

TREBALL DE CONSOLIDACIÓ DE LA MATÈRIA DE MATEMÀTIQUES

1r de Batxillerat
Ciències i tecnologia

INS EL CASTELL

EXERCICIS I PROBLEMES DE MATEMÀTIQUES

1r curs de Batxillerat.

Aquest dossier conté les solucions d'una selecció d'exercicis dels diferents temes del llibre que hem treballat: *Matemàtiques 1, Ed. Barcanova*.

No es tracta de fer tots els exercicis, però, si és convenient **repassar totes les unitats**. Cadascú pot fer, alhora, la seva col·lecció personal. Molts d'aquests exercicis s'han treballat a classe. Així, us podeu ajudar amb els apunts.

LA NUMERACIÓ DE LES UNITATS ES CORRESPON A L'ORDENACIÓ DEL LLIBRE.

A la **primera setmana d'octubre** es farà una **prova** dels continguts bàsics de primer de Batxillerat. Aquesta prova suposarà un **10%** de la qualificació del primer trimestre.

Aquest recull d'exercicis és, també, una **guia d'estudi per l'alumnat que té les Matemàtiques de primer curs pendents** per preparar l'examen de recuperació de la convocatòria extraordinària de setembre. No oblideu les orientacions detallades que hi ha al Moodle..

Naturalment, el que queda d'aquest curs i durant les primeres setmanes del proper estaré a la vostra disposició per resoldre tots els dubtes que pugueu tenir.

Que passeu un bon estiu!

Relació d'exercicis

UNITAT 1: NOMBRES REALS

- **Radicals:** del 46 al 51 de la pàg. 35, del 62 al 66 de la pàg. 36
- **Notació científica:** del 70 al 73 de la pàg. 37
- **Intervals:** 74, 75 i 76 de la pàg. 37
- **Logaritmes:** del 87 al 90 de la pàg. 38
- **Nombres complexos:** 115, 116 pàg. 39

UNITAT 3: ÀLGEBRA

- **Factorització:** 33, 35 de la pàg. 84.
- **Fracions algebraiques:** 36, 37 de la pàg. 85
- **Equacions amb radicals:** 32 de la pàg. 84
- **Equacions exponencials i logarítmiques:** del 40 al 43 de la pàg. 85
- **Sistemes:** 45 de la pàg. 86
- **Inequacions. Interpretació solucions:** 55, 56, 57 de la pàg. 87

UNITAT 4: RESOLUCIÓ DE TRIANGLES

- **Relació entre les RT:** 17, 18 de la pàg. 107, 39, 41, 42 de la pàg. 116

UNITAT 5: FUNCIONS I FÓRMULES TRIGONOMÈTRIQUES

- **Angles en radians:** del 31 al 34 de la pàg. 136

UNITAT 6: VECTORS

- **Coordenades i combinació lineal:** del 16 al 19 de la pàg. 159
- **Producte escalar:** 25, 26 i 27 de la pàg. 159

UNITAT 7: GEOMETRIA ANALÍTICA

- **Equacions de la recta:** 22, 23, 24, 25 de la pàg. 181
- **Posició relativa de rectes:** 35 de la pàg. 181
- **Coordenades de punts:** 30, 31 i 32 de la pàg. 181
- **Aplicacions (distàncies i àrees):** 45, 46 de la pàg. 182

UNITAT 9: LES FUNCIONS ELEMENTALS

- **Gràfics, domini i transformacions:** 23, 24, 25, 27, 30 al 33 de la pàg. 244
- **Representacions de funcions elementals:** 37, 38 de la pàg. 245.
- **Composició i funció inversa:** 43, 45 pàg. 246

UNITAT 10: LÍMITS DE FUNCIONS. CONTINUÏTAT I BRANQUES INFINITES.

- **Continuïtat:** 27, 28 de la pàg. 275
- **Visió gràfica del límit:** 29 i 30 de la pàg. 276

NOMBRES REALS I NOMBRES COMPLEXOS

46. Expressa els radicals següents, per mitjà de potències d'exponent fraccionari, i simplifica:

a) $\sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a}$ b) $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}}$

a) $a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9}$

b) $\frac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x}$

c) $a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}}$

47. Resol, sense utilitzar la calculadora:

a) $\sqrt[5]{32}$ b) $\sqrt[3]{343}$ c) $\sqrt[4]{625}$

d) $\sqrt{0,25}$ e) $\sqrt[3]{8^4}$ f) $\sqrt[3]{0,001}$

a) $\sqrt[5]{2^5} = 2$; b) $\sqrt[3]{7^3} = 7$; c) $\sqrt[4]{5^4} = 5$

d) $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5$; e) $\sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16$;

f) $\sqrt[3]{0,1^3} = 0,1$

48. Expressa com a potència de base 2:

a) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ b) $(-32)^{1/5}$ c) $(\sqrt[8]{2})^4$

a) $2^{-1/2}$; b) $(-2^5)^{1/5} = -2$; c) $2^{4/8} = 2^{1/2}$

49. Calcula fent servir potències de base 2, 3 i 5:

a) $4 \cdot \frac{1}{3} \left(-\frac{3}{2}\right)^3$ b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{8}$

c) $\frac{(-5)^3(-8)^3(-9)^2}{15^2 \cdot 20^4}$ d) $\frac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3}$

a) $2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-3^2}{2} = \frac{-9}{2}$

b) $\frac{1}{2^4} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3^2}{2^8} = \frac{9}{256}$

c) $\frac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \frac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} =$

$$= \frac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \frac{18}{125}$$

d) $\frac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\frac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \frac{-3}{400}$

50. Expressa en forma de potència, efectua les operacions i simplifica:

a) $\frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}}$ b) $16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}}$

a) $\frac{a^{3/4} \cdot a^{-1}}{a \cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{7}}$

b) $(2^4)^{1/4} \cdot (2^2)^{-1/3} \cdot (2^2)^{-1/6} = 2 \cdot 2^{-2/3} \cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1$

51. Justifica les igualtats que són veritables. Escriu el resultat correcte en les falses:

a) $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = 1$; b) $(3^{-2})^{-3} \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 1$

c) $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{8}{15}$; d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = \frac{80}{9}$

a) Falsa. $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = \frac{a^4}{b^4}$

b) Vertadera. $(3^{-2})^{-3} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 3^6 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 = 3^6 \cdot \frac{1}{3^6} = \frac{3^6}{3^6} = 1$

c) Vertadera. $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{(1/3^2) - (1/5^2)}{1/3 - 1/5} = \frac{(1/3 - 1/5)(1/3 + 1/5)}{(1/3 - 1/5)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

d) Vertadera. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = 3^2 - \frac{1}{(-3)^2} = 3^2 - \frac{1}{3^2} = 9 - \frac{1}{9} = \frac{81-1}{9} = \frac{80}{9}$

NOMBRES REALS I NOMBRES COMPLEXOS

$$= \frac{3 - \sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad \frac{\sqrt{2^3 \cdot 3^2} + 3\sqrt{2^5} - \sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}} &= \frac{3\sqrt{8} + 6\sqrt{8} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \\ &= \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 8 \end{aligned}$$

62. Calcula i simplifica:

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$;

b) $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$;

c) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24}$;

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} = -20\sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{6}$

d) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

63. Simplifica al màxim les expressions següents:

a) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $7\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $3\sqrt[3]{2^4} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 4\sqrt[3]{2} =$
 $= 6\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} =$
 $= \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{-53}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $7\sqrt[3]{3^4 \cdot a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} =$

$$= 21\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{106}{5} - 2a\right)\sqrt[3]{3a}$$

64. Efectua i simplifica:

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{6} + \sqrt{5}) 2\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$

d) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$

e) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot$

$\cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}) =$

$= 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{12} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$

c) $5 - 6 = -1$

d) $20 + 18 - 12\sqrt{10} = 38 - 12\sqrt{10}$

e) $(2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

65. Racionalitza i simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$ b) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{1}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}$ d) $\frac{3}{\sqrt{5} - 2}$

e) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3}$ f) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$

a) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} =$

$$= \frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6} - 2}{3 \cdot 2} = \frac{2(\sqrt{6} - 1)}{3 \cdot 2}$$

NOMBRES REALS I NOMBRES COMPLEXOS

$$= \frac{\sqrt{6} - 1}{3}$$

$$\text{b) } \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 + \sqrt{6}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{c) } \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2(3 - 5)} =$$

$$= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{-4} = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4}$$

$$\text{d) } \frac{3(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} = \frac{3(\sqrt{5} + 2)}{5 - 4} =$$

$$= 3(\sqrt{5} + 2) = 3\sqrt{5} + 6$$

$$\text{e) } \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{(2\sqrt{5} + 3)(2\sqrt{5} - 3)} = \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{20 - 9} =$$

$$= \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{11} = 2\sqrt{5} - 3$$

$$\text{f) } \frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} - 2)}{(3\sqrt{3} + 2)(3\sqrt{3} - 2)} =$$

$$= \frac{9\sqrt{18} - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{27 - 4} =$$

$$= \frac{9\sqrt{2} \cdot 3^2 - 4\sqrt{2}}{23} = \frac{27\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{23} =$$

$$= \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}$$

66. Efectua i simplifica:

$$\text{a) } \frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\text{b) } \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$$

$$\text{a) } \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + 5\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \frac{(\sqrt{7} + \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7} - \sqrt{5})^2}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} =$$

$$= \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{7} - \sqrt{5})}{7 - 5} =$$

$$= \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{7} - \sqrt{5})}{7 - 5} =$$

$$= \frac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35}$$

Pàgina 37

67. Opera i simplifica:

$$\frac{1}{1 - \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}}} + \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{1 - \sqrt{3}}}$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{3} - \sqrt{3}} + \frac{1}{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3}} =$$

$$= 1 + \sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} = 2$$

Notació científica

68. Efectua i dóna el resultat en notació científica amb tres xifres significatives:

$$\text{a) } \frac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4}) 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$$

$$\text{b) } \frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$$

NOMBRES REALS I NOMBRES COMPLEXOS

$$c) \frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$$

$$a) 1,41 \cdot 10^2; b) -1,58 \cdot 10^5; c) -2,65 \cdot 10^6.$$

69. Ordena de major a menor els nombres de cada apartat. Per a això, passa a notació científica els que no ho estiguin.

$$a) 3,27 \cdot 10^{13}; 85,7 \cdot 10^{12}; 453 \cdot 10^{11}.$$

$$b) 1,19 \cdot 10^{-9}; 0,05 \cdot 10^{-7}; 2\ 000 \cdot 10^{-12}.$$

$$a) 8,57 \cdot 10^{13} > 4,53 \cdot 10^{13} > 3,27 \cdot 10^{13}$$

$$b) 5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1,19 \cdot 10^{-9}$$

$$70. \text{ Efectua: } \frac{2 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^6 + 10^5}$$

$$-7,268 \cdot 10^{-12}$$

71. Expressa en notació científica i calcula:

$$\frac{60\ 000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\ 000\ 000 \cdot 0,0002^5}$$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7,2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

