4 Equacions

En moltes situacions cal trobar un nombre que verifiqui una condició expressada per mitjà d'una igualtat.

Per resoldre aquest tipus de problemes es fan servir les equacions.

Garantir l'estabilitat d'un edifici implica resoldre nombroses equacions.

El llançament d'un transbordador espacial es basa en mètodes de resolució d'equacions complicades.

1. Equacions i identitats

Una **equació** és una igualtat entre dues expressions algèbriques.

- En les equacions, les lletres desconegudes s'anomenen **incògnites**.

  Per exemple, $7x - 11 = 24$ i $x^2 - 11x + 28 = 0$ són equacions la incògnita de les quals és x.

- L'expressió algèbrica situada a l'esquerra del signe = s'anomena **primer membre** de l'equació i la que es troba a la dreta, **segon membre**. Cadascun dels sumands és un **terme**.

  Per exemple, en l'equació $7x - 11 = 24$, el primer membre és $7x - 11$ i el segon membre és 24. Els seus termes són $7x$, -11 i 24.

- El **grau d'una equació** amb una incògnita és l'exponent més gran amb què aquesta apareix després d'efectuar les operacions indicades en l'equació.

  Per exemple, $7x - 11 = 24$ és una equació de primer grau, mentre que $(x - 2) \cdot (x - 3) = 0$ és una equació de segon grau, ja que després de multiplicar s'obté $x^2 - 5x + 6 = 0$.

- Els nombres que substituïts en el lloc de les incògnites fan que es verifiqui l'equació, és a dir, donen lloc a una igualtat numèrica, s'anomenen **solucions de l'equació**.

  Per exemple, $x = 5$ és solució de $7x - 11 = 24$, perquè si se substitueix x per 5, s'obté: $7 \cdot 5 - 11 = 24 \Rightarrow 35 - 11 = 24 \Rightarrow 24 = 24$

  Resoldre una equació és trobar totes les seves solucions.

1.1 Identitats

Un cas particular d'equacions són les *identitats*.

Una **identitat** és una equació que es verifica per a qualsevol valor de les incògnites.

Així, per exemple:

- La igualtat algèbrica $4x - 2(12 - 3x) = 10x - 24$ és una identitat, perquè es verifica per a qualsevol valor de la variable x.
- Els productes notables són identitats, perquè es verifiquen per a qualssevol valors de les variables a i b:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Etimologia

El terme **equació** procedeix del llatí *aequatio*, "igualació".

Nombre de solucions

Si $P(x)$ és un polinomi de grau n, l'equació $P(x) = 0$ té com a molt n solucions.

Aquest resultat, conegut com a *teorema fonamental de l'àlgebra*, va ser demostrat pel matemàtic alemany J. K. F. Gauss el 1799.

ACTIVITATS

1. Indica el grau d'aquestes equacions:

a) $4x - 5 = 21$

b) $x^3 - 9x = 0$

c) $(x - 2)(x - 4) = 0$

2. Digues quines d'aquestes equacions són identitats:

a) $x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4$

b) $2x - 26 = 4 - x$

c) $x^2 - (x - 5)^2 = 10x - 25$

3. Esbrina si:

a) -3 és solució de l'equació $x + 7 = 25 - 2x$.

b) 2 i 4 són solucions de $(x - 4)(4 - 2x) = 0$.

c) 2 i 3 són solucions de $x^2 + 6 = 5x$.

2. Equacions equivalents

S'anomenen **equacions equivalents** les que tenen les mateixes solucions.

Per exemple, les equacions $4x - 3 = 22 - x$ i $8x - 8 - 3x = 17$ són equivalents, perquè $x = 5$ és solució de totes dues equacions. Ho comprovarem:

– Comprovem que $x = 5$ és solució de l'equació $4x - 3 = 22 - x$:

$$4 \cdot 5 - 3 = 22 - 5 \Rightarrow 20 - 3 = 17 \Rightarrow 17 = 17$$

– Comprovem que $x = 5$ és solució de l'equació $8x - 8 - 3x = 17$:

$$8 \cdot 5 - 8 - 3 \cdot 5 = 17 \Rightarrow 40 - 8 - 15 = 17 \Rightarrow 17 = 17$$

2.1 Regles de transformació d'equacions

Per transformar una equació en una altra d'equivalent, però més senzilla, apliquem aquestes regles de transformació:

Quan sumem o restem un mateix nombre o polinomi als dos membres d'una equació, s'obté una altra equació equivalent.

A la pràctica, aquesta regla significa que si un terme es troba en un membre de l'equació sumant, es pot passar a l'altre membre restant:

$$2x = 7x + 7 \Rightarrow 2x - 7x = 7$$

I a l'inrevés, si un terme es troba en un membre restant, es pot passar a l'altre membre sumant:

$$2x - 3 = 7x + 4 \Rightarrow 2x = 7x + 4 + 3$$

L'aplicació de la regla anterior a una equació donada s'anomena **transposició de termes**.

Quan multipliquem o dividim els dos membres d'una equació per un mateix nombre diferent de zero, s'obté una altra equació equivalent.

A la pràctica, aquesta regla significa que si un nombre multiplica un membre d'una equació, es pot passar dividint a l'altre membre:

$$8x = 17 - 3x \Rightarrow x = \frac{17 - 3x}{8}$$

I a l'inrevés, si un nombre està dividint un membre, es pot passar multiplicant a l'altre membre:

$$2x = \frac{x - 3}{6} \Rightarrow 6 \cdot 2x = x - 3 \Rightarrow 12x = x - 3$$

El pare de l'àlgebra

El matemàtic àrab Al-Jwarizmi (780?-850?) és considerat el pare de l'àlgebra.

La seva obra més important, *Al-Jabr w'al muqabalah*, tracta sobre diverses tècniques de resolució d'equacions.

La traducció al llatí d'aquesta obra va tenir una gran influència en la matemàtica europea posterior.

Escultura d'Al-Jwarizmi a Khiva (Uzbekistan).

ACTIVITATS

4. Escriu l'equació equivalent que s'obté en sumar 3 als dos membres:

$$5x - 3 = 4x + 9$$

5. Troba l'equació equivalent que s'obté en multiplicar per 2 tots dos membres:

$$\frac{x}{2} - 8 = 5x$$

6. Si es multipliquen els dos membres d'una equació per la incògnita, pots estar segur d'obtenir una equació equivalent? Posa'n un exemple.

3. Equacions de primer grau

Una **equació** és **de primer grau amb una incògnita** si, aplicant les regles de transformació, es pot expressar en la forma:

$ax + b = 0$, on a i b són nombres reals.

Es poden donar aquests casos:

- Si a i b són zero, l'equació té infinites solucions, ja que $0x + 0 = 0$ és cert per a qualsevol valor de x.
- Si a és zero i b és diferent de zero, no té solució, ja que:

$$0x + b = 0 \;\Rightarrow\; b = 0, \text{ la qual cosa no pot passar.}$$

- Si a és diferent de zero, aleshores té una única solució:

$$ax + b = 0 \;\Rightarrow\; ax = -b \;\Rightarrow\; x = \frac{-b}{a}$$

Per tant, tota equació de primer grau amb una incògnita podrà tenir infinites solucions, cap solució, o una única solució.

