



INSTITUT CASTELLBISBAL

Departament de Matemàtiques

EXERCICIS DE MATEMÀTIQUES PELS ALUMNES DE QUART

Els exercicis proposats a continuació són els que us recomanem fer els professors de matemàtiques de 4t d'ESO pels alumnes que heu aprovat la matèria.

Són exercicis de radicals, Ruffini equacions i inequacions i per les persones que fessin les matemàtiques del científic-tecnològic, també trigonometria.

Corregiu els exercicis amb el solucionari adjunt tot puntuant 1 punt per cada apartat correcte (si teniu algun apartat malament intenteu trobar l'errada).

Si els resoleu i ho lliureu al professor que tingueu a 1r de Batxillerat us ho comptarà favorablement.

NOM:

Data de lliurament: Proper Setembre

**RADICALS****PROPIETATS**

- $\sqrt[n]{b} = a$ si $a^n = b$. n és l'índex de l'arrel i b és el radicand.
- $\sqrt[2n]{-b}$ si l'índex és parell i el radicand és negatiu l'arrel no existeix.
- $\sqrt[2n]{b} = \pm a$ si l'índex és parell i el radicand és positiu l'arrel té dues solucions, la positiva i la negativa.
- $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$
- $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$
- $\sqrt[n]{a^m} = a^q \cdot \sqrt[n]{a^r}$ on $m = n \cdot q + r$
- $x\sqrt{a} + y\sqrt{a} = (x + y)\sqrt{a}$
- $(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$
- $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 \neq a + b$

1. Quines igualtats són certes i quines falses?, justifica la resposta.

- a) $\sqrt{16} + \sqrt{9} = \sqrt{25}$
- b) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{6}$
- c) $(\sqrt{16} + \sqrt{9})^2 = 16 + 9 = 25$

2. Digues si són certes les següents igualtats i corregeix-les si cal.

- a) $\sqrt{49} = \pm 7$
- b) $\sqrt[4]{16} = \pm 2$
- c) $\sqrt[3]{-27} = 3$
- d) $\sqrt[3]{125} = \pm 5$
- e) $\sqrt{-25} = -5$
- f) $\sqrt[5]{-32} = -2$



3. Extreu fora del radical:

a) $\sqrt[5]{32}$

b) $\sqrt{108}$

c) $\sqrt[3]{128}$

d) $\sqrt[6]{64}$

e) $\sqrt{500}$

f) $\sqrt{180}$

4. Efectua les següents operacions:

a) $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt[4]{3^2}$

b) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{2}$

c) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[4]{8}$

d) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$

e) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{32}$

f) $(2 \cdot \sqrt{2})^2$

g) $3 \cdot \sqrt{7}^2$

h) $2\sqrt{125} - 3\sqrt{500} + \sqrt{5}$

i) $\sqrt{80} + 5\sqrt{45} - 2\sqrt{245} - \sqrt{20}$



j) $-\sqrt{8} + 3\sqrt{2} - \sqrt{18} + \sqrt{32}$

k) $\sqrt{20} + 5\sqrt{3} - 3\sqrt{5} + 2\sqrt{75}$

l) $4\sqrt{4} - 2\sqrt{9} + 3\sqrt{25} - 5\sqrt{49}$

m) $(1 + 3\sqrt{5})^2$

n) $(\sqrt{5} - \sqrt{3})^2$

o) $(\sqrt{2} - \sqrt{6}) \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{6})$



RACIONALITZACIÓ

L'objectiu és eliminar les arrels del denominador.

- $\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2^2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$
- $\frac{1}{2\sqrt{3}} = \frac{1 \cdot \sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3^2}} = \frac{\sqrt{3}}{2 \cdot 3} = \frac{\sqrt{3}}{6}$
- $\frac{7}{\sqrt[5]{5^2}} = \frac{7 \cdot \sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^2} \cdot \sqrt[5]{5^3}} = \frac{7\sqrt[5]{5^3}}{\sqrt[5]{5^5}} = \frac{7\sqrt[5]{5^3}}{5}$
- $\frac{2}{5-\sqrt{2}} = \frac{2 \cdot (5+\sqrt{2})}{(5-\sqrt{2})(5+\sqrt{2})} = \frac{2 \cdot (5+\sqrt{2})}{5^2 - \sqrt{2}^2} = \frac{2 \cdot (5+\sqrt{2})}{25-2} = \frac{2 \cdot (5+\sqrt{2})}{23} = \frac{10+2\sqrt{2}}{23}$
- $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3} \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{\sqrt{3^2} + \sqrt{6}}{\sqrt{3^2} - \sqrt{2}^2} = \frac{3+\sqrt{6}}{3-2} = \frac{3+\sqrt{6}}{1} = 3+\sqrt{6}$