72. Considera els nombres:

$$A = 3,2 \cdot 10^7; B = 5,28 \cdot 10^4$$

$$\text{i } C = 2,01 \cdot 10^5$$

$$\text{Calcula } \frac{B+C}{A}$$

$$0,00793125 = 7,93125 \cdot 10^{-3}$$

73. Si $A = 3,24 \cdot 10^6$; $B = 5,1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3,8 \cdot 10^{11}$ i $D = 6,2 \cdot 10^{-6}$, calcula

$$\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D.$$

$$2749\ 882,353 \approx 2,7499 \cdot 10^6$$

Intervals i valor absolut

74. Expressa com a desigualtat i com a interval, i representa'ls:

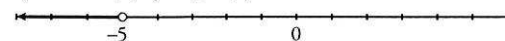
$$a) x \text{ és menor que } -5.$$

$$b) 3 \text{ és menor o igual que } x.$$

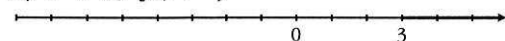
$$c) x \text{ està comprès entre } -5 \text{ i } 1.$$

$$d) x \text{ està entre } -2 \text{ i } 0, \text{ ambdós inclosos.}$$

$$a) x < -5; (-\infty, -5)$$



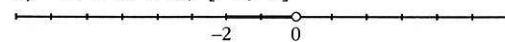
$$b) 3 \leq x; [3, +\infty)$$



$$c) -5 < x < 1; (-5, 1)$$



$$d) -2 \leq x \leq 0; [-2, 0]$$



75. Representa gràficament i expressa com a intervals aquestes desigualtats:

$$a) -3 \leq x \leq 2; b) 5 < x; c) x \leq -2;$$

$$d) -2 \leq x < 3/2; e) 4 < x < 4,1; f) -3 \leq x.$$

$$a) [-3, 2];$$

$$b) (5, +\infty);$$

$$c) [-2, +\infty);$$

$$d) \left[-2, \frac{3}{2}\right);$$

$$e) (4; 4,1);$$

$$f) [-3, +\infty);$$

76. Escriu la desigualtat que verifica qualsevol nombre x que pertany a aquests intervals:

$$a) [-2, 7]; b) [13, +\infty); c) (-\infty, 0);$$

$$d) (-3, 0]; e) [3/2, 6); f) (-\infty, +\infty);$$

$$a) -2 \leq x \leq 7; b) x \leq 13; c) x < 0;$$

$$d) -3 < x \leq 0; e) \frac{3}{2} \leq x < 6;$$

$$f) -\infty < x < +8$$

NOMBRES REALS I NOMBRES COMPLEXOS

- a) $(-1 - 2; -1 + 2) = (-3; 1)$
 b) $(2,5 - 2,01; 2,5 + 2,01) = (0,49; 4,51)$
 c) $\left(2 - \frac{1}{3}; 2 + \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{7}{3}\right)$

85. Descriu com si fossin entorns els intervals següents:

a) $(-1, 2)$ b) $(1,3; 2,9)$

c) $(-2,2; 0,2)$ d) $(-4; -2,8)$

a) $a = \frac{-1 + 2}{2} = \frac{1}{2}$; $R = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

Entorn de centre $\frac{1}{2}$ i radi $\frac{3}{2}$

b) $a = \frac{1,3 + 2,9}{2} = 2,1$; $R = 2,9 - 2,1 = 0,8$

Entorn de centre 2,1 i radi 0,8

c) $a = \frac{-2,2 + 0,2}{2} = -1$; $R = 0,2 - (-1) = 1,2$

Entorn de centre -1 i radi 1,2

d) $a = \frac{-4 + (-2,8)}{2} = -3,4$;

$R = -2,8 - (-3,4) = 0,6$

Entorn de centre $-3,4$ i radi 0,6

86. Comprova si és vertadera o falsa cada una de les expressions següents:

a) $|a| < b$ equival $a - b < a < b$

b) $|-a| = -|a|$ c) $|a + b| = |a| + |b|$

d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$

a) $|a| < b \Leftrightarrow -b < a < b \Leftrightarrow a \in (-b, b)$

Vertadera

b) $|-a| = -|a| \rightarrow |-a| = -a \rightarrow -|a| = -a$

Vertadera

c) $|a + b| = |a| + |b|$

Falsa. Per exemple $a = 3$ i $b = -2$

$|3 - 2| \neq |3| + |-2|$

d) $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$. Vertadera

Logaritmes

87. Calcula:

a) $\log_2 1024$; b) $\log 0,001$; c) $\log_2 \frac{1}{64}$;

d) $\log_{\sqrt{3}} 3$; e) $\log_3 \sqrt{3}$; f) $\log_2 \sqrt{8}$;

g) $\log_{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}}$; h) $\log_{\pi} 1$

a) $\log_2 2^{10} = 10$

b) $\log 10^{-3} = -3$

c) $\log_2 2^{-6} = -6$

d) $\log_{\sqrt{3}} (\sqrt{3})^2 = 2$

e) $\log_3 3^{1/2} = \frac{1}{2}$

f) $\log_2 2^{3/2} = \frac{3}{2}$

g) $\log_{1/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} = \frac{1}{2}$ h) 0

88. Calcula, fent servir la definició de logaritme:

a) $\log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$

b) $\log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$

a) $6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

b) $-5 - 3 - 0 = -8$

89. Calcula la base d'aquests logaritmes:

a) $\log_x 125 = 3$ b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$

a) $x^3 = 125$; $x = 5$; b) $x^{-2} = \frac{1}{9}$; $x = 3$

90. Calcula el valor de x en aquestes igualtats:

a) $\log 3^x = 2$; b) $\log x^2 = -2$; c) $7^x = 115$;

d) $5^{-x} = 3$

a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4,19$; b) $2 \log x = -2$; $x = \frac{1}{10}$;

NOMBRES REALS I NOMBRES COMPLEXOS

$$\begin{aligned} \text{b) } 3_{(\pi/6)} &= 3\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right) = \\ &= 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{2}_{180^\circ} &= \sqrt{2}(\cos 180^\circ + i \sin 180^\circ) = \\ &= \sqrt{2}(-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{d) } 17_0^\circ = 17$$

$$\text{e) } 1_{(\pi/2)} = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$\text{f) } 5_{270^\circ} = -5i$$

$$\begin{aligned} \text{g) } 1_{150^\circ} &= \cos 150^\circ + i \sin 150^\circ = \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{h) } 4_{100^\circ} &= 4(\cos 100^\circ + i \sin 100^\circ) = \\ &= 4(-0,17 + i \cdot 0,98) = -0,69 + 3,94i \end{aligned}$$

Equacions en \mathbb{C}

115. Resol les equacions següents i expressa les solucions en forma binòmica:

a) $z^2 + 4 = 0$; b) $z^2 + z + 4 = 0$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0$; d) $z^2 - z + 1 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \Rightarrow z^2 = -4 \Rightarrow z = \pm\sqrt{4} = \pm 2i$
 $z_1 = -2i, z_2 = 2i$

b) $z^2 + z + 4 = 0 \Rightarrow z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-16}}{2} =$
 $= \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{15}i}{2}$

$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{15}}{2}i, z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{15}}{2}i$

c) $z^2 + 3z + 7 = 0 \Rightarrow z = \frac{-3 \pm \sqrt{9-28}}{2} =$
 $= \frac{-3 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{19}i}{2}$

$z_1 = -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{19}}{2}i, z_2 = -\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{19}}{2}i$

d) $z^2 - z + 1 = 0 \Rightarrow z = \frac{1 \pm \sqrt{1-4}}{2} =$

$= \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$z_1 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, z_2 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

116. Resol les equacions següents en \mathbb{C} :

a) $z^2 + 4 = 0$ b) $z^2 - 2z + 5 = 0$

c) $2z^2 + 10 = 0$ d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0$

a) $z^2 + 4 = 0 \rightarrow z^2 = -4 \rightarrow z = \pm\sqrt{4} = \pm 2i$
 $z_1 = -2i, z_2 = 2i$

b) $z^2 - 2z + 5 = 0 \rightarrow z = \frac{2 \pm \sqrt{4-20}}{2} =$

$= \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{2 \pm 4i}{2} = 1 \pm 2i$

$z_1 = 1 - 2i, z_2 = 1 + 2i$

c) $2z^2 + 10 = 0 \rightarrow 2z^2 = -10 \rightarrow$
 $\rightarrow z^2 = -5 \rightarrow z = \pm\sqrt{5}i$

$z_1 = -\sqrt{5}i, z_2 = \sqrt{5}i$

d) $z^4 + 13z^2 + 36 = 0 \rightarrow z^2 = y$
 $y^2 + 13y + 36 = 0$

$y = \frac{-13 \pm \sqrt{13^2 - 4 \cdot 1 \cdot 36}}{2 \cdot 1} =$

$= \frac{-13 \pm \sqrt{169 - 144}}{2} = \frac{-13 \pm \sqrt{25}}{2} =$

$= \frac{-13 \pm 5}{2} \begin{cases} y_1 = \frac{-13+5}{2} = -4 \\ y_2 = \frac{-13-5}{2} = -9 \end{cases}$

$z_1^2 = y_1 = -4 \begin{cases} z_1 = +\sqrt{4}i \\ z_2 = -\sqrt{4}i \end{cases}$

$z_2^2 = y_2 = -9 \begin{cases} z_3 = +\sqrt{9}i \\ z_4 = -\sqrt{9}i \end{cases}$

ÀLGEBRA

$$b) 7 - 3x = 1 + x^2 - 2x$$

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \begin{cases} x = 2 \text{ (no val)} \\ x = -3 \end{cases}$$

$$c) 2 - 5x = (-x\sqrt{3})^2$$

$$2 - 5x = x^2 \cdot 3$$

$$3x^2 + 5x - 2 = 0$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 24}}{6} \begin{cases} x = -2 \\ x = 1/3 \text{ (no val)} \end{cases}$$

$$d) (\sqrt{2x+3})^2 = (-\sqrt{x-5})^2$$

$$x = -8. \text{ Solució no vàlida.}$$

32. Resol:

$$a) \sqrt{2x} + \sqrt{5x-6} = 4$$

$$b) \sqrt{\frac{7x+1}{4}} = \frac{5x-7}{6}$$

$$c) \sqrt{x-2} + \sqrt{x+1} = 3$$

$$a) (\sqrt{5x-6})^2 = (4 - \sqrt{2x})^2$$

$$5x - 6 = 16 + 2x - 8\sqrt{2x}$$

$$(8\sqrt{2x})^2 = (-3x + 22)^2$$

$$64 \cdot 2x = 9x^2 + 484 - 132x$$

$$128x = 9x^2 + 484 - 132x$$

$$0 = 9x^2 - 260x + 484$$

$$x = \frac{260 \pm \sqrt{67600 - 17424}}{18}$$

$$x = 484/18 = 242/9 \text{ (no val)}$$

$$x = 2$$

$$b) \left(\sqrt{\frac{7x+1}{4}}\right)^2 = \left(\frac{5x-7}{6}\right)^2$$

$$-25x^2 + 133x - 40 = 0$$

$$x = \frac{-133 \pm \sqrt{17689 - 4(-25)(-40)}}{-50}$$

$$x = \begin{cases} x = 5 \text{ Vàlida} \\ x = \frac{8}{25} \text{ Vàlida} \end{cases}$$

$$c) (\sqrt{x-2})^2 = (3 - \sqrt{x+1})^2$$

$$x - 2 = 3^2 + (\sqrt{x+1})^2 - 2 \cdot 3\sqrt{x+1}$$

$$x - 2 = 9 + x + 1 - 6\sqrt{x+1}$$

$$x - 2 - 9 - x - 1 = -6\sqrt{x+1}$$

$$-12 = -6\sqrt{x+1}$$

$$-12^2 = (-6\sqrt{x+1})^2$$

$$144 = 36(x+1)$$

$$144 = 36x + 36$$

$$144 - 36 = 36x$$

$$108 = 36x$$

$$x = \frac{108}{36} = 3$$

Factorització**33. Descompon en factors aquests polinomis i digues quines són les seves arrels:**

$$a) x^3 - 2x^2 - x + 2$$

$$b) x^4 - 5x^2 + 4$$

$$c) 2x^3 - 3x^2 - 9x + 10$$

$$d) x^5 - 7x^4 + 10x^3 - x^2 + 7x - 10$$

$$e) 6x^4 - 5x^3 - 23x^2 + 20x - 4$$

$$f) x^5 - 16x$$

$$g) 4x^3 - 25x$$

$$h) 4x^2 + 4x + 1$$

$$a) (x-1)(x^2 - x - 2) = 0$$

$$(x-1)(x-2)(x+1) = 0$$

$$\text{Arrels: } x = 1; x = 2; x = -1$$

$$b) (x-1)(x^3 + x^2 - 4x - 4) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x^2 - 4) = 0$$

$$(x-1)(x+1)(x+2)(x-2) = 0$$

$$\text{Arrels: } x = 1; x = -1; x = -2; x = 2$$

$$c) (x-1)(2x^2 - x - 10) = 0$$

$$(x-1)(x+2)\left(x - \frac{5}{2}\right) = 0$$

$$\text{Arrels: } x = 1; x = -2; x = \frac{5}{2}$$

$$d) (x-1)(x-2)(x-5)(x^2 + x + 1) = 0$$

$$\text{Arrels: } x = 1; x = 2; x = 5$$

$$e) (x-2)(x+2)(6x^2 - 5x + 1) = 0$$

ÀLGEBRA

$$(x-2)(x+2)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{3}\right) = 0$$