3.1 Resolució

Per resoldre una equació de primer grau amb una incògnita has de seguir aquests passos:

1. Si l'equació té denominadors, els suprimim multiplicant tots els termes pel m.c.m. dels denominadors.
2. Si hi ha parèntesis, els suprimim.
3. Transposem termes. És a dir, passem a un membre els termes que contenen la incògnita, i a l'altre els que no la contenen.
4. Reduïm els termes semblants.
5. Aïllem la incògnita.
6. Comprovem la solució obtinguda substituint-la en el lloc de la incògnita en l'equació inicial.

EXEMPLES

1 Resol l'equació $5x + 11 = 35 - 3x$.

Com que no hi ha denominadors ni parèntesis, comencem transposant termes: $5x + 3x = 35 - 11$

Tot seguit, reduïm els termes semblants: $8x = 24$

Aïllem la incògnita: $x = \dfrac{24}{8} = 3$

Finalment, comprovem la solució substituint x per 3 en l'equació inicial: $5 \cdot 3 + 11 = 35 - 3 \cdot 3 \;\Rightarrow\; 26 = 26$

Nota

En aquest tema només estudiarem les equacions amb una incògnita.

Tingues-ho en compte

Qualsevol identitat es pot expressar en la forma $0x = 0$.

Per tant, pot considerar-se com una equació amb infinites solucions.

Mètode de tempteig

En equacions de primer grau senzilles podem intuir quina és la solució sense resoldre-les.

Per fer-ho, triem un valor inicial i el substituïm a l'equació per comprovar si és solució. Si no ho és, modifiquem el valor en funció del resultat obtingut fins a trobar la solució.

- Busca, per aquest mètode, la solució de $2x + 8 = 12$.

2 Resol l'equació $5(x + 1) = 3(x - 5)$.

Com que l'equació no té denominadors, es comença suprimint els parèntesis:

$$5x + 5 = 3x - 15$$

Tot seguit, transposem termes: $5x - 3x = -15 - 5$

Reduïm els termes semblants: $2x = -20$

Aïllem la incògnita: $x = \dfrac{-20}{2} = -10$

Finalment, comprovem la solució obtinguda substituint a l'equació inicial x per -10:

$$5 \cdot (-10 + 1) = 3 \cdot (-10 - 5) \Rightarrow 5 \cdot (-9) = 3 \cdot (-15) \Rightarrow -45 = -45$$

3 Resol l'equació $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{4(x + 1)}{3} = 9$.

Per suprimir denominadors, multipliquem els dos membres de l'equació pel mínim comú multiple dels denominadors, que és m.c.m. (2, 3) = 6:

$$6 \cdot \frac{3x}{2} - 6 \cdot \frac{4(x + 1)}{3} = 6 \cdot 9 \Rightarrow 3 \cdot 3x - 2 \cdot 4(x + 1) = 54 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 9x - 8(x + 1) = 54$$

Suprimim els parèntesis: $9x - 8x - 8 = 54$

Transposem termes: $9x - 8x = 54 + 8$

Reduïm termes semblants: $x = 62$

Ja hem obtingut la solució: $x = 62$. La comprovem substituint x per 62 a l'equació inicial:

$$\frac{3 \cdot 62}{2} - \frac{4(62 + 1)}{3} = 9 \Rightarrow \frac{186}{2} - \frac{252}{3} = 9 \Rightarrow 93 - 84 = 9 \Rightarrow 9 = 9$$

Ho sabies?

La paraula àrab *al-jabr*, de la qual procedeix la nostra **àlgebra**, significa "restitució" en aquesta llengua.

La utilització d'aquest terme amb sentit matemàtic és deguda al fet que, per als matemàtics àrabs, resoldre una equació representava *restituir* el valor de les incògnites.

El que potser et sorprendrà és que àlgebra antigament també es feia servir per referir-se a l'"art de reduir osssos fracturats". Així es fa servir, per exemple, a *El Quixot*.

ACTIVITATS

7. Resol aquestes equacions:

a) $5x = -20$ b) $8x = -96$ c) $-4x = -6$

8. Esbrina la solució d'aquestes equacions:

a) $\dfrac{x}{3} = 5$ c) $\dfrac{x + 7}{2} = 11$ e) $\dfrac{x}{8} = \dfrac{-3}{4}$

b) $\dfrac{x}{4} = -8$ d) $\dfrac{8 - x}{3} = 13$ f) $\dfrac{x + 1}{3} = x$

9. Resol:

a) $5x + 4 = 2x - 8$ c) $20 - 4x = 24 - 8x$

b) $11 - x = 3x - 5$ d) $4x - 3 = 14x + 7$

10. Troba la solució d'aquestes equacions:

a) $3(x - 2) = x + 8$ c) $5(x - 1) = -x + 19$

b) $2(x - 3) = x - 5$ d) $6(x - 3) = 3(x + 1)$

11. Esbrina'n la solució:

a) $\dfrac{x + 6}{9} + \dfrac{x}{3} = 6$ d) $\dfrac{25 - x}{4} + \dfrac{7 - 4x}{3} = 7$

b) $\dfrac{3x}{2} - \dfrac{4(x + 1)}{3} = 18$ e) $\dfrac{5(x + 1)}{4} - \dfrac{20 - 4x}{2} = 1$

c) $\dfrac{4x + 1}{3} - \dfrac{x + 2}{8} = 17$ f) $\dfrac{3(x + 2)}{5} + \dfrac{18 - x}{2} = 11$

4. Equacions de segon grau

Les **equacions de segon grau amb una incògnita** són les que, aplicant les regles de transformació, poden expressar-se en la forma:

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ amb } a \neq 0$$

Els coeficients a, b i c són nombres reals. El coeficient a ha de ser diferent de zero, ja que, en cas contrari, l'equació seria de primer grau.

4.1 Equacions incompletes

Quan algun dels coeficients b o c, o tots dos, són zero, l'equació s'anomena **incompleta**. En distingim tres casos:

- $\boldsymbol{b = c = 0}$

  L'equació és $ax^2 = 0$. Per resoldre aquesta equació, s'aïlla x:

  $$ax^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{0} \;\Rightarrow\; x = 0$$

  La solució de l'equació és $x = 0$.

- $\boldsymbol{c = 0}$

  L'equació és $ax^2 + bx = 0$. Per resoldre aquesta equació, s'extreu factor comú x en el primer membre, amb la qual cosa l'equació queda com un producte igualat a zero. Perquè el producte sigui zero, algun dels factors ha de ser zero:

  $$ax^2 + bx = 0 \;\Rightarrow\; x(ax + b) = 0 \;\Rightarrow\; \begin{cases} x = 0 \\ ax + b = 0 \;\Rightarrow\; ax = -b \;\Rightarrow\; x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

  Per exemple, per resoldre l'equació $6x^2 - 24x = 0$, fem:

  $$6x^2 - 24x = 0 \;\Rightarrow\; x(6x - 24) = 0$$

  Igualem cadascun dels factors a zero:

  $$\begin{cases} x = 0 \\ 6x - 24 = 0 \;\Rightarrow\; 6x = 24 \;\Rightarrow\; x = \dfrac{24}{6} \;\Rightarrow\; x = 4 \end{cases}$$

  Les solucions de l'equació són $x = 0$ i $x = 4$.

