f) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x-1)(x^3 - x^2 + x + 1)}{(x-1)(x+1)} = 2$

35. Calcula el límit de la funció

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2 + x} \text{ en } x = 3, x = 0 \text{ i } x = -1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \frac{3}{4} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

Límit quan $x \rightarrow +\infty$ o $x \rightarrow -\infty$

36. Calcula els límits següents i representa la informació que n'obtinguis:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 \right)$ d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 - x)^2$

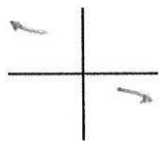
Vegeu solució en l'exercici 37.

37. Calcula el límit de les funcions de l'exercici anterior quan $x \rightarrow -\infty$ i representa la informació que n'obtinguis.

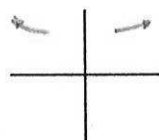
Resolució dels exercicis 36 i 37:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (7 + x - x^3) = -\infty;$

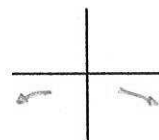
$\lim_{x \rightarrow -\infty} (7 + x - x^3) = +\infty$



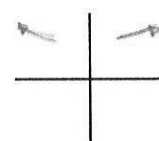
b) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 - 10x - 32}{5} = +\infty$



c) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^4}{3} + \frac{x}{2} - 17 = -\infty$



d) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (7 - x)^2 = +\infty$

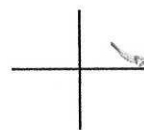


38. Comprova, donant valors grans a x , que les funcions següents tendeixen a 0 quan $x \rightarrow +\infty$.

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 10}$ b) $f(x) = \frac{100}{3x^2}$

c) $f(x) = \frac{-7}{\sqrt{x}}$ d) $f(x) = \frac{2}{10x^2 - x^3}$

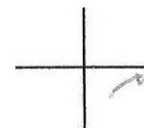
a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$



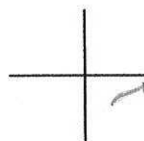
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$



c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0;$



d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



39. Calcula el límit quan $x \rightarrow +\infty$ i quan $x \rightarrow -\infty$ de cada una de les funcions següents. Representa el resultat que n'obtinguis.

a) $f(x) = x^3 - 10x$ b) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

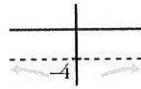
c) $f(x) = \frac{3 - x}{2}$ d) $f(x) = \frac{x^2 - 2x}{-3}$

LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$;

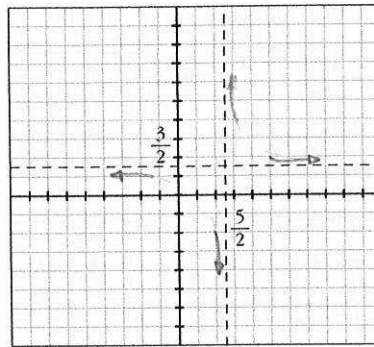


d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -4$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -4$



b) Asímtota vertical $x = \frac{5}{2}$

Asímtota horitzontal $y = \frac{3}{2}$



Asímtotes

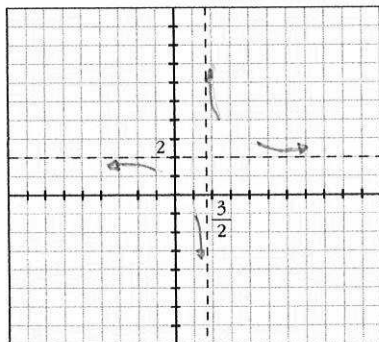
44. Troba les asímtotes de les funcions següents i situa-hi la corba respecte a aquestes:

a) $y = \frac{4x + 1}{2x - 3}$ b) $y = \frac{3x}{2x - 5}$

c) $y = \frac{2x + 3}{4 - x}$ d) $y = \frac{2}{1 - x}$

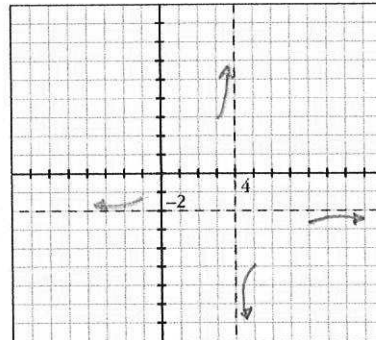
a) Asímtota vertical $x = \frac{3}{2}$

Asímtota horitzontal $y = 2$



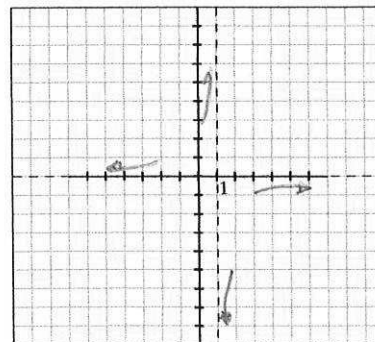
c) Asímtota vertical $x = 4$

Asímtota horitzontal $y = -2$



d) Asímtota vertical $x = 1$

Asímtota horitzontal $y = 0$



INICIACIÓ AL CÀLCUL DE DERIVADES. APLICACIONS

Regles de derivació

Troba la funció derivada d'aquestes funcions i calcula'n el valor en els punts que s'indiquen:

48. $y = 2x^3 + 3x^2 - 6$; $x = 1$
 $y' = 6x^2 + 6x$; $y'(1) = 12$

49. $y = \cos(2x + \pi)$; $x = 0$
 $y' = -2 \sin(2x + \pi)$; $y'(0) = 0$

50. $y = \frac{x}{3} + \sqrt{2}$; $x = -\frac{17}{3}$

$$y' = \frac{1}{3}; y'\left(-\frac{17}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

51. $y = \frac{1}{7x+1}$; $x = 0$

$$y' = \frac{-7}{(7x+1)^2}; y'(0) = -7$$

52. $y = \sin \frac{x}{2} + \cos \frac{x}{2}$; $x = \pi$

$$y' = \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \sin \frac{x}{2} \right); y'(\pi) = -\frac{1}{2}$$

53. $y = \frac{2}{(x+3)^3}$; $x = -1$

$$y' = \frac{-4}{(x+3)^3}; y'(-1) = -\frac{1}{2}$$

54. $y = \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 - \frac{x}{2}$; $x = 2$

$$y' = \frac{3}{2}x^2 + 3x - \frac{1}{2}; y'(2) = \frac{23}{2}$$

Pàgina 177

55. $y = \frac{1}{\sqrt{x-4}}$; $x = 8$

$$y' = \frac{-1}{2\sqrt{(x-4)^3}}; y'(8) = -\frac{1}{16}$$

56. $y = x \sin(\pi - x)$; $x = \frac{\pi}{2}$

$$y' = \sin(\pi - x) - x \cos(\pi - x); y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

57. $y = (5x - 2)^3$; $x = \frac{1}{5}$

$$y' = 15(5x - 2)^2; y'\left(\frac{1}{5}\right) = 15$$

58. $y = \frac{x+5}{x-5}$; $x = 3$

$$y' = \frac{-10}{(x-5)^2}; y'(3) = -\frac{5}{2}$$

Troba la funció derivada d'aquestes funcions:

59. a) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$ b) $y = (x^2 - 3)^3$

a) $y' = \frac{e^x}{2} - e^{-2x}$ b) $y' = 6x(x^2 - 3)^2$

60. a) $y = \frac{x^3 - x^2}{x^2}$; b) $y = \sqrt{x^2 + 1}$

a) $y' = 1$ (si $x \neq 0$); b) $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

61. a) $y = \sqrt[3]{(x+6)^2}$; b) $y = \sqrt{\sin x}$

a) $y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{(x+6)^2}}$; b) $y' = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$