Arrels: $x = 2$; $x = -2$; $x = \frac{1}{2}$; $x = \frac{1}{3}$

$$f) x(x^4 - 16) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ x^4 - 16 = 0 \end{cases}$$

$$x^4 - 16 = 0 \begin{cases} x = +2 \\ x = -2 \end{cases}$$

Arrels: $x = 0$; $x = +2$; $x = -2$

$$g) x(4x^2 - 25) = 0 \begin{cases} x = 0 \\ 4x^2 - 25 = 0 \end{cases}$$

$$4x^2 - 25 = 0 \begin{cases} x = \frac{5}{2} \\ x = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Arrels: $x = 0$; $x = \frac{5}{2}$; $x = -\frac{5}{2}$

$$h) 4x^2 + 4x + 1 = 0 \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

Arrels: $x = -\frac{1}{2}$

Pàgina 85

34. Troba, en cada un dels casos següents, el M.C.D. $[A(x), B(x)]$ i el m.c.m. $[A(x), B(x)]$:

a) $A(x) = x^2 + x - 12$; $B(x) = x^2 + 2x - 15$

b) $A(x) = x^3 + x^2 - x - 1$; $B(x) = x^3 - x$

c) $A(x) = x^6 - x^2$; $B(x) = x^3 - x^2 + x - 1$

a)

$$\begin{array}{ccc|ccc} x^2 + x - 12 & (x+4) & x^3 - 9x & x & & \\ x - 3 & (x-3) & x^2 - 9 & x + 3 & & \\ 1 & & x - 3 & x - 3 & & \\ & & 1 & & & \end{array}$$

M.C.D: $(x-3)$

m.c.m: $x(x+3)(x-3)(x+4)$

b)

$$\begin{array}{ccc|ccc} x^3 + x^2 - x - 1 & x - 1 & x^3 - x & x & & \\ x^2 + 2x + 1 & x + 1 & x^2 - 1 & x - 1 & & \\ x + 1 & x + 1 & x + 1 & x + 1 & & \\ 1 & & 1 & & & \end{array}$$

M.C.D: $(x-1)(x+1)$

m.c.m: $x(x-1)(x+1)^2$

$$c) \begin{array}{ccc|ccc} x^6 + x^2 & x & & & & \\ x^5 - x & x & & & & \\ x^4 - 1 & x - 1 & & & & \\ x^3 + x^2 + x + 1 & x + 1 & & & & \\ x^2 + 1 & x^2 + 1 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} x^3 - x^2 + x - 1 & x - 1 & & & & \\ x^2 + 1 & x^2 + 1 & & & & \end{array}$$

M.C.D: $(x^2+1)(x-1)$

m.c.m: $x^2(x-1)(x+1)(x^2+1)$

35. Resol les equacions següents, factoritzant prèviament:

a) $x^3 - 7x - 6 = 0$

b) $2x^3 - 3x^2 - 9x + 10 = 0$

c) $x^4 - 5x^3 + 5x^2 + 5x - 6 = 0$

d) $3x^3 - 10x^2 + 9x - 2 = 0$

e) $x^5 - 16x = 0$

f) $x^3 - 3x^2 + 2x = 0$

g) $x^3 - x^2 + 4x - 4 = 0$

a) $(x+1)(x^2 - x - 6) = 0$

$(x+1)(x-3)(x+2) = 0$

Solucions: $x = -1$; $x = 3$; $x = -2$

b) $(x-1)(2x^2 - x - 10) = 0$

$(x-1)(x+2)\left(x-\frac{5}{2}\right) = 0$

Solucions: $x = 1$; $x = -2$; $x = \frac{5}{2}$

Equacions exponencials i logarítmiques

Pàgina 86

40. Resol les equacions següents exponencials:

a) $3^x = \sqrt[3]{9}$

Expressa $\sqrt[3]{9}$ com a potència de base 3.

b) $2^x \cdot 2^{x+1} = 8$

Multiplica el primer membre.

c) $5 \cdot 7^{-x} = 35$

Divideix els dos membres per 5.

d) $(0,5)^x = 16$

0,5 és una potència de base 2.

e) $\sqrt{7^x} = \frac{1}{49}$

f) $2^{1/x} = 16$

g) $\frac{3^{3x-2}}{3^{x+3}} = 81$

h) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \frac{8}{125}$

i) $2^x \cdot 5^x = 0,1$

Recorda que $2^x \cdot 5^x = (2 \cdot 5)^x$.

a) $3^x = 9^{1/3} \rightarrow 3^x = 3^{2/3} \rightarrow x = \frac{2}{3}$

b) $2^{x+x+1} = 8 \rightarrow 2^{2x+1} = 2^3 \rightarrow$
 $\rightarrow 2x + 1 = 3 \rightarrow x = 1$

c) $7^{-x} = 7 \rightarrow -x = 1 \rightarrow x = -1$

d) $(2^{-1})^x = 2^4 \rightarrow -x = 4 \rightarrow x = -4$

e) $7^{x/2} = 7^{-2} \rightarrow \frac{x}{2} = -2 \rightarrow x = -4$

f) $2^{1/x} = 2^4 \rightarrow \frac{1}{x} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{4}$

g) $3^{(3x-2)-(x+3)} = 3^4 \rightarrow 2x - 5 = 4 \rightarrow$
 $\rightarrow x = \frac{9}{2}$

h) $\left(\frac{2}{5}\right)^x = \left(\frac{2}{5}\right)^3 \rightarrow x = 3$

i) $10^x = 10^{-1} \rightarrow x = -1$

41. Resol, prenent logaritmes, aquestes equacions:

a) $\frac{1}{e^x} = 27$

b) $e^{x-9} = \sqrt{73}$

c) $2^x \cdot 3^x = 81$

d) $\frac{2^x}{3^{x+1}} = 1$

a) $e^{-x} = 27$

$-x \ln e = 3 \ln 3$

$x = -3 \ln 3 \approx -3,30$

b) $(x-9) \ln e = \ln \sqrt{73}$

$x = \ln \sqrt{73} + 9 \approx 11,15$

c) $6^x = 3^4 \rightarrow x \log 6 = 4 \log 3$

$x = \frac{4 \log 3}{\log 6} \approx 2,4526$

d) $\frac{2^x}{3^x \cdot 3} = 1 \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 3 \rightarrow$

$\rightarrow x(\log 2 - \log 3) = \log 3$

$x = \frac{\log 3}{\log 2 - \log 3} \approx -2,7095$

42. Resol les equacions següents mitjançant un canvi de variable:

a) $2^x + 2^{1-x} = 3$

b) $2^{x+1} + 2^{x-1} = \frac{5}{2}$

c) $8^{1+x} + 2^{3x-1} = \frac{17}{16}$

d) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$

e) $9^x - 3^x - 6 = 0$

f) $7^{1+2x} - 50 \cdot 7^x + 7 = 0$

a) $2^x = y$

$y + \frac{2}{y} = 3 \rightarrow y^2 - 3y + 2 = 0$

$\begin{cases} y = 1 \rightarrow 1 = 2^x \rightarrow x = 0 \\ y = 2 \rightarrow 2 = 2^x \rightarrow x = 1 \end{cases}$

b) $2^x = y$

ÀLGEBRA

$$2y + \frac{y}{2} = \frac{5}{2} \rightarrow 4y + y = 5 \rightarrow y = 1$$

$$1 = 2^x \rightarrow x = 0$$

c) $2^{3x} = y$

$$8y + \frac{y}{2} = \frac{17}{16} \rightarrow 136y = 17 \rightarrow y = \frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{8} = 2^{3x} \rightarrow 2^{-3} = 2^{3x} \rightarrow x = -1$$

d) $2^x = y$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 4 \rightarrow 4 = 2^x \rightarrow x = 2 \\ y = 1 \rightarrow 1 = 2^x \rightarrow x = 0 \end{array} \right.$$

e) $3^x = y$

$$y^2 - y - 6 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 3 \rightarrow 3 = 3^x \rightarrow x = 1 \\ y = -2 \rightarrow -2 = 3^x \text{ No té solució} \end{array} \right.$$

f) $7^x = y$

$$7y^2 - 50y + 7 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = 7 \rightarrow 7^x = 7 \rightarrow x = 1 \\ y = \frac{1}{7} \rightarrow 7^x = \frac{1}{7} \rightarrow 7^x = 7^{-1} \rightarrow x = -1 \end{array} \right.$$

43. Resol les equacions:

a) $\log(x^2 + 1) - \log(x^2 - 1) = \log \frac{13}{12}$

b) $\ln(x - 3) + \ln(x + 1) =$
 $= \ln 3 + \ln(x - 1)$

c) $2 \ln(x - 3) = \ln x - \ln 4$

d) $\log(x + 3) - \log(x - 6) = 1$

a) $\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{13}{12} \rightarrow 12x^2 + 12 = 13x^2 - 13$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ x = -5 \end{array} \right. \text{ Totes dues vàlides}$$

b) $(x - 3)(x + 1) = 3(x - 1)$

$$x^2 - 5x = 0$$

$$x(x - 5) = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \text{ No vàlida} \\ x = 5 \text{ Vàlida} \end{array} \right.$$

c) $(x - 3)^2 = \frac{x}{4}$

$$4x^2 - 25x + 36 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 4 \text{ Vàlida} \\ x = \frac{9}{4} \text{ No vàlida} \end{array} \right.$$

d) $\frac{x+3}{x-6} = 10$

$$9x = 63$$

$$x = 7 \text{ Vàlida}$$

44. Resol les equacions:

a) $\log(x + 9) = 2 + \log x$

b) $\log \sqrt{3x + 5} + \log \sqrt{x} = 1$

c) $2(\log x)^2 + 7 \log x - 9 = 0$

d) $\log(x^2 - 7x + 110) = 2$

e) $\log(x^2 + 3x + 36) = 1 + \log(x + 3)$

f) $\ln x + \ln 2x + \ln 4x = +3$

a) $(x + 9) = 100x$

$$x = \frac{1}{11} \text{ Vàlida}$$

b) $\sqrt{x}(\sqrt{3x + 5}) = 10$

$$3x + 5 = \frac{100}{x}$$

$$3x^2 + 5x - 100 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 5 \text{ Vàlida} \\ x = \frac{-20}{3} \text{ No vàlida} \end{array} \right.$$

c) $\log x = y$

$$2y^2 + 7y - 9 = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} y = \frac{-9}{2} \rightarrow \log x = \frac{-9}{2} \rightarrow x = 10^{-9/2} \rightarrow \\ y = 1 \rightarrow \log x = 1 \rightarrow x = 10 \end{array} \right.$$

$$\rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{10^9}} \text{ Totes dues vàlides}$$

d) $x^2 - 7x + 110 = 100$

$$x^2 - 7x + 10 = 0 \left\{ \begin{array}{l} x = 5 \\ x = 2 \end{array} \right.$$

Totes dues vàlides.

e) $x^2 + 3x + 36 = 10(x + 3)$

$$x^2 - 7x + 6 = 0 \begin{cases} x = 6 \\ x = 1 \end{cases}$$

Totes dues vàlides.

f) $\ln 8x^3 = 3$

$$8x^3 = e^3$$

$$x = \sqrt[3]{\frac{e^3}{8}} = \frac{e}{2}$$

Sistemes d'equacions

45. Resol:

a) $\begin{cases} xy = 15 \\ \frac{x}{y} = \frac{5}{3} \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{5}{6} \\ 2x + 3y = 2 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$

Suma les dues equacions.