- $\boldsymbol{b = 0}$

  L'equació és $ax^2 + c = 0$. Per resoldre aquesta equació, transposem termes i, després, aïllem la incògnita:

  $$ax^2 + c = 0 \;\Rightarrow\; ax^2 = -c \;\Rightarrow\; x^2 = \frac{-c}{a} \;\Rightarrow\; x = \pm\sqrt{\frac{-c}{a}}$$

  Si en substituir els valors de a i c en el radicand resulta que $\dfrac{-c}{a}$ és negatiu, l'equació no té solució. Si és positiu, hi ha dues solucions.

Pensa i contesta

L'àrea d'un quadrat és de 25 cm². Quant fa el costat?

Si anomenem x la longitud del costat del quadrat, s'haurà de complir:

$$x^2 = 25$$

Hi ha dos nombres enters, 5 i −5, que són solució d'aquesta equació.

- Les dues solucions de l'equació són solució del problema?

ACTIVITATS

12. Resol:

a) $9x^2 = 0$
b) $9x^2 = 4$
c) $x^2 = 2$
d) $2x^2 = 32$
e) $4 - x^2 = 0$
f) $4x^2 = 0$
g) $-6x^2 = 0$
h) $3x^2 = 243$

13. Resol, si és possible, aquestes equacions incompletes:

a) $x^2 - 17x = 0$
b) $x^2 + 23x = 0$
c) $x^2 - 31x = 0$
d) $x^2 - 21x = 0$
e) $4x^2 - 9 = 0$
f) $25x^2 - 16 = 0$
g) $x^2 - 256 = 0$
h) $x^2 + 49 = 0$

4.2 Equacions completes

Deduirem una fórmula per resoldre les equacions de segon grau. A partir de l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, seguim aquests passos:

– Restem c en tots dos membres: $ax^2 + bx = -c$

– Multipliquem tots dos membres per $4a$: $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

– Sumem b^2 en tots dos membres: $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$

– Expressem el primer membre com a quadrat d'una suma:

$$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$$

– Extraiem l'arrel quadrada en tots dos membres:

$$2ax + b = \pm\sqrt{b^2 - 4ac}$$

– Restem b en tots dos membres: $2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$

– Aïllem x: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Per tant, les solucions de l'equació són:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{i} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

EXEMPLE

Resol l'equació $x^2 - 7x + 12 = 0$.

Apliquem la fórmula directament, amb $a = 1$, $b = -7$ i $c = 12$:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} = \frac{7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{7 \pm 1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = \dfrac{7+1}{2} = \dfrac{8}{2} = 4 \\ x_2 = \dfrac{7-1}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \end{cases} \Rightarrow \text{les solucions són } x_1 = 4 \text{ i } x_2 = 3$$

Tingues-ho en compte

Les equacions incompletes també es poden resoldre aplicant la fórmula general donada per a les equacions completes, però és més còmode resoldre-les seguint els procediments descrits a la pàgina anterior.

RECURSOS TIC

Amb la calculadora WIRIS podem resoldre qualsevol tipus d'equacions. N'hi ha prou d'escriure **resol** i l'equació dintre d'un parèntesi. Quan fem clic sobre = apareix la solució:

resol $(x^2 - 2x = 15)$

$\rightarrow \{\{x = -3\}, \{x = 5\}\}$

Per agilitzar l'escriptura, pots fer servir la instrucció resol equació que trobaràs a la *Barra d'eines* a la pestanya d'*Operacions.*

ACTIVITATS

14. Resol, quan sigui possible, aquestes equacions:

a) $x^2 - 16 = 0$

b) $\dfrac{16}{81}x^2 = 1$

c) $x^2 - 16 = 25$

d) $\dfrac{64}{49}x^2 - 1 = 0$

15. Resol:

a) $x^2 - 16x + 64 = 0$

b) $x^2 - 5x + 4 = 0$

c) $x^2 - 11x + 18 = 0$

d) $x^2 - 15x + 54 = 0$

16. Troba la solució d'aquestes equacions:

a) $x^2 - 7x + 6 = 0$

b) $x^2 + 8x - 20 = 0$

c) $x^2 - 2x + 2 = 0$

d) $x^2 + 7x - 12 = 0$

17. L'àrea d'un quadrat de costat $x - 3$ es 225 m^2. Esbrina quant fa x.

18. L'àrea d'un rectangle de costats $x - 2$ i $x - 5$ és de 40 m^2. Esbrina quant fa cada costat.

4.3 Nombre de solucions d'una equació de 2n grau

L'expressió $b^2 - 4ac$, que apareix com a radicand a la fórmula de les solucions de l'equació de segon grau, s'anomena **discriminant** i se simbolitza per mitjà de la lletra grega Δ:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

El nombre de solucions que té una equació de segon grau depèn del valor que prengui el discriminant. Pot passar que:

- $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac > 0}$

  En aquest cas, el radicand de la fórmula és positiu i l'arrel quadrada té dos valors, un de positiu i un altre de negatiu. Per tant, hi ha **dues solucions diferents**.

- $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac = 0}$

  Ara, el radicand de la fórmula és zero, per tant la fórmula queda així:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} = \frac{-b \pm 0}{2a} = \begin{cases} \dfrac{-b+0}{2a} = \dfrac{-b}{2a} \\ \dfrac{-b-0}{2a} = \dfrac{-b}{2a} \end{cases} \Rightarrow x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

  Veiem que hi ha **dues solucions iguals**.

- $\boldsymbol{\Delta = b^2 - 4ac < 0}$

  En aquest cas, el radicand de la fórmula és negatiu, per tant no hi ha arrels quadrades. Així doncs, l'equació **no té solució**.

Vegem-ne alguns exemples:

a) A $x^2 - 9x + 18 = 0$, es té $\Delta = (-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = 81 - 72 = 9 > 0$. Per tant, hi ha dues solucions diferents.

b) A $x^2 - 8x + 16 = 0$, es té $\Delta = (-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 16 = 64 - 64 = 0$. Per tant, hi ha dues solucions iguals.

c) A $x^2 + x + 1 = 0$, es té $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 1 - 4 = -3$. Per tant, no hi ha solució.

Equacions de 3r grau

El primer que va estudiar sistemàticament les equacions de tercer grau va ser el matemàtic, filòsof i poeta àrab Omar Jayyam (1048-1131). Tot i així, no va aconseguir de trobar una solució general.

Aquesta solució va arribar quatre segles després de la mà del matemàtic italià S. del Ferro (1465-1526), malgrat que històricament el seu descobriment se l'han disputat dos compatriotes seus, Niccolò Tartaglia (1499-1557) i Girolamo Cardano (1501-1576).

Segell de Dubai que representa Omar Jayyam envoltat d'alguns deixebles.