62. a) $y = \frac{-3}{\sqrt{1-x^2}}$; b) $y = 7^{x+1} \cdot e^{-x}$

a) $y = -3(1-x^2)^{-1/2}$

$$y' = \frac{3}{2}(1-x^2)^{-3/2} \cdot (-2x) = \frac{-3x}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$$

b) $y = 7^{x+1} \cdot e^{-x}$

$$y' = 7^{x+1} \cdot \ln 7 \cdot e^{-x} + 7^{x+1} \cdot (-e^{-x})$$

$$y' = 7^{x+1} \cdot e^{-x} (\ln 7 - 1)$$

INICIACIÓ AL CÀLCUL DE DERIVADES. APLICACIONS

$$b) y' = \frac{-\frac{2}{(1+x)^2}}{1 + \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}$$

Punts en els quals la derivada val k

73. Troba els punts en què la derivada és igual a 0 en les funcions següents:

a) $y = 3x^2 - 2x + 1$ b) $y = x^3 - 3x$

a) $y' = 6x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{3}$. Punt $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$

b) $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 1$.

Punts $(-1, 2)$ i $(1, -2)$

74. Obtén els punts en què $f'(x) = 1$ en els casos següents:

a) $f(x) = x^2 - 3x + 2$ b) $f(x) = \frac{x+1}{x+5}$

a) $f'(x) = 2x - 3 = 1$

$x = 2$; punt $(2, 0)$

b) $f'(x) = \frac{4}{(x+5)^2} = 1 \rightarrow x = -7$ i $x = -3$

Per tant, $(-7, 3)$ i $(-3, -1)$

75. Troba els punts en els quals la derivada de cada una de les funcions següents és igual a 2:

a) $y = x^2 - 2x$ b) $y = \frac{x}{x+2}$

c) $y = 4\sqrt{x+3}$ d) $y = \ln(4x-1)$

a) $y' = 2x - 2 = 2 \rightarrow x = 2$ per tant $(2, 0)$

b) $y' = \frac{2}{(x+2)^2} = 2 \rightarrow x = -1$ i $x = 3$

per tant, $(-1, -1)$ i $(3, 3)$

c) $y' = \frac{4}{2\sqrt{x+3}} = 2 \rightarrow x = -2$

per tant, $(-2, 4)$

d) $y' = \frac{4}{4x-1} = 2 \rightarrow x = \frac{3}{4}$

per tant $\left(\frac{3}{4}, \ln^2\right)$

76. Troba els punts en els quals la derivada val 0 en cada un dels casos següents:

a) $y = 2x^2 - 8x + 5$ b) $y = -x^2 + 5x$

c) $y = x^4 - 4x^2$ d) $y = \frac{1}{x^2 + 1}$

a) $y' = 4x - 8 = 0 \rightarrow x = 2$; per tant, $(2, -3)$

b) $y' = -2x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{5}{2}$

per tant, $\left(\frac{5}{2}, \frac{25}{4}\right)$

c) $y' = 4x^3 - 8x = 0 \rightarrow x = 0$; $x = +\sqrt{2}$; $x = -\sqrt{2}$;

per tant, $(0, 0)$; $(\sqrt{2}, -4)$ i $(-\sqrt{2}, -4)$

d) $y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

per tant, $(0, 1)$

Recta tangent

77. Troba l'equació de la recta tangent a la corba $y = x^2 - 5x + 6$ en el punt d'abscissa $x = 2$.

$y' = 2x - 5$; $m = y'(2) = -1$, $y(2) = 0$

La recta és $y = -(x - 2) = 2 - x$.

78. Escriu l'equació de la recta tangent a $y = -x^2 + 2x + 5$ en el punt d'abscissa $x = -1$.

$y' = -2x + 2$; $m = y'(-1) = 4$, $y(-1) = 2$

La recta és $y = 4(x + 1) + 2 = 4x + 6$.

79. Escriu l'equació de la recta tangent a $y = x^2 + 4x + 1$, el pendent de la qual sigui igual a 2.

$y' = 2x + 4 = 2 \Rightarrow x = -1$; $y(-1) = -2$

La recta és $y = 2(x + 1) - 2 = 2x$.