d) $\begin{cases} (x + y)(x - y) = 7 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases}$

a) $x = \frac{15}{y}$

$$\frac{15}{y} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{15}{y^2} = \frac{5}{3}; 45 = 5y^2; y^2 = 9 \rightarrow y = \pm 3$$

$$x_1 = 5, y_1 = 3; x_2 = -5, y_2 = -3$$

b) $\begin{cases} x = \frac{6y}{5y-6} \\ 2x + 3y = 2 \text{ (substituïm la } x) \end{cases}$

$$\frac{12y}{5y-6} + 3y = 2$$

$$15y^2 - 16y + 12 = 0$$

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 720}}{30} \text{ No té solució}$$

c) Reducció

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 5x - 5y + 10 = 0 \\ x^2 - y^2 - 5x + 5y + 2 = 0 \end{cases}$$

$$2x^2 \quad / \quad -10x \quad / \quad + \quad 12 = 0$$

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 4 \cdot 2 \cdot 12}}{4} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

per a $x_1 = 3$

$$9 + y^2 - 15 - 5y + 10 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0$$

$$y = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} \begin{cases} y_1 = 4 \\ y_2 = 1 \end{cases}$$

per a $x_2 = 2$

$$4 + y^2 - 10 - 5y + 10 = 0$$

$$y^2 - 5y + 4 = 0 \begin{cases} y_3 = 4 \\ y_4 = 1 \end{cases}$$

Solucions

$$x_1 = 3 \rightarrow y_1 = 4$$

$$x_1 = 3 \rightarrow y_2 = 1$$

$$x_2 = 2 \rightarrow y_3 = 4$$

$$x_2 = 2 \rightarrow y_4 = 1$$

d) $\begin{cases} x^2 - y^2 = 7 \\ x = \frac{4y}{3} \end{cases}$

$$\frac{16y^2}{9} - y^2 = 7$$

$$16y^2 - 9y^2 = 63; y^2 = 9$$

$$x_1 = 4, y_1 = 3; x_2 = -4, y_2 = -3$$

46. Resol:

a) $\begin{cases} y^2 - 2y + 1 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2\sqrt{x+1} = y + 1 \\ 2x - 3y = 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} \sqrt{3(x+y)} + x = 12 \\ 2x - y = 6 \end{cases}$

d) $\begin{cases} \sqrt{x+y} + 2 = x + 1 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$

a) $\begin{cases} (y-1)^2 = x \\ \sqrt{x} + y = 5 \end{cases} \xrightarrow{\text{substitució}} \sqrt{(y-1)^2} + y = 5$

ÀLGEBRA

$$8 - 2y - 3 = 4$$

$$y = \frac{1}{2}$$

Inequacions

55. Resol aquestes inequacions:

a) $5(2 + x) > -5x$

b) $\frac{x-1}{2} > x - 1$

c) $x^2 + 5x < 0$

d) $9x^2 - 4 > 0$

e) $x^2 + 6x + 8 \geq 0$

f) $x^2 - 2x - 15 \leq 0$

a) $10 + 5x > -5x \rightarrow 10x > -10 \rightarrow x > -1;$
 $(-1, +\infty)$

b) $x - 1 > 2x - 2 \rightarrow 1 > x \rightarrow x < 1; (-\infty, 1)$

c) $x(x + 5) < 0 \rightarrow -5 < x < 0; (-5, 0)$

d) $(3x - 2)(3x + 2) > 0 \rightarrow$

$$\rightarrow \left(-\infty, -\frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}, +\infty\right)$$

e) $(x + 2)(x + 4) \geq 0 \rightarrow (-\infty, -4] \cup [-2, +\infty)$

f) $(x + 3)(x - 5) \leq 0 \rightarrow [-3, 5]$

56. Resol els següents sistemes d'inequacions:

a) $\begin{cases} 4x - 3 < 1 \\ x + 6 > 2 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x - 2 > -7 \\ 5 - x < 1 \end{cases}$

c) $\begin{cases} 5 - x < -12 \\ 16 - 2x < 3x - 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} 2x - 3 > 0 \\ 5x + 1 < 0 \end{cases}$

Resol cada inequació i busca les solucions comunes. Un dels sistemes no té solució.

a) $\begin{cases} 4x < 4 \rightarrow x < 1 \\ x > -4 \end{cases} \rightarrow (-4, 1)$

b) $\begin{cases} 3x > -5 \rightarrow x > -5/3 \\ x > 4 \end{cases} \rightarrow (4, +\infty)$

c) $\begin{cases} x > 17 \\ 5x > 19 \rightarrow x > 19/5 \end{cases} \rightarrow (17, +\infty)$

d) $\begin{cases} x > 3/2 \\ x < -1/5 \end{cases} \rightarrow \text{No té solució}$

57. Resol:

a) $x^2 - 7x + 6 \leq 0$

b) $x^2 - 7x + 6 > 0$

c) $(x + 1)x^2(x - 3) > 0$

d) $x(x^2 + 3) < 0$

$$x^2 - 7x + 6 = (x - 1)(x - 6)$$

a) $[1, 6];$ b) $(-\infty, 1) \cup (6, +\infty)$

c)

	$x < -1$	$-1 < x < 0$	$0 < x < 3$	$3 < x$
$x + 1$	-	+	+	+
x^2	+	+	+	+
$x - 3$	-	-	-	+
$(x + 1)x^2(x - 3)$	-	-	-	+

Solució: $x < -1$ i $x > 3$

$$(-\infty, -1) \cup (3, +\infty)$$

d) $\begin{matrix} x < 0 & 0 < x \\ x & - & + \\ x^2 + 3 & + & + \\ x(x^2 + 3) & - \cdot + = - & + \cdot + = + \end{matrix}$

Solució: $x < 0$

$$(-\infty, 0)$$

58. Resol aquestes inequacions:

a) $\frac{2}{x-3} > 0$

b) $\frac{3x+5}{x^2+1} \geq 0$

c) $\frac{x^2}{x+4} < 0$

RESOLUCIÓ DE TRIANGLES

Pàgina 105

15. Digues el valor de les raons trigonomètriques següents sense utilitzar la calculadora. Després, comprova-ho amb el seu ajut:

- a) $\sin (37 \times 360^\circ - 30^\circ)$
 b) $\cos (-5 \times 360^\circ + 120^\circ)$
 c) $\operatorname{tg} (11 \times 360^\circ - 135^\circ)$
 d) $\cos (27 \times 180^\circ + 135^\circ)$
 a) -0,5 b) -0,5 c) 1 d) 0,707

16. Repeteix amb la calculadora aquests càlculs:

$$\boxed{\text{INV}} \boxed{\text{tan}} 1 \boxed{\text{EXP}} 10 \boxed{=}$$

$$\boxed{\text{INV}} \boxed{\text{tan}} 1 \boxed{\text{EXP}} 20 \boxed{=}$$

Explica els resultats. Com és possible que digui que l'angle la tangent del qual és 10^{20} sigui 90° si 90° no té tangent?

Perquè és un nombre tan pròxim a 90° que ho aproxima incorrectament a 90° .

Pàgina 107

17. Calcula les raons trigonomètriques de 55° , 125° , 145° , 215° , 235° , 305° i 325° a partir de les raons trigonomètriques de 35° :

$$\sin 35^\circ = 0,57; \cos 35^\circ = 0,82; \operatorname{tg} 35^\circ = 0,70.$$

$$\text{a) } \sin 55 = \cos 35 = 0,82$$

$$\cos 55 = \sin 35 = 0,57$$

$$\operatorname{tg} 55 = \frac{\sin 55}{\cos 55} = \frac{0,82}{0,57} = 1,44$$

$$\text{b) } \cos 125 = -\sin 35 = -0,57$$

$$\sin 125 = \cos 35 = 0,82$$

$$\operatorname{tg} 125 = \frac{\sin 125}{\cos 125} = \frac{0,82}{-0,57} = -1,44$$

$$\text{c) } \sin 145 = \sin 35 = 0,57$$

$$\cos 145 = -\cos 35 = -0,82$$

$$\operatorname{tg} 145 = \frac{\sin 145}{\cos 145} = \frac{0,57}{-0,82} = -0,70$$

$$\text{d) } \sin 215 = -\sin 35 = -0,57$$

$$\cos 215 = -\cos 35 = -0,82$$

$$\operatorname{tg} 215 = \frac{\sin 215}{\cos 215} = \frac{-0,57}{-0,82} = 0,70$$

$$\text{e) } \sin 235 = -\cos 35 = -0,82$$

$$\cos 235 = -\sin 35 = -0,57$$

$$\operatorname{tg} 235 = \frac{\sin 235}{\cos 235} = \frac{-0,82}{-0,57} = 1,44$$

$$\text{f) } \sin 305 = -\cos 35 = -0,82$$

$$\cos 305 = \sin 35 = 0,57$$

$$\operatorname{tg} 305 = \frac{\sin 305}{\cos 305} = \frac{-0,82}{0,57} = -1,44$$

$$\text{g) } \sin 325 = -\sin 35 = -0,57$$

$$\cos 325 = \cos 35 = 0,82$$

$$\operatorname{tg} 325 = \frac{\sin 325}{\cos 325} = \frac{-0,57}{0,82} = -0,70$$

18. Esbrina les raons trigonomètriques de 718° , 516° i 342° , emprant la calculadora només per trobar raons trigonomètriques d'angles compresos entre 0° i 90° .

$$\text{a) } \sin 718^\circ = -\sin 2^\circ = -0,03; \cos 2^\circ = 0,99;$$

$$\operatorname{tg} 2^\circ = -0,03$$

$$\text{b) } \sin 516^\circ = \sin 24^\circ = 0,41; \cos 516^\circ =$$

$$= -\cos 24^\circ = -0,91; -\operatorname{tg} 24^\circ = 0,45$$

$$\text{c) } \sin 342^\circ = -\sin 18^\circ = -0,31; \cos 18^\circ = 0,95;$$

$$-\operatorname{tg} 18^\circ = -0,32$$

19. Dibuixa, sobre la circumferència goniomètrica, angles que compleixin les condicions següents i calcula, en cada cas, el valor de les raons trigonomètriques restants:

$$\text{a) } \sin \alpha = -\frac{1}{2}, \operatorname{tg} \alpha > 0$$

RESOLUCIÓ DE TRIANGLES

$$\cos \hat{B} = \frac{28^2 - 11^2 - 35^2}{-2 \cdot 11 \cdot 35} = 0,73$$

$$\hat{B} = 43^\circ 07' 28,17'' \approx 43^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (15^\circ + 43^\circ) = 122^\circ$$

39. Resol els triangles següents:

a) $b = 32$ cm $a = 17$ cm $\hat{C} = 40^\circ$

b) $a = 85$ cm $c = 57$ cm $\hat{B} = 65^\circ$

c) $a = 23$ cm $b = 14$ cm $c = 34$ cm

a) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} = 17^2 + 32^2 -$
 $-2 \cdot 17 \cdot 32 \cdot \cos 40^\circ = 479,5$

$$c = 21,9 \approx 22 \text{ cm}$$

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{17^2 - 32^2 - 22^2}{-2 \cdot 32 \cdot 22} = 0,86 \rightarrow \hat{A} = 30^\circ$$

$$\hat{B} = 180^\circ - (40^\circ + 30^\circ) = 110^\circ$$

b) $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} = 85^2 + 57^2 - 2 \cdot 85$
 $\cdot 57 \cos 65^\circ = 6378,8$

$$b = 79,9 \approx 80 \text{ cm}$$

$$\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc} = \cos \hat{A}$$

$$\cos \hat{A} = \frac{85^2 - 80^2 - 57^2}{-2 \cdot 80 \cdot 57} = 0,26$$

$$\hat{A} = 74^\circ 35' 10,07'' \approx 74^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (65^\circ + 74^\circ) = 41^\circ$$

c) $\cos \hat{A} = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$

$$\cos \hat{A} = \frac{23^2 - 14^2 - 34^2}{-2 \cdot 14 \cdot 34} = 0,86$$

$$\hat{A} = 30^\circ 10' 29,35'' \approx 30^\circ$$

$$\cos \hat{B} = \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac}$$

$$\cos \hat{B} = \frac{14^2 - 23^2 - 34^2}{-2 \cdot 23 \cdot 34} = 0,95$$

$$\hat{B} = 17^\circ 48' 56,22'' \approx 17^\circ$$

$$\hat{C} = 180^\circ - (30^\circ + 17^\circ) = 133^\circ$$

Relació entre raons trigonomètriques

40. Sabent que l'angle α és obtús, completa la taula següent:

$\sin \alpha$	0,92	0,6	0,99	0,36	0,5	0,97
$\cos \alpha$	-0,15	-0,8	-0,12	-0,8	-0,75	-0,24
$\operatorname{tg} \alpha$	-6,13	-0,75	-8,21	-0,45	0,6	-4