ACTIVITATS

19. Sense resoldre-les, esbrina quantes solucions tenen aquestes equacions:

a) $x^2 - 5x + 4 = 0$

b) $x^2 + 8x + 16 = 0$

c) $x^2 - 12x + 20 = 0$

d) $x^2 + x - 2 = 0$

e) $5x^2 - 2x + 3 = 0$

f) $x^2 + x + 1 = 0$

20. Esbrina quin ha de ser el valor de m perquè l'equació $x^2 - mx + 9 = 0$ tingui dues solucions iguals.

21. Quant ha de valer m perquè aquestes equacions tinguin dues solucions iguals?

a) $x^2 - 26x + m = 0$

b) $x^2 - 2mx + 2 = 0$

4.4 Suma i producte de les solucions

Ara veurem quina relació hi ha entre la suma i el producte de les solucions d'una equació de segon grau amb una incògnita i els seus coeficients.

Suma de les solucions

La suma S de les solucions és:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

Producte de les solucions

El producte P de les solucions és:

$$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{b^2 - b^2 + 4ac}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Resumint, hem obtingut:

$$S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \quad \text{i} \quad P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Reconstrucció d'una equació conegudes les seves solucions

Podem escriure una equació que tingui solucions predeterminades. Efectivament, si en l'equació $ax^2 + bx + c = 0$ dividim tots dos membres pel coeficient a, obtenim l'equació equivalent:

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - Sx + P = 0$$

On S i P són, respectivament, la suma i el producte de les solucions de l'equació.

Així, per exemple, una equació de segon grau amb una incògnita que tingui 5 i 7 com a solucions serà $x^2 - 12x + 35 = 0$, perquè $S = 5 + 7 = 12$ i $P = 5 \cdot 7 = 35$.

René Descartes

Matemàtic, físic i filòsof francès (1596-1650).

Com a matemàtic, destaca per haver estat el primer a abordar problemes de tipus geomètric amb eines purament algèbriques.

A més, podem afirmar que la seva obra *La géometrie* (1637) és el primer tractat matemàtic que utilitza, llevat de petites excepcions, la simbologia algèbrica que utilitzem avui dia.

Nota

El coneixement de la suma i el producte de les solucions d'una equació de segon grau et pot ajudar en la resolució de l'equació per tempteig.

ACTIVITATS

22. Escriu equacions de segon grau amb una incògnita que tinguin com a solucions:

a) 2 i 9 b) 5 i 6 c) −1 i −2 d) 3 i $-\frac{5}{2}$

Resol les equacions i comprova'n les solucions.

23. Escriu una equació de segon grau que tingui:

a) Una solució doble de l'altra.

b) Dues solucions oposades.

c) Una solució inversa de l'altra.

4.5 Factorització d'una equació de segon grau

Si una equació de segon grau $ax^2 + bx + c = 0$ té com a solucions x_1 i x_2, la podem escriure en la forma:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

Efectivament:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$
$$(ax - ax_1)(x - x_2) = 0$$
$$ax^2 - axx_2 - axx_1 + ax_1x_2 = 0$$
$$ax^2 - ax(x_1 + x_2) + ax_1x_2 = 0$$
$$ax^2 - ax\left(\frac{-b}{a}\right) + a\,\frac{c}{a} = 0$$
$$ax^2 + bx + c = 0$$

Hem utilitzat en aquesta deducció que $x_1 + x_2 = \dfrac{-b}{a}$ i que $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a}$.

Una equació de segon grau expressada en la forma:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0$$

s'anomena **equació de segon grau factoritzada**, essent x_1 i x_2 les solucions de l'equació.

Ho sabies?

El nombre de factors de grau més gran o igual que 1 d'una equació factoritzada no pot ser més gran que el grau de l'equació.

Zon@web

www.vicensvives.net/zonaweb

Resol més equacions de segon grau.

4a

4.6 Resolució d'equacions factoritzades

Les equacions de segon grau factoritzades tenen un producte de tres factors igualat a 0. Perquè un producte sigui zero ho ha de ser algun dels factors, però el coeficient a és diferent de 0, per tant:

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 0 \iff \begin{cases} x - x_1 = 0 \iff x = x_1 \\ x - x_2 = 0 \iff x = x_2 \end{cases}$$

Conseqüentment, les solucions són x_1 i x_2.

Per exemple, les solucions de $2(x - 2)(x - 3) = 0$ són $x_1 = 2$ i $x_2 = 3$.

Atenció

Si l'equació ve donada com un producte de dos factors igualat a zero, també procedirem de la mateixa manera.

Per exemple, per resoldre l'equació $(2x - 4)(x - 3) = 0$, fem:

$$\begin{cases} 2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = 2 \\ x - 3 = 0 \iff x = 3 \end{cases}$$

ACTIVITATS

24. Escriu en forma factoritzada:

a) $x^2 - 12x + 11 = 0$ b) $x^2 + x - 56 = 0$

25. Troba la solució d'aquestes equacions:

a) $(3x - 12)(x + 5) = 0$ b) $(2x - 1)(3x + 1) = 0$

26. Resol aquestes equacions:

a) $(x - 7)(x - 12) = 0$
b) $(x + 5)(x - 9) = 0$
c) $(x + 3)(x + 14) = 0$
d) $3(x - 2)(x + 2) = 0$
e) $(x + 8)(x - 8) = 0$
f) $(x - 1)(x + 1) = 0$

5. Resolució de problemes

Per resoldre problemes per mitjà d'equacions, cal seguir aquests passos:

1. **Comprensió de l'enunciat.**

   Identifica les quantitats conegudes i estableix el que pregunta el problema. Tria la incògnita.

2. **Planificació de la resolució.**

   Tradueix el problema a una equació.

3. **Execució del pla de resolució.**

   Resol l'equació.

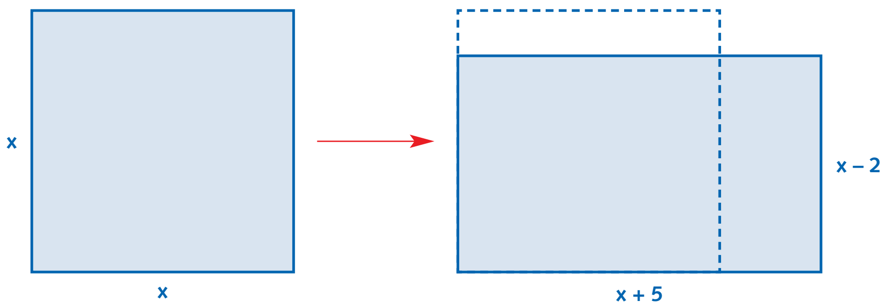
4. **Resposta.**

   Verifica la solució de l'equació obtinguda analitzant si serveix com a resposta del problema.

EXEMPLE

Si s'allarguen dos costats paral·lels d'un quadrat en 5 m i s'escurcen els altres dos en 2 m, s'obté un rectangle de 120 m^2 d'àrea. Esbrina el costat i l'àrea del quadrat.

1. Anomenem x el costat del quadrat, amb la qual cosa el rectangle tindrà costats $x + 5$ i $x - 2$.



2. Escrivim l'àrea del rectangle i la igualem a 120 m^2. Així, obtenim l'equació: $(x + 5)(x - 2) = 120$

3. Resolem l'equació:

$$(x + 5)(x - 2) = 120 \iff x^2 + 5x - 2x - 10 = 120 \iff x^2 + 3x - 130 = 0$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-130)}}{2 \cdot 1} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 + 520}}{2} =$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{529}}{2} = \frac{-3 \pm 23}{2} = \begin{cases} -13 \\ 10 \end{cases}$$

4. La solució negativa de l'equació no té sentit físic, perquè busquem una longitud. Per tant, el costat del quadrat és $x = 10$ m i l'àrea és $A = 10^2 = 100$ m^2.