INICIACIÓ AL CÀLCUL DE DERIVADES. APLICACIONS

80. Troba l'equació de la recta tangent a la corba $y = \sqrt{x+1}$ en $x = 0$.

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}; m = y'(0) = \frac{1}{2}, y(0) = 1$$

$$\text{La recta és } y = \frac{1}{2}x + 1$$

Punts singulars

81. Obtén els punts singulars de les funcions següents:

a) $y = 3x^2 - 2x + 5$ b) $y = 2x^3 - 3x^2 + 1$

c) $y = x^4 - 4x^3$ d) $y = x^3 - 12x$

a) $y' = 6x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{1}{3}$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{3} \rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{14}{3}\right)$$

b) $y' = 6x^2 - 6x = 0 \rightarrow x = 0$ i $x = 1$

$f(0) = 1$ i $f(1) = 0$, per tant, $(0, 1)$ i $(1, 0)$

c) $y' = 4x^3 - 12x^2 = 0 \rightarrow x = 0$ i $x = 3$

$f(0) = 0$ i $f(3) = -27$

per tant, $(0, 0)$ i $(3, -27)$

d) $y' = 3x^2 - 12 = 0 \rightarrow x = 2$ i $x = -2$

$f(2) = -16$ i $f(-2) = 16$

per tant $(2, -16)$ i $(-2, 16)$

82. Troba els punts singulars de les funcions següents:

a) $y = \frac{x^2 + 1}{x}$ b) $y = \frac{2x^2}{x^2 + 1}$

a) $y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x = 1$ i $x = -1$

$f(1) = 2$ i $f(-1) = -2$

per tant, $(1, 2)$ i $(-1, -2)$

b) $y' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} = 0 \rightarrow x = 0$

$f(0) = 0$; per tant, $(0, 0)$

Pàgina 178

83. Comprova que les funcions següents no tenen punts singulars:

a) $y = x^3 + 3x$ b) $y = \frac{1}{x}$

c) $y = \sqrt{x}$ d) $y = \ln x$

a) $y' = 3x^2 + 3 = 0 \rightarrow x^2 \neq -1 \rightarrow$
 \rightarrow no és possible

b) $y' = \frac{-1}{x^2} = 0 \rightarrow -1 \neq 0 \rightarrow$
 \rightarrow no és possible

c) $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = 0 \rightarrow 1 \neq 0 \rightarrow$
 \rightarrow no és possible

d) $y' = \frac{1}{x} = 0 \rightarrow 1 \neq 0 \rightarrow$
 \rightarrow no és possible

Creixement i decreixement

84. Observa els resultats obtinguts en els exercicis del 48 al 58 i digues si cada una de les funcions donades és creixent o decreixent en el punt que s'indica.

48) creixent; 49) és màxim o mínim; 50) creixent; 51) decreixent; 52) decreixent; 53) decreixent; 54) creixent; 55) decreixent; 56) creixent; 57) creixent; 58) decreixent.

85. Obtén els intervals de creixement i decreixement de cada una de les funcions següents:

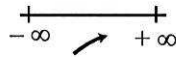
a) $y = \frac{3x+1}{2}$ b) $y = 5 - 2x$

c) $y = x^2 - 3x + 2$ d) $y = 2x - x^2$

e) $y = x^3$ f) $y = x^3 - 3x$

INICIACIÓ AL CÀLCUL DE DERIVADES. APLICACIONS

a) $y' = \frac{3}{2} \rightarrow$ és creixent per $(-\infty, \infty)$



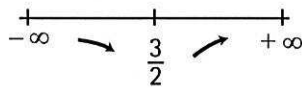
b) $y' = -2 \rightarrow$ és decreixent en l'interval $(-\infty, \infty)$



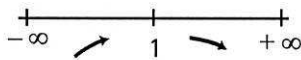
c) $y' = 2x - 3 = 0 \rightarrow x = \frac{3}{2}$;

creixent per $(\frac{3}{2}, +\infty)$ i

decreixent per $(-\infty, \frac{3}{2})$



d) $y' = 2 - 2x = 0 \rightarrow x = 1$
creixent per $(-\infty, 1)$ i decreixent per $(1, +\infty)$