5. Racionalitza:

a) $\frac{4}{\sqrt{2}}$

b) $\frac{4}{\sqrt[4]{8}}$

c) $\frac{3}{2\sqrt{3}}$

d) $\frac{23}{7-\sqrt{3}}$



INS CASTELLBISBAL

Departament de Matemàtiques

e) $\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

f) $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6} - \sqrt{2}}$

g) $\frac{5}{2\sqrt{5}}$

h) $\frac{\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}}$



REGLA DE RUFFINI

S'utilitza per dividir dos polinomis on el divisor és del tipus $x \pm a$.

Exemple:

$$(x^4 - 3x^2 + 2x - 5) \div (x - 3)$$

	1	0	-3	2	-5
3		3	9	18	60
	1	3	6	20	55

El quocient de la divisió és $Q(x) = x^3 + 3x^2 + 6x + 20$ i el residu és 55.

RECORDA que un polinomi és divisible entre un altre si el residu és 0.

1. Aplicant la regla de Ruffini divideix $P(x) = 2x^5 - 5x^3 + 6$ per $x - 1$.
2. Troba a per tal que el residu de la divisió: $(x^3 + ax^2 + 2x - 1) \div (x - 3)$ sigui 68.
3. Troba el valor de a per tal que $P(x) = x^3 - x^2 + a$ sigui divisible per $x + 2$.



4. Fes la divisió per la regla de Ruffini indicant el quocient i el residu de les divisions:

- a) $(x^3 - x^2 - 7x + 3) \div (x - 3)$
- b) $(3x^4 + 2x^3 + 3x + 1) \div (x + 1)$
- c) $(4x^5 + 2x^3 + x^2 - x - 5) \div (x - 3)$
- d) $(-2x^3 + 6x^2 + 8x + 3) \div (x + 1)$

5. Sense fer la divisió, troba el residu de dividir $P(x) = x^5 - 3x^4 + 6x^2 - 8x + 7$ per $x - 2$.

6. Troba el residu de la divisió $(x^7 - 2x^6 + x^5 + 5x^4 - x^3 + 7x^2 + x - 1) \div (x - 1)$.

7. Esbrina quina de les divisions és exacta sense fer-les:

- a) $(x^3 - x + 1) \div (x - 2)$
- b) $(x^5 + x^4 - 2) \div (x - 1)$



8. Troba m perquè el residu de la divisió $(x^3 + mx^2 + 6x - 4) \div (x + 2)$ sigui 0 .
9. Troba el valor de a perquè en dividir $P(x) = ax^3 - x^2 + 1$ per $x - 2$ el residu sigui 13 .
10. Troba k perquè $P(x) = -x^4 + 5x^3 - kx + 8$ sigui divisible per $x + 1$.
11. Troba k perquè $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + k$ sigui divisible per $x - 3$.
12. Troba k perquè en dividir $P(x) = -3x^4 + 5x^3 - kx + 4$ per $x + 3$ doni 1 de residu.