Fes de mag

Demana a una persona que:

1. Multipliqui per 5 la primera xifra de la seva edat.
2. Hi sumi 3.
3. Ho multipliqui per 2.
4. Hi sumi la segona xifra de la seva edat.
5. Et digui el resultat.

Resta 6 al nombre que t'ha dit i n'obtindràs l'edat. Oi que sembla cosa de màgia?

- Aquest truc sempre funciona. Esbrina per què.

El problema que resoldrem tot seguit és un exemple dels anomenats *problemes de mòbils* en els quals es tracta de trobar on i quan es trobaran dos mòbils que es desplacen amb unes característiques determinades.

EXEMPLE

A una mateixa hora, dos motoristes parteixen a l'encontre l'un de l'altre des de les seves ciutats, A i B, separades 350 km per una carretera recta i plana. El motorista que parteix de la ciutat A circula a una velocitat de 75 km/h i el que parteix de B circula a una velocitat de 100 km/h. Quan i on es trobaran?

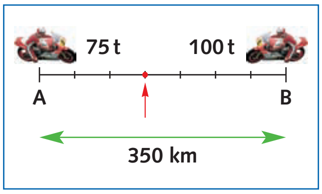
1. Anomenem t el temps que trigaran a trobar-se. Una vegada hàgim obtingut el valor de t, podrem saber l'espai recorregut per cada motorista tenint en compte que l'espai recorregut per un mòbil en un temps determinat és el producte de la seva velocitat per aquest temps.

2. Organitzem les dades de l'enunciat:

   – En un temps t, expressat en hores, el motorista que parteix de A a 75 km/h recorre un espai $75t$, expressat en kilòmetres.

   – En un temps t, expressat en hores, el motorista que parteix de B a 100 km/h recorre un espai $100t$, expressat en kilòmetres.

   Podem disposar les dades en un esquema o en una taula per facilitar la planificació de la resolució:



	e	*v*	*t*
A	$75t$	75	t
B	$100t$	100	t

   Com que la suma dels espais recorreguts per tots dos motoristes és de 350 km, arribem a aquesta equació:

$$75t + 100t = 350$$

3. Resolem l'equació:

$$75t + 100t = 350 \Rightarrow 175t = 350 \Rightarrow t = \frac{350}{175} = 2$$

4. Els motoristes es trobaran al cap de 2 hores. Per saber on es trobaran, calculem l'espai que haurà recorregut cadascun d'ells durant aquest temps:

   – El motorista que parteix de A: 75 km/h · 2 h = 150 km

   – El motorista que parteix de B: 100 km/h · 2 h = 200 km

   Així doncs, els motoristes es trobaran a 150 km de A i 200 km de B. Com calia esperar, la suma dels espais recorreguts per tots dos és igual a la distància entre les ciutats A i B.

Un consell

És molt important que abans d'abordar la resolució d'un problema en **comprenguis** bé l'enunciat.

Llegeix-lo les vegades que calgui fins que tinguis clar què és el que busques i de quines dades disposes.

ACTIVITATS

27. La suma d'un nombre i el seu quadrat és 156. Escriu una equació i resol-la per trobar el nombre.

28. Troba el perímetre d'un triangle rectangle d'àrea 96 m^2 i la base del qual fa 1 m més que l'altura.

29. La suma dels quadrats de dos nombres parells consecutius és 452. Troba aquests nombres.

30. Dos trens surten a la mateixa hora de dues estacions separades 495 km i van un a l'encontre de l'altre. La velocitat del primer és de 150 km/h i la del segon, de 180 km/h. Quant trigaran a trobar-se?

També els problemes de proporcionalitat es resolen fàcilment amb l'ajuda de les equacions. Vegem-ne alguns exemples:

EXEMPLES

1 En una empresa, 5 operaris treballant 8 hores diàries han trigat 6 dies a envasar 1500 formatges. Treballant 10 hores diàries al mateix ritme, quants operaris es necessitaran per envasar 3000 formatges durant 8 dies?

1. Anomenem x el nombre d'operaris que es necessitaran. Organitzem les dades del problema en una taula, tot expressant en les mateixes unitats les quantitats de la mateixa magnitud:

operaris	hores/dia	dies	formatges
5	8	6	1500
x	10	8	3000

2. Comparem cada magnitud amb la que conté x per determinar si la relació de proporcionalitat és directa o inversa.

operaris	hores/dia	dies	formatges
5	8	6	1500
x	10	8	3000

inversa

inversa

directa

Escrivim una proporció, prenent una raó o la seva inversa segons si es tracta de proporcionalitat directa o inversa i deixant en un membre la raó amb terme x: $\dfrac{5}{x} = \dfrac{10}{8} \cdot \dfrac{8}{6} \cdot \dfrac{1500}{3000}$

Atès que el producte dels mitjans és igual al producte dels extrems, obtenim aquesta equació de primer grau:

$$5 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3000 = 10 \cdot 8 \cdot 1500 \cdot x$$

3. Resolem l'equació:

$$5 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3000 = 10 \cdot 8 \cdot 1500 \cdot x \;\Rightarrow\; x = \frac{5 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 3000}{10 \cdot 8 \cdot 1500} = 6$$

4. Per tant, es necessitaran 6 operaris.

2 Per crear una empresa, la Laura, en Llorenç i en Pere aporten 12000 €, 9000 € i 5000 €, respectivament. Al cap d'un cert temps, s'han de repartir 5200 € de beneficis. Quant correspondrà a cadascun?

1. Anomenem x, y i z el benefici que correspondrà a la Laura, a en Llorenç i a en Pere, respectivament. Cal repartir els beneficis de manera directament proporcional a la quantitat aportada per cadascun.

Recorda-ho

Dues magnituds relacionades són **directament proporcionals** si en multiplicar (dividir) qualsevol valor d'una d'elles per un nombre, el valor corresponent de l'altra també queda multiplicat (dividit) pel mateix nombre.

Dues magnituds relacionades són **inversament proporcionals** si en multiplicar (dividir) qualsevol valor d'una d'elles per una quantitat, el valor corresponent de l'altra queda dividit (multiplicat) per aquesta quantitat.

El nombre d'operaris i els formatges envasats són magnituds directament proporcionals.

Repartiments

En els problemes de repartiments proporcionals s'ha de repartir una quantitat en parts proporcionals a diversos nombres donats.

Els repartiments proporcionals poden ser directes o inversos, segons si el repartiment es fa de manera directament proporcional o de manera inversament proporcional als nombres donats.