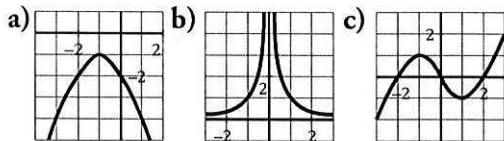
e) $y' = 3x^2$
creixent en tot el seu domini $(+\infty, -\infty)$



f) $y' = 3x^2 - 3 = 0 \rightarrow x = +1$ i $x = -1$



86. Indica en cada una d'aquestes funcions els valors de x en els quals f' és positiva i aquells en els quals f' és negativa.



Observa'n el creixement i el decreixement.
La primera creix si $x < -1$.

a) $f' > 0$ si $x < -1$

$f' < 0$ si $x > -1$

b) $f' > 0$ si $x < 0$

$f' < 0$ si $x > 0$

c) $f' > 0$ si $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

$f' < 0$ si $x \in (-1, 1)$

87. Donada la funció $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$, obtén-ne la funció derivada i estudia'n el signe. Quins són els intervals de creixement i de decreixement de f ? Té f màxim o mínim?

$$f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x^2 - 4x + 3) = 3(x - 1)(x - 3)$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$$

$f'(x) > 0$ en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty) \rightarrow$ Intervals de creixement

$f'(x) < 0$ en $(1, 3) \rightarrow$ Interval de decreixement

Màxim en $(1, 8)$ i mínim en $(3, 4)$.

Gràfiques de funcions polinòmiques i racionals

88. Representa una funció $y = f(x)$ de la qual sabem:

- És contínua;

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$;

- Té tangent horitzontal en $(-3, 2)$ i en $(1, 5)$.

Indica si els punts de tangent horitzontal són màxims o mínims.

INICIACIÓ AL CÀLCUL DE DERIVADES. APLICACIONS

$$c) y = \ln x e^{-x} \quad d) y = \log \frac{(3x-5)^3}{x}$$

$$e) y = \log (\operatorname{tg} x)^2 \quad f) y = \ln x^x$$

$$a) y = \ln (x^2 + 1) - \ln (x^2 - 1)$$

$$y' = \frac{2x}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2-1} = \frac{2x^3-2x-2x^3-2x}{x^4-1} = \\ = \frac{-4x}{x^4-1}$$

$$b) y = \frac{1}{2} [\ln x - \ln (x^2 + 1)]$$

$$y' = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{x} - \frac{2x}{x^2+1} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{x^2+1-2x^2}{x^3+x} \right] = \\ = \frac{1-x^2}{2x^3+2x}$$

$$c) y = \ln x + \ln e^{-x} = \ln x - x$$

$$y' = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$$

$$d) y = 3 \log (3x-5) - \log x$$

$$y' = 3 \cdot \frac{3}{3x-5} \cdot \frac{1}{\ln 10} - \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\ln 10} = \\ = \frac{1}{\ln 10} \left[\frac{9}{3x-5} - \frac{1}{x} \right] = \frac{1}{\ln 10} \cdot \\ \cdot \frac{9x-3x+5}{(3x^2-5x)} = \frac{6x+5}{(3x^2-5x) \ln 10}$$

$$e) y = 2 \log (\operatorname{tg} x)$$

$$y' = 2 \cdot \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\ln 10} = \frac{2(1+\operatorname{tg}^2 x)}{\operatorname{tg} x \cdot \ln 10}$$

$$f) y = x \ln x$$

$$y' = \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

105. Troba els punts singulars de cada una de les funcions següents, i, amb ajuda de les branques infinites, decideix si són màxims o mínims.