41. Troba les raons trigonomètriques de α restants:

a) $\sin \alpha = -4/5$, $\alpha < 270^\circ$

b) $\cos \alpha = 2/3$, $\operatorname{tg} \alpha < 0$

c) $\operatorname{tg} \alpha = -3$, $\alpha < 180^\circ$

a) $\cos \alpha = -0,6$, $\operatorname{tg} \alpha = -1,3$

b) $\sin \alpha = -0,74$, $\operatorname{tg} \alpha = -1,12$

c) $\cos \alpha = -0,32$, $\sin \alpha = 0,95$

42. Expressa amb un angle del primer quadrant:

a) $\sin 150^\circ$; b) $\cos 135^\circ$; c) $\operatorname{tg} 210^\circ$;

d) $\cos 225^\circ$; e) $\sin 315^\circ$; f) $\operatorname{tg} 120^\circ$;

g) $\operatorname{tg} 340^\circ$; h) $\cos 200^\circ$; i) $\sin 290^\circ$

a) $\sin 30^\circ$; b) $-\cos 45^\circ$; c) $\operatorname{tg} 30^\circ$;

d) $-\cos 45^\circ$; e) $-\sin 45^\circ$; f) $-\operatorname{tg} 60^\circ$;

g) $-\operatorname{tg} 20^\circ$; h) $-\cos 20^\circ$; i) $-\sin 70^\circ$

Pàgina 117

43. Si $\sin \alpha = 0,35$ i $\alpha < 90^\circ$, troba:

a) $\sin (180^\circ - \alpha)$; b) $\sin (\alpha + 90^\circ)$;

c) $\sin (180^\circ + \alpha)$; d) $\sin (360^\circ - \alpha)$;

e) $\sin (90^\circ - \alpha)$; f) $\sin (360^\circ + \alpha)$

a) 0,35; b) 0,94; c) -0,35; d) -0,35;

e) 0,94; f) 0,35

FUNCIONS I FÓRMULES TRIGONOMÈTRIQUES

31. Troba sense emprar la calculadora:

$$a) 5 \cos \frac{\pi}{2} - \cos 0 + 2 \cos \pi - \cos \frac{3\pi}{2} +$$

$$+ \cos 2\pi$$

$$b) 5 \operatorname{tg} \pi + 3 \cos \frac{\pi}{2} - 2 \operatorname{tg} 0 +$$

$$+ \sin \frac{3\pi}{2} - 2 \sin 2\pi$$

$$c) \frac{2}{3} \sin \frac{\pi}{2} - 4 \sin \frac{3\pi}{2} + 3 \sin \pi -$$

$$- \frac{5}{3} \sin \frac{\pi}{2}$$

Comprova el resultat obtingut utilitzant la calculadora

$$a) 5 \cdot 0 - 1 + 2 \cdot (-1) - 0 + 1 = -2$$

$$b) 5 \cdot 0 + 3 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + (-1) - 2 \cdot 0 = -1$$

$$c) \frac{2}{3} \cdot 1 - 4(-1) + 3 \cdot 0 - \frac{5}{3} \cdot 1 =$$

$$\frac{2}{3} + 4 + 0 - \frac{5}{3} = 3$$

32. Prova que:

$$a) 4 \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \pi = 2$$

$$b) 2\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \sin \frac{\pi}{2} = 3$$

$$a) 4 \sin \frac{\pi}{6} + \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} + \cos \pi = 4 \cdot \frac{1}{2} +$$

$$+ \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + (-1) = 2 + 1 - 1 = 2$$

$$b) 2\sqrt{3} \sin \frac{2\pi}{3} + 4 \sin \frac{\pi}{6} - 2 \sin \frac{\pi}{2} =$$

$$= 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot 1 =$$

$$= 3 + 2 - 2 = 3$$

33. Troba el valor exacte de cada una d'aquestes expressions sense utilitzar la calculadora:

$$a) \sin \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{2} + \sin \pi$$

$$b) \cos \pi - \cos 0 + \cos \frac{\pi}{2} - \cos \frac{3\pi}{2}$$

$$c) \sin \frac{2\pi}{3} - \cos \frac{7\pi}{6} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{11\pi}{6}$$

Comprova els resultats amb la calculadora.

$$a) \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 + 0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$b) -1 - 1 + 0 - 0 = -2$$

$$c) \frac{\sqrt{3}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{10}{6}\sqrt{3} = \frac{5}{3}\sqrt{3}$$

34. Troba el valor exacte d'aquestes expressions sense usar la calculadora:

$$a) \sin \frac{5\pi}{4} + \cos \frac{3\pi}{4} - \sin \frac{7\pi}{4}$$

$$b) \cos \frac{5\pi}{3} + \operatorname{tg} \frac{4\pi}{3} - \operatorname{tg} \frac{7\pi}{6}$$

$$c) \sqrt{3} \cos \frac{\pi}{6} + \sin \frac{\pi}{6} - \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} - 2\sqrt{3} \sin \frac{\pi}{3}$$

Comprova els resultats amb la calculadora.

$$a) -\frac{\sqrt{2}}{2} + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$b) \frac{1}{2} + \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3 + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}}{6} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{6}$$

$$c) \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} - \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 1 - 3 = -2$$

VECTORS

$$\begin{aligned} \text{c) } & \frac{1}{2}[(3, -5) + (-2, 1)] - \frac{2}{3}[(3, -5) - \\ & - (-2, 1)] = \frac{1}{2}(1, -4) - \frac{2}{3}(5, -6) = \\ & = \left(\frac{1}{2}, -2\right) + \left(\frac{-10}{3}, 4\right) = \left(\frac{-17}{6}, 2\right) \end{aligned}$$

16. Troba el vector \vec{b} tal que $\vec{c} = 3\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$, essent $\vec{a}(-1, 3)$ i $\vec{c}(7, -2)$.

$$(7, -2) = 3(-1, 3) - \frac{1}{2}(b_1, b_2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 7 = -3 - 1/2b_1 \rightarrow b_1 = -20 \\ -2 = 9 - 1/2b_2 \rightarrow b_2 = 22 \end{cases}$$

$$\vec{b}(-20, 22)$$

17. Troba les coordenades d'un vector \vec{v} tal que: $\vec{a} = 3\vec{u} - 2\vec{v}$, essent $\vec{a}(1, -7)$ i $\vec{u}\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right)$.

$$(1, -7) = 3\left(\frac{5}{6}, \frac{2}{3}\right) - 2(v_1, v_2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 1 = 5/2 - 2v_1 \rightarrow v_1 = 3/4 \\ -7 = 2 - 2v_2 \rightarrow v_2 = 9/2 \end{cases}$$

$$\vec{v}\left(\frac{3}{4}, \frac{9}{2}\right)$$

18. Donats els vectors $\vec{a}(3, -2)$, $\vec{b}(-1, 2)$ i $\vec{c}(0, -5)$, calcula m i n de manera que: $\vec{c} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

$$(0, -5) = m(3, -2) + n(-1, 2) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 0 = 3m - n \\ -5 = -2m + 2n \end{cases}$$

Resolem el sistema:

Aillem en la primera equació $n = 3m$ i substituïm en la segona:

$$-5 = -2m + 6m \rightarrow -5 = 4m \rightarrow$$

$$m = \frac{-5}{4} \rightarrow n = \frac{-15}{4}$$

19. Expressa el vector $\vec{a}(-1, -8)$ com a combinació lineal de $\vec{b}(3, -2)$ i $\vec{c}\left(4, -\frac{1}{2}\right)$.

Calcula m i n tals que $\vec{a} = m\vec{b} + n\vec{c}$.

$$(-1, -8) = m(3, -2) + n\left(4, -\frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} -1 = 3m + 4n \\ -8 = -2m - \frac{1}{2}n \end{cases}$$

Resolc el sistema per reducció (per exemple). Per això, multiplico la segona equació per 8 (en ambdós membres) i sumo membre a membre les dues equacions.

$$-1 = 3m + 4n$$

$$-64 = -16m - 4n$$

$$\begin{array}{r} -1 = 3m + 4n \\ -64 = -16m - 4n \\ \hline -65 = -13m \end{array} \rightarrow m = \frac{-65}{-13} = \frac{65}{13} = 5$$

Substitueixo en una de les equacions i aïllo n :

$$-1 = 3m + 4n \rightarrow -1 = 3 \cdot 5 + 4n \rightarrow$$

$$-1 = 15 + 4n \rightarrow -16 = 4n \rightarrow n = \frac{-16}{4} = -4$$

Així, podem dir: $\vec{a} = 5\vec{b} - 4\vec{c}$

20. Quins dels parells de vectors següents formen una base?

a) $\vec{u}(3, -1)$, $\vec{v}(-3, 1)$

b) $\vec{u}(2, 6)$, $\vec{v}\left(\frac{2}{3}, 2\right)$

c) $\vec{u}(5, -4)$, $\vec{v}(5, 4)$

a) No, ja que tenen la mateixa direcció ($\vec{u} = -\vec{v}$).

b) No, per la mateixa raó ($\vec{u} = 3\vec{v}$).

c) Sí, tenen distinta direcció ($\vec{u} \neq k\vec{v}$ per a qualsevol k). Basta representar-los gràficament per comprovar-ho.

VECTORS

Producte escalar

25. Donats $\vec{u}(2, 3)$, $\vec{v}(-3, 1)$ i $\vec{w}(5, 2)$, calcula:

- a) $(3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w}$; b) $\vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w}$
 c) $(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{w}$; d) $\vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v})$

a) Troba primer les coordenades de $3\vec{u} + 2\vec{v}$.

c) Efectua $\vec{u} \cdot \vec{v}$. Multiplica el resultat (un nombre) pel vector \vec{w} . N'obtindràs un vector.

$$\begin{aligned} \text{a) } 3\vec{u} + 2\vec{v} &= 3(2, 3) + 2(-3, 1) = \\ &= (6, 9) + (-6, 2) = (0, 11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3\vec{u} + 2\vec{v}) \cdot \vec{w} &= (0, 11) \cdot (5, 2) = \\ &= 0 \cdot 5 + 11 \cdot 2 = 0 + 22 = 22 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \vec{u} \cdot \vec{w} &= (2, 3) \cdot (5, 2) = 10 + 6 = 16 \\ \vec{v} \cdot \vec{w} &= (-3, 1) \cdot (5, 2) = -15 + 2 = -13 \\ \rightarrow \vec{u} \cdot \vec{w} - \vec{v} \cdot \vec{w} &= 16 - (-13) = \\ &= 16 + 13 = 29 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \vec{u} \cdot \vec{v} &= (2, 3) \cdot (-3, 1) = -6 + 3 = -3 \\ (\vec{u} \cdot \vec{v}) \cdot \vec{w} &= -3(5, 2) = (-15, -6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \vec{v} \cdot \vec{v} &= (-3, 1) \cdot (-3, 1) = 9 + 1 = 10 \\ \vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{v}) &= (2, 3) \cdot 10 = (20, 30) \end{aligned}$$

26. Calcula x , de manera que el producte escalar de $\vec{a}(3, -5)$ i $\vec{b}(x, 2)$ sigui igual a 7. Quin angle formen els vectors \vec{a} i \vec{b} ?

$$(3, -5) \cdot (x, 2) = 7 \rightarrow 3x - 10 = 7 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{17}{3}$$

$$\vec{a}(3, -5)$$

$$\vec{b}\left(\frac{17}{3}, 2\right)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{\left(\frac{17}{3}\right)^2 + 2^2} = \sqrt{\frac{289}{9} + 4} = \sqrt{\frac{325}{9}}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 7$$

$$\sqrt{34} \cdot \sqrt{\frac{325}{9}} \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 7$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{7}{\sqrt{34} \cdot \sqrt{\frac{325}{9}}} = \frac{7}{\sqrt{\frac{11050}{9}}} =$$

$$= 0,20$$

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 78^\circ 28' 34,6'' \approx 78^\circ$$

27. Donat el vector $\vec{u}(-5, k)$ calcula k de manera que:

a) \vec{u} sigui ortogonal a $\vec{v}(4, -2)$.

b) El mòdul de \vec{u} sigui igual a $\sqrt{34}$.

$$\text{a) } \vec{u} \perp \vec{v} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (-5, k) \cdot (4, -2) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -20 - 2k = 0 \Rightarrow k = -10$$

$$\text{b) } |\vec{u}| = \sqrt{(-5)^2 + k^2} = \sqrt{25 + k^2} = \sqrt{34} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 25 + k^2 = 34 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = \pm 3$$

Hi ha, doncs, dues solucions.