2. Tenint en compte que entre tots tres van aportar 26 000 €, escrivim les proporcions i les corresponents equacions de primer grau:

$$\frac{5200}{x} = \frac{26000}{12000} \Rightarrow 26000x = 5200 \cdot 12000$$

$$\frac{5200}{y} = \frac{26000}{9000} \Rightarrow 26000y = 5200 \cdot 9000$$

$$\frac{5200}{z} = \frac{26000}{5000} \Rightarrow 26000z = 5200 \cdot 5000$$

3. Resolem les equacions anteriors, i obtenim:

$$x = \frac{5200 \cdot 12000}{26000} = 2400; \quad y = \frac{5200 \cdot 9000}{26000} = 1800$$

$$z = \frac{5200 \cdot 5000}{26000} = 1000$$

4. Per tant, correspondran 2 400 € a la Laura, 1 800 € a en Llorenç i 1 000 € a en Pere. Comprovem que 2 400 € + 1 800 € + 1 000 € és igual als 5 200 € que s'han de repartir.

3 Un avi decideix repartir 1480 € entre els seus tres néts que tenen 8, 10 i 12 anys. Si vol fer el repartiment de manera inversament proporcional a les edats dels néts, quant correspondrà a cadascun?

Anomenem x, y i z la quantitat que correspondrà a cada nét. Ja que repartir 1480 € de manera inversament proporcional a 8, 10 i 12 equival a repartir 1480 € de manera directament proporcional a $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{10}$ i $\frac{1}{12}$, procedim com en l'exemple anterior.

Per començar, calculem:

$$\frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \frac{1}{12} = \frac{37}{120}$$

Després:

$$\frac{x}{\frac{1}{8}} = \frac{1480}{\frac{37}{120}} \Rightarrow \frac{37}{120}x = \frac{1}{8} \cdot 1480 \Rightarrow 37x = 22200 \Rightarrow x = \frac{22200}{37} = 600$$

$$\frac{y}{\frac{1}{10}} = \frac{1480}{\frac{37}{120}} \Rightarrow \frac{37}{120}y = \frac{1}{10} \cdot 1480 \Rightarrow 37y = 17760 \Rightarrow y = \frac{17760}{37} = 480$$

$$\frac{z}{\frac{1}{12}} = \frac{1480}{\frac{37}{120}} \Rightarrow \frac{37}{120}z = \frac{1}{12} \cdot 1480 \Rightarrow 37z = 14800 \Rightarrow z = \frac{14800}{37} = 400$$

Per tant, correspondran 600 € al nét de 8 anys, 480 € al de 10 anys i 400 € al de 12 anys. Comprovem que 600 € + 480 € + 400 € és igual als 1480 € que s'han de repartir.

Tingues-ho en compte

Per repartir una quantitat de manera inversament proporcional a uns quants nombres, es reparteix de manera directament proporcional als inversos d'aquests nombres.

ACTIVITATS

31. Un ramader necessita 1 200 kg de farratge per alimentar 20 vaques durant 3 dies. Calcula quants kilograms de farratge necessitarà per alimentar 70 vaques durant 7 dies.

32. Reparteix una gratificació de 34 200 € entre tres treballadors d'una empresa, de manera directament proporcional als anys d'antiguitat a l'empresa, 12, 15 i 18 anys.

33. Reparteix un premi de 1 605 € entre els tres primers classificats d'una cursa, de manera inversament proporcional als temps que han trigat a arribar a la meta, que són 5, 6 i 7 minuts.

Resum

Expressions algèbriques

quan se n'igualen dues, s'obté una

Equació

- els valors de les incògnites que la verifiquen són → **Solucions**
  - les equacions que tenen les mateixes solucions són → **Equivalents**
- estudiem les de → **Primer grau** / **Segon grau**
- s'utilitza en la → **Resolució de problemes**

Preguntes clau

1. Què és una equació?

2. Copia aquestes frases al quadern i completa-les:

a) En les equacions, les lletres desconegudes s'anomenen ... .

b) En una equació, l'expressió algèbrica situada a l'esquerra del signe = s'anomena ... membre i la que es troba a la ... rep el nom de segon membre.

c) El grau d'una equació amb una incògnita és l' ... més gran amb què aquesta apareix després de fer les ... indicades.

3. Digues què s'entén per identitat.

4. S'anomena solució d'una equació…:

a) …qualsevol valor de les incògnites.

b) …els valors de les incògnites que fan que es verifiqui la igualtat.

c) …els valors de les incògnites que fan que els dos membres siguin diferents.

5. Què són equacions equivalents?

6. Copia aquestes frases al quadern i completa-les:

a) Si se ... o resta un mateix nombre o ... als dos membres d'una equació, s'obté una equació ... .

b) Si es multipliquen o ... els dos ... d'una equació per un mateix nombre diferent de ..., s'obté una equació equivalent.

7. Digues quantes solucions pot tenir una equació de primer grau.

8. Contesta:

a) Què s'entén per equacions de segon grau completes i incompletes?

b) Quantes solucions pot tenir una equació de segon grau?

c) Quina és l'expressió de la suma i del producte de les solucions d'una equació de segon grau?

Practica competències bàsiques

CONCEPTES GENERALS

1 ●○○ Identifica el grau d'aquestes equacions:

a) $3x - 7 = 22$
b) $x^4 - 16 = 0$
c) $5 - x = 3$
d) $2x + 19 = 3$
e) $2x + 3x^2 = 0$
f) $(x - 5)(x - 8) = 0$

2 ●○○ Distingeix entre identitats i equacions:

a) $x^2 + 25 = (x + 5)^2 - 10x$
b) $(x + 9)(x - 9) = 0$
c) $x - 6 = 18 - 2x$
d) $(x - 6)(x + 6) = x^2 - 36$

3 ●○○ Classifica aquestes equacions segons el nombre de solucions:

a) $-5x = 35$
b) $3x + 12 = 3(x + 3) + 3$
c) $5x - 25 = 5x$
d) $x^2 - x = 9 + 5x$

4 ●○○ Esbrina si:

a) 4 és solució de $2x + 5 = 25 - 3x$.
b) -2 i 5 són solucions de $(x + 2)(x - 5) = 0$.
c) 2 i 4 són solucions de $x^2 - 6x = -8$.

5 ●○○ Comprova si aquestes equacions són equivalents:

a) $7x + 5 - 2x = 29 - 3x$ i $4x - 9 = 2x - 3$
b) $5(x - 2) = x + 6$ i $4x + 6 = 20 - 3x$

6 ●●○ Escriu dues equacions que:

a) Tinguin una única solució.
b) Tinguin infinites solucions.
c) No tinguin solució.