Representa-les.

$$a) y = x^3 - 3x^2$$

$$b) y = x^3 - 3x + 2$$

$$c) y = x^4 + 4x^3$$

$$d) y = x^3 - 9x^2 + 24x - 20$$

$$e) y = 12x - x^3$$

$$f) y = -x^4 + x^2$$

$$g) y = x^5 - 6x^3 - 8x - 1$$

$$h) y = x^4 - 8x^2 + 2$$

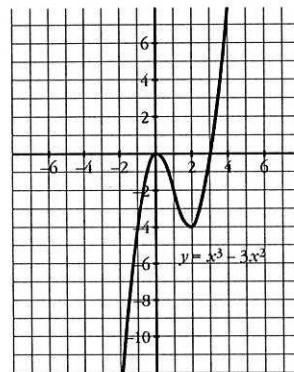
$$a) y' = 3x^2 - 6x$$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 6x = 0$$

$$\begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = 2 \rightarrow f(2) = -4 \rightarrow (2, -4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x^2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x^2) = +\infty$$



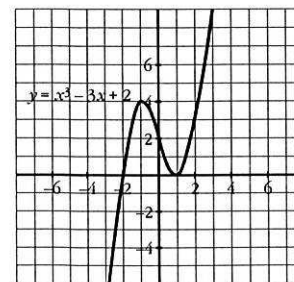
$$b) y' = 3x^2 - 3$$

$$y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$\begin{cases} f(1) = 0 \rightarrow (1, 0) \\ f(-1) = 4 \rightarrow (-1, 4) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 3x + 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 3x + 2) = +\infty$$



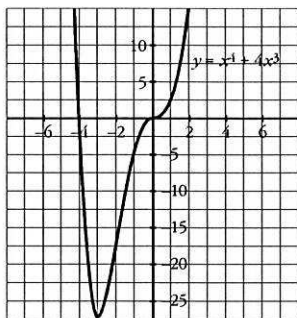
INICIACIÓ AL CÀLCUL DE DERIVADES. APLICACIONS

c) $y' = 4x^3 + 12x^2$

$y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -3 \rightarrow f(-3) = -27 \rightarrow (-3, -27) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^4 + 4x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^4 + 4x^3) = +\infty$$



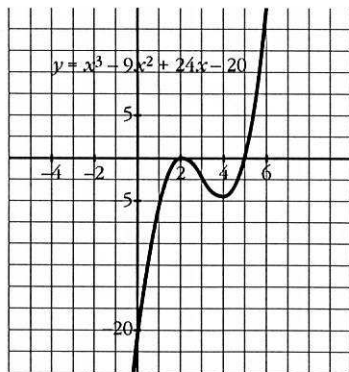
d) $y' = 3x^2 - 18x + 24$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} 4 \\ 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(4) = -4 \rightarrow (4, -4) \\ f(2) = 0 \rightarrow (2, 0) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 9x + 24x - 20) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - 9x^2 + 24x - 20) = +\infty$$



e) $y' = 12 - 3x^2$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm 2$

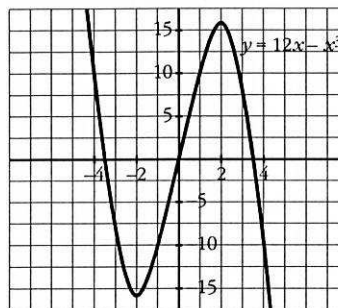
$$\begin{cases} f(2) = 16 \rightarrow (2, 16) \\ f(-2) = -16 \rightarrow (-2, -16) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (12x - x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (12x - x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (12x - x^3) = +\infty$$

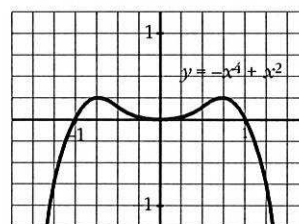
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (12x - x^3) = -\infty$$



f) $y'(x) = -4x^3 + 2x$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow f(0) = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right) \\ x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{1}{4} \rightarrow \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{4}\right) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4 + x^2) = -\infty$$



g) $y' = 5x^4 - 18x^2 - 8$; $y'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \rightarrow f(2) = -33 \rightarrow (2, -33) \\ x = -2 \rightarrow f(-2) = 31 \rightarrow (-2, 31) \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^5 - 6x^3 - 8x - 1) = +\infty$$