28. Troba l'angle que formen els parells de vectors següents:

a) $\vec{u}(3, 2)$, $\vec{v}(1, -5)$; b) $\vec{m}(4, 6)$, $\vec{n}(3, -2)$;

c) $\vec{a}(1, 6)$, $\vec{b}\left(-\frac{1}{2}, -3\right)$

a) Utilitzem les dues expressions per calcular $\vec{u} \cdot \vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-5) = -7$$

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \\ &= \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \end{aligned}$$

Igalant les dues expressions, es té:

$$-7 = \sqrt{13} \cdot \sqrt{26} \cdot \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos(\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = \frac{-7}{\sqrt{13} \cdot \sqrt{26}} = -0,38$$

$$\text{Així: } (\widehat{\vec{u}, \vec{v}}) = 112^\circ 22' 48''$$

b) Aïllant directament en la definició:

$$\vec{m} \cdot \vec{n} = |\vec{m}| \cdot |\vec{n}| \cdot \cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) \rightarrow$$

$$\rightarrow \cos(\widehat{\vec{m}, \vec{n}}) = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{4 \cdot 3 + 6 \cdot (-2)}{\sqrt{52} \cdot \sqrt{13}} =$$

GEOMETRIA ANALÍTICA. PROBLEMES AFINS I MÈTRICS

una direcció paral·lela al vector $\vec{d}(4, -1)$.
 Dóna valors al paràmetre i obtén cinc punts més de la recta.

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 7 - t \end{cases}$$

t	-2	-1	1	2	3
(x, y)	(-11, 9)	(-7, 8)	(1, 6)	(5, 5)	(9, 4)

22. Escriu les equacions paramètriques de la recta que passa per:

- a) $P(6, -2)$ i $Q(0, 5)$
- b) $M(3, 2)$ i $N(3, 6)$
- c) $A(0, 0)$ i $Q(8, 0)$

Troba, en tots els casos, l'equació implícita.

a) $\vec{PQ} = (-6, 7) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 6 - 6t \\ y = -2 + 7t \end{cases} \equiv$

(Usant el punt P)

$$\equiv r: \begin{cases} x = -6t \\ y = 5 + 7t \end{cases} \Rightarrow$$

(Usant Q)

$$\Rightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{-6} \\ t = \frac{y-5}{7} \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{-6} = \frac{y-5}{7}$$

$$\Rightarrow 7x = -6y + 30 \Rightarrow r: 7x + 6y - 30 = 0$$

b) $\vec{MN} = (0, 4) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 3 \\ y = 2 + 4t \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow x = 3 \rightarrow$ recta paral·lela a l'eix Y

c) $\vec{AQ} = (8, 0) \Rightarrow r: \begin{cases} x = 8t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow r: y = 0 \rightarrow$
 eix X

23. Troba les equacions paramètriques de cadascuna de les rectes següents:

- a) $2x - y = 0$; b) $x - 7 = 0$; c) $3y - 6 = 0$;
 - d) $x + 3y = 0$
- a) Si $x = t \Rightarrow 2t - y = 0 \Rightarrow y = 2t \Rightarrow$

$$\Rightarrow r: \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases}$$

b) $\begin{cases} x = 7 \\ y = t \end{cases}$; c) $\begin{cases} x = t \\ y = 6/3 = 2 \end{cases}$; d) $\begin{cases} x = -3t \\ y = t \end{cases}$

24. Escriu les equacions paramètriques i implícites dels eixos de coordenades.

Ambdós eixos passen per l'origen de coordenades i els seus vectors directors són els vectors de la base.

Eix X: $\begin{cases} O(0, 0) \in \text{eix X} \\ \vec{d}_X = (1, 0) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Eix X: } \begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow y = 0$$

Eix Y: $\begin{cases} O(0, 0) \in \text{eix Y} \\ \vec{d}_Y = (0, 1) \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \text{Eix Y: } \begin{cases} x = 0 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow x = 0$$

25. Donada la recta $r \begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + t \end{cases}$

escriu les equacions de les rectes següents:

- a) Paral·lela a r que passa per $A(-1, -3)$.
- b) Perpendicular a r i que passa per $B(-2, 5)$.

a) $\begin{cases} x = 1 - 5t & r' \parallel r \\ y = 2 + t & A(-1, -3) \in r' \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{d}' = \vec{d} \\ A \in r' \end{cases} \Rightarrow r': \begin{cases} x = -1 - 5t \\ y = -3 + t \end{cases}$$

b) $\begin{cases} r'' \perp r \\ B(-2, 5) \in r'' \end{cases} \Rightarrow \vec{d}'' \perp \vec{d} \Rightarrow$

$$\vec{d}'' = (1, 5) \Rightarrow r'': \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 5 + 5t \end{cases}$$

26. Troba, en cada cas, l'equació de la recta que passa pel punt $P(1, -3)$ i és:

- a) Paral·lela a la recta $2x - 3y + 5 = 0$.
- b) Perpendicular a la recta $x + y - 3 = 0$.
- c) Paral·lela a la recta $2y - 3 = 0$.

GEOMETRIA ANALÍTICA. PROBLEMES AFINS I MÈTRICS

34. Determina k perquè els punts $A(-3, 5)$, $B(2, 1)$ i $C(6, k)$ estiguin alineats.

Ha de passar que \overrightarrow{AB} i \overrightarrow{BC} siguin proporcionals.

$$\left. \begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = (5, -4) \\ \overrightarrow{BC} = (4, k-1) \end{array} \right\} \rightarrow \frac{5}{4} = \frac{-4}{k-1} \rightarrow$$

$$\rightarrow 5k - 5 = -16 \rightarrow k = \frac{-11}{5}$$

Punts de rectes

35. Troba el punt de tall de les rectes r i s en cada cas:

a) $r: 2x - y + 5 = 0$; $s: x + y + 4 = 0$

b) $r: x - 2y - 4 = 0$; $s: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases}$

c) $r: \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 + 3t \end{cases}$; $s: \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = t \end{cases}$

a) $\begin{cases} 2x - y + 5 = 0 \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$

$$3x + 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{-9}{3} = -3$$

Substitueixo $x = -3$ en la segona equació:

$$-3 + y + 4 = 0 \Rightarrow y = -4 + 3 = -1$$

El punt de tall és $(-3, -1)$

b) $x - 2y - 4 = 0$

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \end{cases} \text{ multipliquem per 3}$$

$$3x = 3 + 3t$$

$$y = 2 - 3t$$

$$3x + y = 5 \quad \text{Sumem}$$

L'equació implícita és $3x + y - 5 = 0$

$$\begin{cases} x - 2y - 4 = 0 \\ 3x + y - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow y = +5 - 3x$$

Substitueixo en la primera equació:

$$x - 2(5 - 3x) - 4 = 0$$

$$x - 10 + 6x - 4 = 0$$

$$7x - 14 = 0$$

$$x = \frac{14}{7} = 2 \Rightarrow$$

\Rightarrow Substitueixo en la segona equació:

$$3 \cdot 2 + y - 5 = 0$$

$$6 + y - 5 = 0 \Rightarrow y = -1$$

El punt de tall és $(2, -1)$

c) $\begin{cases} 2 = 3 + 2s \\ 1 + 3t = s \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} -2s = 1 \\ 3t - s = -1 \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{-2}$$

$$\Rightarrow 3t - \left(-\frac{1}{2}\right) = -1$$

$$3t + \frac{1}{2} = -1$$

$$3t = -1 - \frac{1}{2}$$

$$t = -\frac{1}{2}$$

Punt de tall $\begin{cases} x_0 = 3 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \\ y_0 = -\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\left(2, -\frac{1}{2}\right)$$

Pàgina 182

36. Comprova si el punt $P(13, -18)$ pertany a alguna de les rectes següents:

$$r_1: 2x - y + 5 = 0 \quad r_2: \begin{cases} x = 12 + t \\ y = -5 + 13t \end{cases}$$

$$r_3: 3y + 54 = 0 \quad r_4: \begin{cases} x = 13 \\ y = 10 - t \end{cases}$$

$$r_1: 2x - y + 5 = 0$$

$$(2 \cdot 13) - y + 5 = 0$$

$$26 - y + 5 = 0 \Rightarrow -y = -5 - 26 = -31 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 31$$

No hi pertany

$$r_2: \begin{cases} x = 12 + t \\ y = -5 + 13t \end{cases}$$

GEOMETRIA ANALÍTICA. PROBLEMES AFINS I MÈTRICS

recta $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2t \end{cases}$ (ja que li ha de ser paral·lela).

Per tant: $\vec{d}(-1, 2)$

Com que ha de passar per $A(5, -2) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 5 - t \\ y = -2 + 2t \end{cases}$$

c) El pendent de la recta $r: 2x - 3y + 6 = 0$ és:

$$m_r = \frac{2}{3} \Rightarrow m_s = -\frac{3}{2}$$

(ja que $m_r \cdot m_s = -1$ perquè $r \perp s$)

El vector director pot ser $\vec{s} = (2, -3)$.

A més, $A(1, 3) \in s$.

$$\text{Per tant } s: \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \end{cases}$$

d) El punt mitjà de PQ és $m\left(\frac{-6}{2}, \frac{4}{2}\right) = (-3, 2)$

$$\vec{PQ} = (-6, -4)$$

$\Rightarrow \begin{cases} m(-3, 2) \in s \\ \vec{d}(4, -6) \text{ és un vector director de } s, \\ \text{ja que } \vec{d} \perp \vec{PQ} \end{cases}$

$$\text{Aleshores, } s: \begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 2 - 6t \end{cases}$$

Coordenades de punts

30. El punt $P(5, -2)$ és el punt mitjà del segment AB , i coneixem $A(2, 3)$. Troba B .
Si $B = (x, y)$, $\left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (5, -2)$

Si $B = (x, y)$ }
Com que P és punt mitjà de } \Rightarrow

$$\Rightarrow \left(\frac{x+2}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = (5, -2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+2 = 10 \rightarrow x = 8 \\ y+3 = -4 \rightarrow y = -7 \end{cases} \Rightarrow B = (8, -7)$$

31. Troba el punt simètric de $P(1, -2)$ respecte del punt $H(3, 0)$.

H és el punt mitjà entre P i el seu simètric.

Si $P'(x, y)$ és simètric de $P(1, -2)$ respecte de $H(3, 0) \Rightarrow H$ és el punt mitjà de $PP' \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left(\frac{x+1}{2}, \frac{y-2}{2}\right) = (3, 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+1 = 6 \rightarrow x = 5 \\ y-2 = 0 \rightarrow y = 2 \end{cases} \Rightarrow P'(5, 2)$$

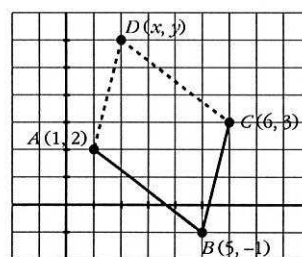
32. Troba les coordenades del vèrtex D del paral·lelogram $ABCD$, sabent que $A(1, 2)$, $B(5, -1)$ i $C(6, 3)$.

Sigui $D(x, y)$.