EQUACIONS DE PRIMER GRAU

7 ●○○ Esbrina la solució d'aquestes equacions:

a) $\dfrac{2x}{7} = 12$ b) $\dfrac{x}{6} = 11$ c) $\dfrac{22}{8} = \dfrac{x}{12}$

8 ●○○ Troba'n la solució:

a) $\dfrac{x}{6} = \dfrac{-3}{162}$ b) $\dfrac{5x}{-8} = 25$ c) $\dfrac{x}{4} = \dfrac{6}{9}$

9 ●○○ Resol:

a) $6x + 8 = 2x - 8$
b) $x + 2(x + 1) = 34$
c) $6x + 8 = 3(x + 9) - 1$
d) $7(x - 1) = 6x - 2$

10 ●○○ Troba la solució d'aquestes equacions:

a) $4(x + 3) = x + 21$ b) $5(x - 1) = -x + 19$

11 ●○○ Resol:

a) $\dfrac{x + 4}{3} = 14$ b) $\dfrac{8 - 2x}{6} = 15$ c) $8 = \dfrac{x + 1}{3}$

12 ●○○ Digues quantes solucions té cadascuna d'aquestes equacions i explica'n la raó:

a) $x = 60 - 5x$
b) $4x = -3x$
c) $8x + 2 = x - (3 - x)$
d) $0 = 2x + 2 - 2(x + 1)$

13 ●○○ Resol aquestes equacions:

a) $6x = -66$
b) $-7x = 84$
c) $-9x = -108$
d) $-6x = -3$
e) $3x = 8$
f) $0{,}05x = 20$

14 ●●○ Esbrina la solució d'aquestes equacions:

a) $\dfrac{x + 1}{4} + \dfrac{x}{16} = 10$
b) $\dfrac{x}{2} - \dfrac{4(x - 1)}{3} = 18$
c) $\dfrac{x}{5} + \dfrac{x - 4}{3} = 120$
d) $\dfrac{9(x - 1)}{4} - \dfrac{5(5 - x)}{7} = 9$

15 ●●○ Troba la solució d'aquestes equacions:

a) $\dfrac{x}{3} + \dfrac{x}{12} = 10$
b) $\dfrac{x}{4} - \dfrac{5x}{12} = -10$
c) $\dfrac{x + 5}{3} - \dfrac{3x - 37}{2} = 1$
d) $\dfrac{x + 5}{3} - \dfrac{2(x - 2)}{2} = -1$

EQUACIONS DE SEGON GRAU

16 ●○○ Resol:

a) $-5x^2 = 0$
b) $3x^2 = 48$
c) $13x^2 = 0$
d) $18x^2 = 32$
e) $-2x^2 = -72$
f) $-9x^2 = 0$
g) $x^2 = 9$
h) $25 - x^2 = 0$
i) $\dfrac{4}{5}x^2 = 0$

17 ●○○ Resol aquestes equacions incompletes:

a) $x^2 + 25x = 0$
b) $x^2 - 19x = 0$
c) $x^2 = -x$
d) $x^2 + 12x = 0$
e) $6x^2 - 2x = 0$
f) $2x(x - 7) = 0$

18 ●○○ Esbrina, si existeix, la solució de les equacions següents:

a) $x^2 - 196 = 0$
b) $\dfrac{-225}{36}x^2 = -1$
c) $x^2 - 16 = 25$
d) $\dfrac{121}{4}x^2 - 4 = 0$

19 ●○○ Troba la solució d'aquestes equacions:

a) $x^2 - 13x + 22 = 0$
b) $x^2 + 5x - 24 = 0$
c) $x^2 + 2x + 3 = 0$
d) $x^2 - 12x + 27 = 0$

Practica competències bàsiques

20 ●○○ Resol:

a) $x^2 - 38x + 361 = 0$
b) $x^2 + 42x + 441 = 0$
c) $x^2 - 18x + 56 = 0$
d) $x^2 - 19x + 60 = 0$

21 ●○○ Sense resoldre-les, esbrina quantes solucions tenen aquestes equacions:

a) $x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$
b) $x^2 + 30x + 225 = 0$
c) $x^2 - x + 12 = 0$
d) $x^2 + 5x + 12 = 0$
e) $x^2 + 2x + 1 = 0$
f) $x^2 - 26x + 169 = 0$
g) $2x^2 + 2x + 1 = 0$
h) $x^2 - 34x + 289 = 0$

22 ●○○ Escriu una equació de segon grau amb una incògnita que tingui com a solucions:

a) 5 i 8
b) −3 i −14
c) −5 i 11
d) 13 i −5

23 ●○○ Escriu equacions de segon grau que tinguin com a solucions:

a) 3 i 8
b) 5 i $\frac{1}{5}$
c) 4 i −4
d) 6 i 12
e) 7 i 7
f) 0 i −3

24 ●○○ Resol aquestes equacions:

a) $(x - 1)(x - 13) = 0$
b) $(x + 4)(x - 6) = 0$
c) $(x + 15)(x + 18) = 0$
d) $(3x + 12)(2x - 1) = 0$
e) $(2x - 3)(3x + 3) = 0$

25 ●○○ Troba la solució d'aquestes equacions:

a) $7(x - 3)(2x + 2) = 0$
b) $(x - 19)^2 = 0$
c) $(x + 6)(x - 6) = 0$

26 ●○○ Escriu en forma factoritzada:

a) $x^2 - 17x + 52 = 0$
b) $x^2 - 4x + 4 = 0$

27 ●●○ En cadascuna d'aquestes equacions, esbrina quant ha de valer m perquè les dues solucions siguin iguals:

a) $x^2 - 3mx + 324 = 0$
b) $x^2 + 5mx + 25 = 0$
c) $x^2 - 4mx + 16 = 0$
d) $x^2 - 7x + m = 0$

28 ●●○ Quin ha de ser el valor de m perquè l'equació $x^2 - 4mx + 64 = 0$ tingui dues solucions oposades?

29 ●●● Esbrina quins valors ha de tenir k en l'equació $x^2 - (k - 20)x + k = 0$ perquè les seves solucions es diferenciïn en 4 unitats.

30 ●●● En l'equació $8x^2 - (k - 1)x - (k - 7) = 0$, troba els valors de k perquè les solucions de l'equació siguin dos nombres:

a) iguals b) oposats c) inversos

31 ●●● Resol l'equació $x^2 - 4 = 0$. Com resoldries l'equació de tercer grau $x^3 - 4x = 0$?

32 ●●● Una equació de segon grau té dues solucions. Es pot saber el signe de les solucions sense resoldre l'equació?

33 ●●● Què podem dir dels coeficients d'una equació de segon grau si les dues solucions són nombres oposats?

PROBLEMES

34 ●●○ Troba un nombre sabent que si se suma la seva meitat amb la seva cinquena part i amb el triple del nombre s'obté 148.

35 ●●○ Descompon el nombre 98 en dues parts, de manera que en la divisió de la part més gran entre la més petita s'obtingui 7 de quocient i 2 de residu.

36 ●●○ Calcula dos nombres naturals consecutius tals que la diferència entre la cinquena part del més gran i la vuitena part del més petit sigui igual a 5.

37 ●●○ Troba dos nombres la suma dels quals és 49, sabent que la diferència dels seus quadrats és 931.

38 ●●○ Els tres angles d'un triangle són nombres naturals consecutius. Troba els angles.

39 ●●○ En un triangle l'angle més gran fa el quíntuple del més petit i el mitjà fa la meitat de la suma dels altres dos. Calcula la mesura de cada angle.

40 ●●○ La Marta, en Carles i l'Andreu es reparteixen 504 € que han guanyat fent un treball. La quantitat que correspon a en Carles és $\frac{1}{3}$ de la de la Marta, i l'Andreu rep les $\frac{2}{5}$ parts de la suma dels diners obtinguts per la Marta i en Carles junts. Quina quantitat ha guanyat cadascú?