EQUACIONS I INEQUACIONS

1. Resol les equacions següents:

a.-) $5 \cdot (x - 3) = 10$

b.-) $1 - 3x = 4x + 5 - (4 - x)$

c.-) $15x - 5 \cdot (x - 1) = 120 - 5x$

d.-) $7 + 3 \cdot (2 + x) - 3x = 9 + 2x$

e.-) $4 - 2 \cdot (x + 3) = 13 - 5 \cdot (x + 4)$

f.-) $1 - 3x - 2 \cdot (x - 1) = 5 \cdot (1 - 2x) + 7$



2. Resol les equacions següents:

a.-) $\frac{2x}{5} - 1 = x + \frac{1}{3}$

b.-) $\frac{x-3}{7} + \frac{x+1}{2} = \frac{3}{14}$

c.-) $\frac{2 \cdot (x-1)}{9} - \frac{6+2x}{3} = 4$

d.-) $2 \cdot (x-1) = \frac{x-3}{2} - \frac{1-2x}{6}$

e.-) $\frac{x-2}{2} - \frac{x-3}{3} - \frac{x-4}{4} = 0$



EQUACIONS DE SEGON GRAU

Totes les equacions de segon grau es resoldran mitjançant una fórmula:

$$ax^2 + bx + c = 0$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Per exemple:

$$3x^2 - 5x + 2 = 0$$
$$\begin{array}{l} a = 3 \\ b = -5 \\ c = 2 \end{array} \quad x = \frac{5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{6} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{6} = \frac{5 \pm 1}{6} = \begin{cases} \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1 \\ \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

3. Resol les equacions de segon grau següents:

a.-) $x^2 + 5x + 6 = 0$

b.-) $2x^2 + 11x - 6 = 0$

c.-) $6x^2 - 5x - 12 = -6$

d.-) $4x^2 + 12x - 16 = 12x - 7$



e.-) $7x^2 - 5x + 12 = 5x - 13 + 2x^2$

f.-) $(3 - 5x) \cdot (2 + 4x) = -12$

g.-) $(3 - 5x) \cdot (2x + 7) = 3x$

h.-) $(x + 5)^2 = 16$

i.-) $3x \cdot (1 - 5x) = 0$



4. Resol:

a.-) $(4+x)^2 - (2x+5) \cdot (3x+4) = x^2 - 1 + (2x+5) \cdot (1-x)$

b.-) $\frac{3x^2}{4} + \frac{5x}{6} + \frac{1}{3} = \frac{7x}{2} - x$

c.-) $\frac{7x^2}{3} + \frac{5x}{4} = \frac{5x^2}{6} - \frac{3x}{2}$

d.-) $(3x-2)^2 + (5x-3) \cdot (2x+4) = (3x-4) \cdot (5x+2)$



EQUACIONS BIQUADRADES

Són del tipus: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$

Es resolen fent el canvi $y = x^n$, i fent l'equació de segon grau $ay^2 + by + c = 0$.

Finalment trobem $x = \sqrt[n]{y}$ per a totes les possibles solucions de y .

Per exemple:

$$x^4 - 8x^2 - 9 = 0$$

Fem el canvi $y = x^2$, quedant $y^2 - 8y - 9 = 0$

$$y = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 36}}{2} = \frac{8 \pm 10}{2} = \begin{matrix} \nearrow 9 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

$$\text{Ara } x = \sqrt{y}$$

$$x = \sqrt{9}$$

$$x = \pm 3$$

$$x = \sqrt{-1}$$

No té solució

5. Resol:

a.-) $x^4 - 2x^2 + 1 = 0$

b.-) $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

c.-) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$

d.-) $4x^4 - 17x^2 + 4 = 0$



MÈTODE D'IGUALACIÓ

Aïllem la mateixa incògnita a les dues equacions:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 14 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \longrightarrow x = \frac{5 + 3y}{2} \\ \longrightarrow x = \frac{14 - 2y}{3} \end{array}$$

Igualem els resultats i resollem l'equació resultant:

$$\begin{aligned} \frac{5 + 3y}{2} &= \frac{14 - 2y}{3} \\ 3(5 + 3y) &= 2(14 - 2y) \\ 15 + 9y &= 28 - 4y \\ 9y + 4y &= 28 - 15 \\ 13y &= 13 \\ y &= \frac{13}{13} = 1 \end{aligned}$$

Substituïm a una de les equacions inicials i trobem l'altre incògnita:

$$x = \frac{5 + 3 \cdot 1}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

6. Resol pel mètode de igualació els següents sistemes d'equacions:

$$\text{a.-)} \left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \right.$$

$$\text{b.-)} \left\{ \begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{array} \right.$$



$$\text{c. -)} \begin{cases} x + 2y = 6 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$$