S'ha de complir: $\vec{AB} = \vec{DC}$

$$(5-1, -1-2) = (6-x, 3-y) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4 = 6-x \\ -3 = 3-y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 6 \end{cases} \Rightarrow D(2, 6)$$



33. Dóna les coordenades del punt P que divideix el segment d'extremes $A(3, 4)$ i $B(0, -2)$ en dues parts de manera que $\vec{BP} = 2\vec{PA}$.

Sigui $P(x, y)$.

Substituïm en la condició que ens imposen:

$$\vec{BP} = 2\vec{PA} \Rightarrow (x-0, y-(-2)) = 2(3-x, 4-y) \Rightarrow \begin{cases} x = 2(3-x) \\ y+2 = 2(4-y) \end{cases} \Rightarrow$$

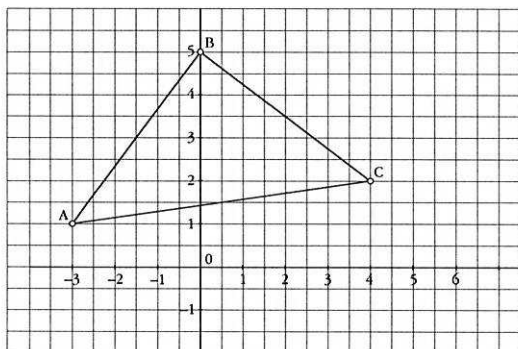
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 6-2x \\ y+2 = 8-2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 6 \\ 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \Rightarrow P(2, 2)$$

GEOMETRIA ANALÍTICA. PROBLEMES AFINS I MÈTRICS

$$c) a = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{40} \cdot \frac{10}{\sqrt{10}}}{2} = 10$$

45. Comprova que el triangle de vèrtexs $A(-3, 1)$, $B(0, 5)$ i $C(4, 2)$ és rectangle i troba la seva àrea.



$$A(-3, 1) \quad B(0, 5) \quad C(4, 2)$$

$$\left. \begin{aligned} \vec{BA} &= (-3, 1) - (0, 5) = (-3, -4) \\ \vec{BC} &= (4, 2) - (0, 5) = (4, -3) \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

\Rightarrow Són perpendiculars; per tant, el triangle és rectangle.

$$\begin{aligned} \text{dis } AC &= \sqrt{(4 - (-3))^2 + (2 - 1)^2} = \\ &= \sqrt{49 + 1} = \sqrt{50} \end{aligned}$$

Recta AC

$$A(-3, 1)$$

$$\vec{AC} = (4, 2) - (-3, 1) = (7, 1)$$

$$(x, y) = (-3, 1) + t(7, 1)$$

$$\begin{cases} x = -3 + 7t \\ y = 1 + t \end{cases} \text{ multipliquem per 7}$$

$$x = -3 + 7t$$

$$7y = 7 + 7t$$

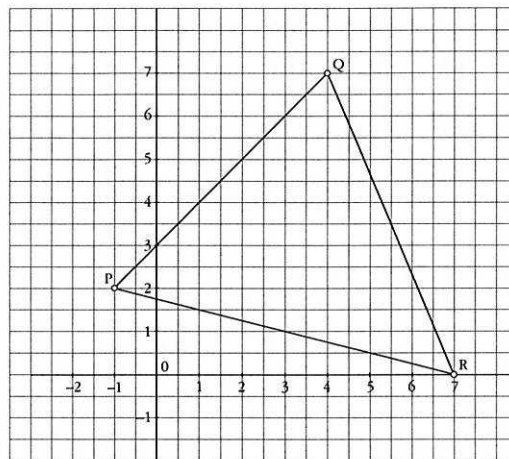
$$x - 7y = -10 \quad \text{Restem}$$

$$\text{Equació} = x - 7y + 10 = 0$$

$$\text{dis}(B, r) = \frac{|1 \cdot 0 + (-7) \cdot 5 + 10|}{\sqrt{1^2 + (-7)^2}} = \frac{25}{\sqrt{50}}$$

$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{50} \cdot \frac{25}{\sqrt{50}}}{2} = \frac{25}{2} = 12,5$$

46. Troba l'àrea del triangle els vèrtexs del qual són $P(-1, 2)$, $Q(4, 7)$, $R(7, 0)$.



$$P(-1, 2) \quad Q(4, 7) \quad R(7, 0)$$

$$\begin{aligned} \text{dis } PR &= \sqrt{7 - (-1)^2 + (0 - 2)^2} = \\ &= \sqrt{64 + 4} = \sqrt{68} \end{aligned}$$

Recta PR

$$\vec{PR} = (7, 0) - (-1, 2) = (8, -2)$$

$$(x, y) = (7, 0) + t(8, -2)$$

$$\begin{cases} x = 7 + 8t \\ y = -2t \end{cases}$$

$$y = -2t \text{ multipliquem per 4}$$

$$x = 7 + 8t$$

$$4y = -8t$$

$$x + 4y = 7 \quad \text{Sumem}$$

L'equació de la recta és: $x + 4y + 7 = 0$

$$\text{dis}(Q, r) = \frac{|1 \cdot 4 + 4 \cdot 7 - 7|}{\sqrt{1^2 + 4^2}} = \frac{25}{\sqrt{17}}$$

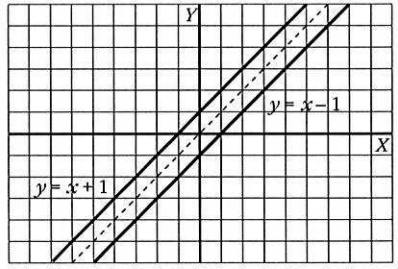
$$A = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{68} \cdot \frac{25}{\sqrt{17}}}{2} = 25$$

47. Troba la distància entre les rectes $r: x - 2y + 8 = 0$ i $r': -2x + 4y - 7 = 0$. Comprova que són paral·leles; pren un punt qualsevol de r i troba'n la distància a r' .

Els seus pendents són $m_r = \frac{1}{2} = m_{r'} \Rightarrow$ Són paral·lels.

FUNCIONS ELEMENTALS

$f[g(x)] = f(x - 1) = (x - 1) + 1 = x$
Són funcions inverses.



Pàgina 244

Per practicar

Domini de definició

22. Indica si els valors de x : 0; -2; 3,5; $\sqrt{2}$; -0,25 pertanyen al domini d'aquestes funcions:

- a) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$; b) $y = \frac{x}{x^2 - 4}$; c) $y = x - \sqrt{2}$;
 d) $y = \sqrt{x^2 + 4}$; e) $y = \sqrt{x - 3}$;
 f) $y = \sqrt{7 - 2x}$
 a) 3,5; $\sqrt{2}$; b) Tots excepte -2; c) Tots;
 d) Tots; e) 3,5; f) Tots.

23. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

- a) $y = \frac{3}{x^2 + x}$; b) $y = \frac{x}{(x - 2)^2}$;
 c) $y = \frac{x - 1}{2x + 1}$; d) $y = \frac{1}{x^2 + 2x + 3}$;
 e) $y = \frac{2}{5x - x^2}$; f) $y = \frac{1}{x^2 - 2}$
 a) $\mathbb{R} - \{-1, 0\}$; b) $\mathbb{R} - \{2\}$; c) $\mathbb{R} - \{-1/2\}$;

- d) \mathbb{R} ; e) $\mathbb{R} - \{0, 5\}$; f) $\mathbb{R} - \{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$

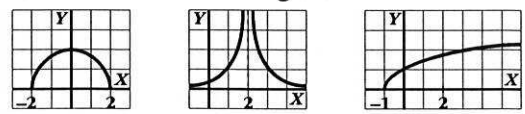
24. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

- a) $y = \sqrt{3 - x}$; b) $y = \sqrt{2x - 1}$;
 c) $y = \sqrt{-x - 2}$; d) $y = \sqrt{-3x}$
 a) $(-\infty, 3]$; b) $[1/2, +\infty)$; c) $(-\infty, -2]$;
 d) $(-\infty, 0]$

25. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

- a) $y = \sqrt{x^2 - 9}$; b) $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$
 c) $y = \sqrt{12x - 2x^2}$; d) $y = \sqrt{x^2 - 4x - 5}$
 e) $y = \frac{1}{\sqrt{4 - x}}$; f) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x}}$
 g) $y = \frac{-1}{x^3 - x^2}$; h) $y = \frac{2x}{x^4 - 1}$
 a) $x^2 - 9 \geq 0 \Rightarrow (x + 3)(x - 3) \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = (+\infty, -3] \cup [3, +\infty)$
 b) $x^2 + 3x + 4 \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R}$
 c) $12x - 2x^2 \geq 0 \Rightarrow 2x(6 - x) \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = [0, 6]$
 d) $x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Rightarrow (x + 1)(x - 5) \geq 0 \Rightarrow \text{Domini} = (-\infty, -1] \cup [5, +\infty)$
 e) $4 - x > 0 \Rightarrow 4 > x \Rightarrow \text{Domini} = (-\infty, 4)$
 f) $x^2 - 3x > 0 \Rightarrow x(x - 3) > 0 \Rightarrow \text{Domini} = (-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$
 g) $x^3 - x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 1 \Rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{0, 1\}$
 h) $x^4 - 1 = 0 \Rightarrow x^4 = 1 \Rightarrow x = \pm\sqrt[4]{1} = \pm 1 \Rightarrow \text{Domini} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

26. A la vista de la gràfica d'aquestes funcions, indica'n quin és el domini de definició i el recorregut.



Els dominis són, per ordre: $[-2, 2]$;

FUNCIONS ELEMENTALS

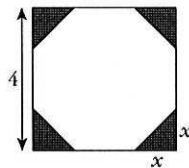
$(-\infty, 2) \cup (2, +\infty)$ i $[-1, +\infty)$.
Els recorreguts $[0, 2]$; $[0, +\infty)$ o $[0, +\infty)$.

27. Troba el domini de definició d'aquestes funcions:

- a) $y = \sqrt{x^2 - 2x}$; b) $y = \sqrt{x^2 + 3}$;
c) $y = \sqrt{5 - x^2}$; d) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$
a) $(-\infty, 0] \cup [2, +\infty)$; b) \mathbb{R} ; c) $[-\sqrt{5}, \sqrt{5}]$;
d) $(-\infty, 1] \cup [2, +\infty)$

28. D'un quadrat de 4 cm de costat, es tallen en els cantons triangles rectangles isòsceles els costats dels quals mesuren x .

- a) Escriu l'àrea de l'octàgon que resulta en funció de x .
b) Quin és el domini d'aquesta funció? I el seu recorregut?



- a) $A(x) = 16 - 2x^2$
b) Domini: $(0, 2)$
Recorregut: $(8, 16)$

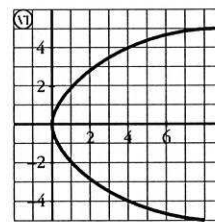
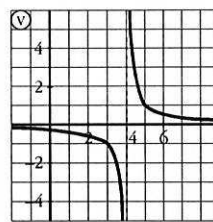
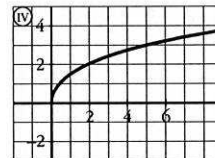
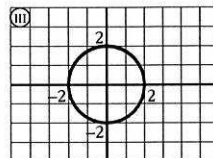
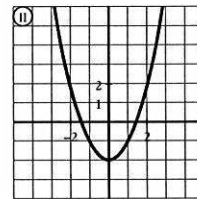
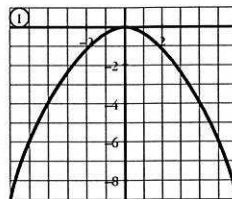
29. Una empresa fabrica envasos en forma de prisma de dimensions x , $x/2$ i $2x$ cm.

- a) Escriu la funció que dona el volum de l'envàs en funció de x .
b) Troba'n el domini sabent que l'envàs més gran té 1 l de volum. Quin és el seu recorregut?
a) $V(x) = x^3$
b) $(0, 10)$
Recorregut $(0, 1000)$

Gràfica i expressió analítica

30. Associa a cada una d'aquestes gràfiques la seva expressió analítica.

- a) $x^2 + y^2 = 2$ b) $y = \sqrt{2x}$
c) $y = x^2 - 2$ d) $y^2 = 4x$
e) $y = -0,25x^2$ f) $y = \frac{1}{x-4}$



N'hi ha dues que no són funcions. Di-gues quines.