MÈTODE DE SUBSTITUCIÓ

Aïllem una incògnita d'una de les dues equacions:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x + 2y = 6 \end{cases} \longrightarrow y = 5 - x$$

Substituïm a l'altre equació i resollem l'equació resultant:

$$x + 2(5 - x) = 6$$

$$x + 10 - 2x = 6$$

$$x - 2x = 6 - 10$$

$$-x = -4$$

$$x = 4$$

Calculem la incògnita que falta:

$$y = 5 - 4 = 1$$

7. Resol pel mètode de substitució els següents sistemes d'equacions:

$$\text{a. -)} \begin{cases} x + 2y = 6 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$



INS CASTELLBISBAL

Departament de Matemàtiques

$$\text{b.-)} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 5 \\ x + 3y = 9 \end{array} \right\}$$

$$\text{c.-)} \quad \left. \begin{array}{l} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 2y = 14 \end{array} \right\}$$



MÈTODE DE REDUCCIÓ

L'objectiu és que al sumar les dues equacions s'elimini una de les dues incògnites.

$$\begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \cdot 3 \\ \cdot (-2) \end{array} \right. \longrightarrow \begin{array}{l} 9x - 6y = 12 \\ -4x + 6y = -2 \end{array}$$
$$\hline 5x = 10$$
$$x = \frac{10}{5} = 2$$

Quan tenim una incògnita, substituïm a una de les equacions inicials i la resollem:

$$\begin{array}{l} 3 \cdot 2 - 2y = 4 \\ -2y = 4 - 6 \\ -2y = -2 \\ y = \frac{-2}{-2} = 1 \end{array}$$

8. Resol pel mètode de reducció els següents sistemes d'equacions:

a.-)
$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 0 \\ x + y = 8 \end{array} \right.$$

b.-)
$$\left\{ \begin{array}{l} 4x - y = 5 \\ 3x + 2y = 12 \end{array} \right.$$



INS CASTELLBISBAL

Departament de Matemàtiques

$$\text{c.-)} \quad \left. \begin{array}{l} 3x - 2y = 4 \\ 2x - 3y = 1 \end{array} \right\}$$



INEQUACIONS

Exemples:

1. Resoldre: $5x + 5 < 2x + 11$

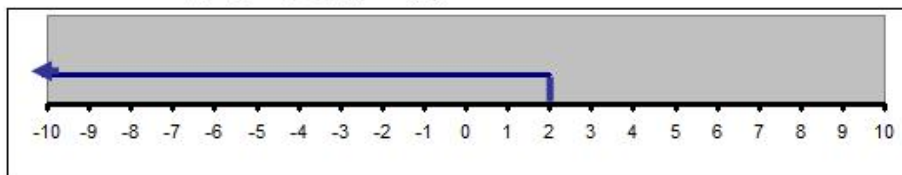
$$5x - 2x < 11 - 5$$

$$3x < 6$$

$$X < \frac{6}{3}$$
 Aïllem la x (com que el coeficient de la x és positiu es mantindrà

el sentit de la desigualtat).

$$X < 2 \rightarrow X \in (-\infty, 2)$$



9.- Resol les següents inequacions:

a) $3(x + 1) + 3 < 2$

b) $5x - 3(x + 2) \geq 7 - 3x$

c) $4 \geq 2(5 - x) + 3(2x + 3)$

d) $(x + 2)^2 + 7 < x^2 - 3x + 1$

**Recorda:**

Una inequació de 2n grau amb una incògnita és una desigualtat entre dues expressions algebraïques on la incògnita està elevada com a màxim a 2.

Exemple:

$$3x^2 - 2x + 7 < 4 - x$$

Recorda:

Per resoldre una inequació de 2n grau amb una incògnita, cal:

- Traslladar tots els termes de la inequació al primer membre i reduir els termes semblants.
- Resoldre l'equació de 2n grau igualada a 0.
- Senyalem les solucions a la recta real. Agafem un valor dintre de cada interval i comprovem si verifica o no l'inequació.