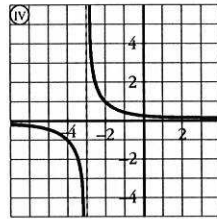
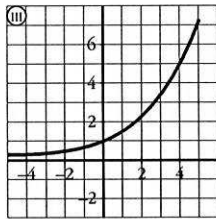
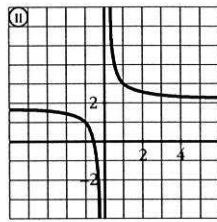
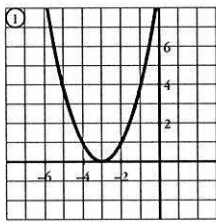
- a) III; b) IV; c) II; d) VI; e) I; f) V
III i VI no són funcions.

Pàgina 245

31. Associa amb cada una de les gràfiques una de les expressions analítiques següents:

- a) $y = \frac{1}{x} + 2$ b) $y = \frac{1}{x+3}$
c) $y = (x+3)^2$ d) $y = 1,5^x$

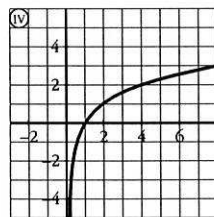
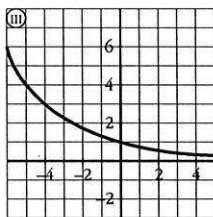
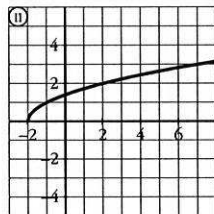
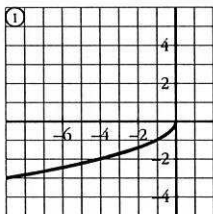
FUNCIONS ELEMENTALS



a) II; b) IV; c) I; d) III.

32. Associa amb cada gràfica l'expressió analítica que li correspongui entre les següents:

- a) $y = \sqrt{x+2}$
- b) $y = 0,75^x$
- c) $y = \log_2 x$
- d) $y = -\sqrt{-x}$



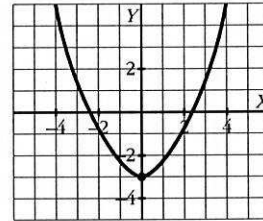
a) II; b) III; c) IV; d) I.

Representació de funcions elementals

33. Representa les paràboles següents i troba'n el vèrtex, els punts de tall amb

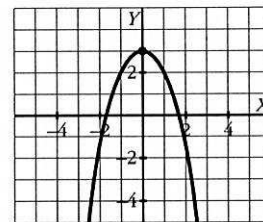
els eixos de coordenades i algun punt pròxim al vèrtex:

- a) $y = 0,5x^2 - 3$
- b) $y = -x^2 + 3$
- c) $y = 2x^2 - 4$
- d) $y = -\frac{3x^2}{2}$



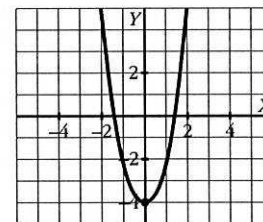
Vèrtex: (0, -3). Tall amb els eixos: $(-\sqrt{6}, 0)$, $(\sqrt{6}, 0)$, (0, -3)

b)



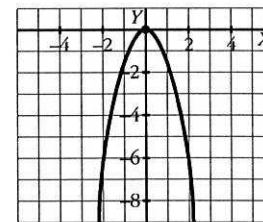
Vèrtex: (0, 3). Tall amb els eixos: $(\sqrt{3}, 0)$, $(-\sqrt{3}, 0)$, (0, 3)

c)



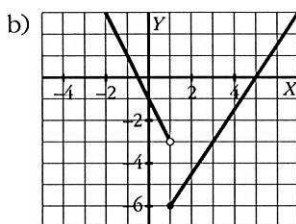
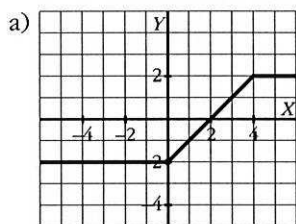
Vèrtex: (0, -4). Tall amb els eixos: $(\sqrt{2}, 0)$, $(-\sqrt{2}, 0)$, (0, -4)

d)



Vèrtex: (0, 0). Tall amb els eixos: (0, 0)

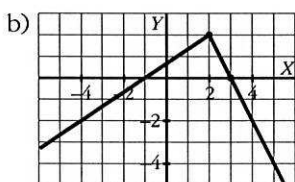
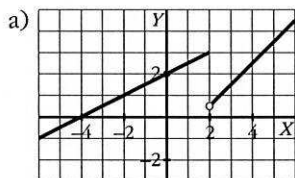
FUNCIÓNS ELEMENTALS



37. Representa:

a) $y = \begin{cases} x/2 + 2 & \text{si } x \leq 2 \\ x - 3/2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

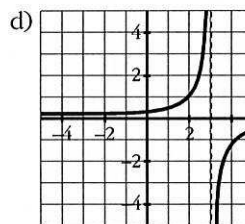
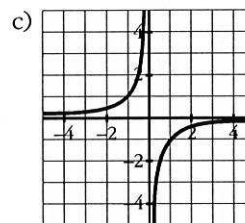
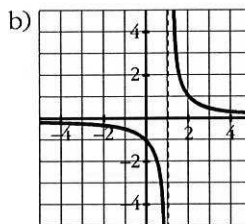
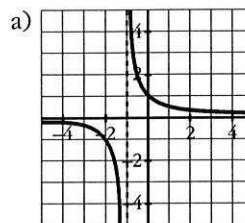
b) $y = \begin{cases} (2x + 2)/3 & \text{si } x < 2 \\ -2x + 6 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$



38. Representa les funcions següents:

a) $y = \frac{1}{x+1}$ b) $y = \frac{1}{x-1}$

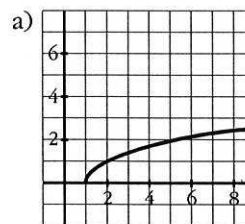
c) $y = \frac{-1}{x}$ d) $y = \frac{-1}{x-3}$



39. Representa les funcions següents:

a) $y = \sqrt{x-1}$ b) $y = -\sqrt{x+3}$;

c) $y = 2 + \sqrt{x}$ d) $y = 1 - \sqrt{x}$



FUNCIONS ELEMENTALS

Composició i funció inversa

43. Considera les funcions f i g definides per les expressions $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = \frac{1}{x}$.

Calcula:

a) $(f \circ g)(2)$ b) $(g \circ f)(-3)$

c) $(g \circ g)(x)$ d) $(f \circ g)(x)$

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{1}{10}$

c) $g(g(x)) = x$ d) $f(g(x)) = \frac{1+x^2}{x^2}$

44. Donades les funcions $f(x) = \cos x$ i $g(x) = \sqrt{x}$, troba:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(g \circ g)(x)$

a) $f[g(x)] = \cos\sqrt{x}$

b) $g[f(x)] = \sqrt{\cos x}$

c) $g[g(x)] = \sqrt[4]{x}$

45. Troba la funció inversa d'aquestes funcions:

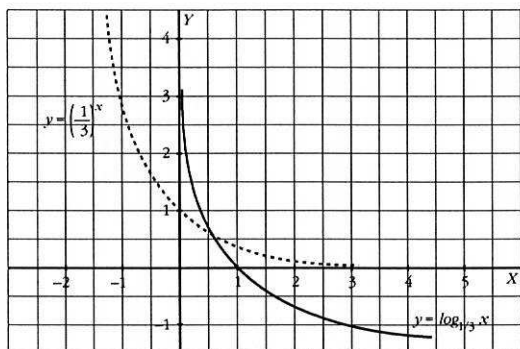
a) $y = 3x$; b) $y = x + 7$; c) $y = 3x - 2$

a) $x = 3y \Rightarrow y = \frac{x}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x}{3}$

b) $x = y + 7 \Rightarrow y = x - 7 \Rightarrow f^{-1}(x) = x - 7$

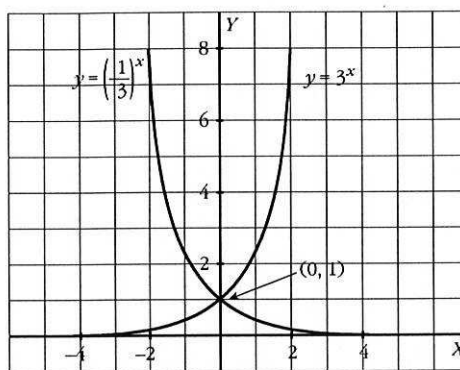
c) $x = 3y - 2 \Rightarrow y = \frac{x+2}{3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+2}{3}$

46. Representa la gràfica de $y = \log_{1/3} x$ a partir de la gràfica de $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$



47. Comprova que les gràfiques de $y = 3^x$ i $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ són simètriques respecte a l'eix OY .

Representa-les en els mateixos eixos.

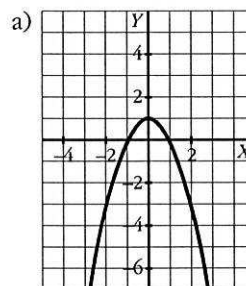
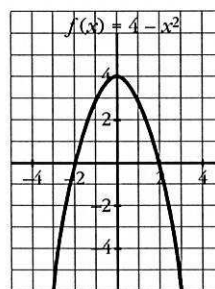


Transformacions en una funció

48. Representa $f(x) = 4 - x^2$ i, a partir d'aquesta, representa:

a) $g(x) = f(x) - 3$

b) $h(x) = f(x + 2)$



27. Comprova si la funció

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < 0 \\ x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \text{ és contínua en } x = 0.$$

Recorda que perquè f sigui contínua en $x = 0$, ha de verificar-se que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -1 = f(0)$$

És contínua en $x = 0$

28. Comprova si les funcions següents són contínues en els punts que s'hi indiquen:

a) $f(x) = \begin{cases} (3-x)/2 & \text{si } x < -1 \\ 2x+4 & \text{si } x > -1 \end{cases}$ en $x = -1$

b) $f(x) = \begin{cases} 2-x^2 & \text{si } x < 2 \\ (x/2) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x = 2$

c) $f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si } x \leq 1 \\ x+3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x = 1$

a) No, perquè no existeix $f(-1)$.

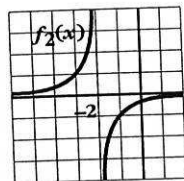
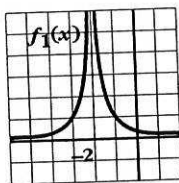
b) $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) = -2$. Sí és contínua en $x = 2$.

c) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \neq \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 4$. No és contínua en $x = 1$.

Pàgina 276

Visió gràfica del límit

29.



Aquestes són, respectivament, les gràfiques de les funcions:

$$f_1(x) = \frac{1}{(x+2)^2} \text{ i } f_2(x) = \frac{-1}{x+2}$$

Quin és el límit de cada una d'aquestes funcions quan $x \rightarrow -2$?

Observa la funció quan $x \rightarrow -2$ per l'esquerra i per la dreta.

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f_1(x) = +\infty$$

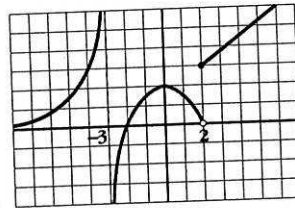
$$\lim_{x \rightarrow -2} f_1(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f_2(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f_2(x) = -\infty$$

No existeix $\lim_{x \rightarrow -2} f_2(x)$

30. Sobre la gràfica de la funció $f(x)$, troba:



a) $\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x)$; b) $\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; e) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$; f) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$;

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; h) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$

a) $+\infty$; b) $-\infty$; c) 2; d) 0; e) 0; f) 3; g) $+\infty$; h) 0

Límit en un punt

31. Calcula els límits següents:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(5 - \frac{x}{2}\right)$; b) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - x)$;

c) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1-x}{x-2}$; d) $\lim_{x \rightarrow 0,5} 2^x$;