Exemple:

$$3x^2 - 4x + 4 > 2x^2 + 2x - 4$$

$$1r) x^2 - 6x + 8 > 0 \quad (\text{Volem } +)$$

2n) Resolem l'equació:

$$x^2 - 6x + 8 = 0 \Rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2} = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \end{cases}$$

3r) Els intervals serien $(-\infty, 2)$, $(2, 4)$, $(4, +\infty)$

interval	x	$x^2 - 6x + 8$	Solució
$(-\infty, 2)$	$x = 0$	$0^2 - 6 \cdot 0 + 8 = 8 > 0$	SI
$(2, 4)$	$x = 3$	$3^2 - 6 \cdot 3 + 8 = -1 < 0$	NO
$(4, +\infty)$	$x = 5$	$5^2 - 6 \cdot 5 + 8 = 3 > 0$	SI

Resposta: $(-\infty, 2) \cup (4, +\infty)$

10.- Resol les següents inequacions de 2n grau:

a) $x^2 - x - 2 < 0$



INS CASTELLBISBAL

Departament de Matemàtiques

b) $2x^2 - 3x + 1 > 0$

c) $x^2 - x > 2x^2 - 2$

d) $x^2 + 6 < 4$

e) $x^2 - 2x + 1 \geq 0$



TRIGONOMETRIA

RESOLUCIÓ DE PROBLEMES MITJANÇANT TRIANGLES RECTANGLES

Moltes figures es poden descompondre en suma de triangles rectangles. Aleshores, aplicant el teorema de Pitàgores i les definicions de les raons trigonomètriques es poden resoldre molts problemes.

1. Calcula l'angle d'elevació d'una carretera que té un pendent del 12%, és a dir, per cada 100 metres en pla horitzontal puja 12 m d'altura.

2. Una escala de bombers està situada sobre una casa on s'ha calat foc. Si l'escala té 7 m de llarg i arriba a una altura de 6 m:
 - a) A quina distància de la paret està col·locada la base de l'escala?

 - b) Quin angle forma l'escala amb el terra?



6. En Pau fa volar un estel. El fil és de 10 m i l'angle d'elevació és de 75° .
Esbrina a quina altura s'ha enlairat l'estel.

7. La Mireia fa 1'65 m d'alçària i projecta una ombra de 1'8 m. Quina altura té un arbre que projecta una ombra de 15 m?

8. L'àrea d'un triangle rectangle és de 396 m^2 i un dels catets fa 22 m.
Calcula el valor de l'altre catet, i el valor dels angles.



9. Des de la base d'una muntanya mesurem l'angle d'elevació i la distància a la part més alta, i obtenim 33° i 1200 m. Calcula l'altura de la muntanya.
10. Troba l'àrea d'un octàgon regular de 10 cm de costat.
11. L'angle d'observació d'una muntanyeta des de la plana és de 25° ; si ens hi apropem 50 m per la plana, l'angle és de 45° . Troba l'altura de la muntanya.



12. Un cos que pesa 50 kg llisca per un pla inclinat que forma 30° amb l'horitzontal. Expressa el valor de les forces en que es descompon el pes.

13. Tenim un rombe les diagonals del qual fan 15 cm i 6 cm. Calcula'n els angles.

14. Des del mirador d'un far s'observa un vaixell amb un angle d'observació de 62° . Si ens trobem a una altura de 45 m, a quina distància és el vaixell?



15. Una escultura de 3 m d'altura és situada sobre un prisma de pedra. Des d'un punt de l'horitzontal que passa per la base del prisma es pren la mida dels angles d'observació a l'extrem superior del prisma i de l'estàtua que són 32° i 47° , respectivament. Troba l'altura del prisma i la distància horitzontal des del punt d'observació al prisma.
16. Per trobar l'alçada d'una torre s'observa el seu punt més alt des d'un punt A: la inclinació de la visual és de 12° . Si ens acostem 100 m al peu de la torre i repetim l'observació, la inclinació de la visual és de 36° . Troba l'alçada de la torre.
17. Des d'un costat del riu veig un arbre sota un angle de 35° amb l'horitzontal del riu. Si m'apropo 15 m, veig el mateix arbre sota un angle de 40° amb l'horitzontal del riu. Calcula l'amplada del riu.