41 ●●○ Tres socis d'una empresa es reparteixen com a benefici 42 500 €. Quina quantitat correspondrà a cadascú si el primer ha d'obtenir el triple que el segon i aquest el quàdruple del tercer?

42 ●●○ L'edat de la Mònica és la tercera part de l'edat de la seva mare. Calcula quants anys tenen la Mònica i la seva mare sabent que les seves edats es diferencien en 26 anys.

43 ●●○ L'Albert té 13 anys i el seu pare 41. Determina quants anys fa que l'edat del pare quintuplicava l'edat de l'Albert.

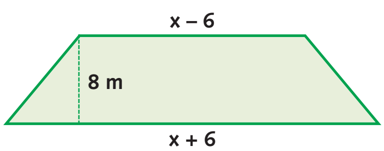
44 ●●○ L'edat de l'Anna és la quarta part de l'edat del seu pare però d'aquí a quatre anys l'edat del seu pare serà el triple de l'edat de l'Anna. Esbrina quina edat té cadascun.

45 ●●○ Quant fa el costat d'un quadrat si en augmentar el costat en 9 cm l'àrea resulta incrementada en 657 cm^2?

46 ●●○ Si augmentem en 6 cm l'altura i en 8 cm la base d'un quadrat, s'obté un rectangle l'àrea del qual és 666 cm^2 més gran que la del quadrat. Calcula el costat del quadrat.

47 ●●○ En una empresa, els treballadors amb més de vint anys d'antiguitat guanyen el doble que els qui acaben d'arribar i els qui tenen més de deu anys d'antiguitat guanyen $\frac{4}{9}$ de la suma del sou dels dos tipus anteriors. Si l'empresa té 3 treballadors recents, 5 amb més de 10 anys d'antiguitat i 2 amb més de vint anys, calcula què guanyen els treballadors segons la seva antiguitat sabent que el total de sous mensuals puja a 10 500 €.

48 ●●○ L'àrea del trapezi de la figura és 96 m^2. Troba la mida dels costats.

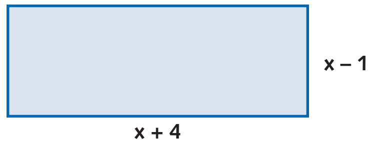


49 ●●○ L'àrea d'un quadrat de costat $x - 4$ es 289 m^2. Esbrina quant fa el costat.

50 ●●○ La suma del doble d'un nombre i del tripe del seu quadrat és 161. Troba aquest nombre.

51 ●●○ Troba dos nombres enters consecutius sabent que la suma dels seus quadrats és 1741.

52 ●●○ Troba les dimensions del rectangle de la figura sabent que l'àrea és 204 m^2.



53 ●●○ Deu obrers han de fer una obra. Quan han passat 30 dies tenen fetes tres quartes parts de l'obra. Quants obrers s'hi hauran d'afegir per acabar l'obra en 5 dies?

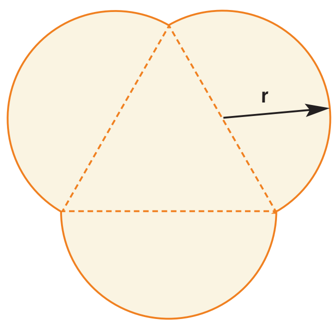
54 ●●○ Reparteix una herència de 150 000 € de manera directament proporcional a les edats dels tres germans que són 15 anys, 17 anys i 18 anys, respectivament.

55 ●●○ Descompon el nombre 63 en dues parts que estiguin en la relació $\frac{2}{5}$.

56 ●●○ Troba un nombre sabent que si se suma aquest nombre al numerador i al denominador de $\frac{89}{117}$ s'obté una fracció equivalent a la que resulta d'augmentar els dos termes de $\frac{17}{24}$ en aquest mateix nombre.

57 ●●● Des d'un punt exterior a una circumferència, situat a 37 cm del seu centre, es traça una tangent a la circumferència. Calcula el radi de la circumferència sabent que la longitud del segment que uneix el punt exterior amb el de tangència és 23 cm més gran que el radi.

58 ●●● Sobre els costats d'un triangle equilàter s'han traçat tres semicercles tal com indica aquesta figura. Troba l'àrea del triangle sabent que el perímetre de la figura és 47,1 cm. (Pren $\pi = 3,14$).



59 ●●● Les dues xifres d'un nombre sumen 15 i quan invertim l'ordre en què estan escrites obtenim un nombre 9 unitats menor que l'inicial. Troba el nombre inicial.

Practica competències bàsiques

www.vicensvivesdigital.com/activitatsweb

PROBLEMES D'ESTRATÈGIA

Assaig-error

De vegades, experimentar amb possibles solucions permet trobar la correcta:

- Es tria una possible solució.
- Es prova si aquesta solució satisfà les condicions del problema.
- Es modifica la solució triada en funció del resultat obtingut i es repeteix el procés fins a trobar la solució correcta.

PROBLEMA RESOLT

Troba la solució d'aquesta equació:

$$3^{4x+1} = 19683$$

Comprensió de l'enunciat

Es tracta de trobar un valor de x que verifiqui la igualtat.

Planificació de la resolució

Com que no coneixem cap manera d'aïllar x en aquesta equació, recorrem a l'estratègia d'assaig-error.

Execució del pla de resolució

Provem $x = 1$:

$$3^{4\cdot 1+1} = 3^5 = 243 < 19683$$

Hem fallat per defecte. Per tant, el valor de x haurà de ser més gran que 1.

Provem $x = 3$:

$$3^{4\cdot 3+1} = 3^{13} = 1594323 > 19683$$

Hem fallat per excés. Per tant, el valor de x haurà de ser més gran que 1 però més petit que 3.

Provem $x = 2$:

$$3^{4\cdot 2+1} = 3^9 = 19683$$

Resposta

La solució de l'equació proposada a l'enunciat serà, per tant, $x = 2$.

PROBLEMA PROPOSAT

60 Troba la solució d'aquesta equació:

$$4^x - 2^x = 992$$

PREPARA'T PER A LES PROVES PISA

61 Un autobús circula per un carrer on hi ha instal·lats tres semàfors.

a) De quantes maneres diferents pot trobar il·luminats els semàfors?

b) Quantes combinacions semafòriques li permeten recórrer el carrer sense aturar-se i sense infringir les normes de circulació?

62 La Cornèlia va normalment a treballar amb bicicleta, però un dia es veu obligada a recórrer a peu una part del trajecte a causa d'obres a la via pública. Considerant que camina a una velocitat de 5 km/h i que pedaleja a una velocitat de 21 km/h, contesta:

a) És possible que la seva velocitat mitjana aquest dia sigui de 25 km/h? I de 4 km/h?

b) Si la velocitat mitjana és de 13 km/h, quin tram del recorregut ha fet a peu i quin amb bicicleta?

Recorda que la velocitat mitjana d'un mòbil es defineix com l'espai que recorre dividit pel temps que necessita per a recórrer-lo.

Zon@web www.vicensvives.net/zonaweb

Fes més activitats per preparar-te bé. 4b

Autoavaluació

www.vicensvivesdigital.com/activitatsweb

1 Indica el grau d'aquestes equacions:

a) $x^2 - x = 96$

b) $2x - \frac{x+1}{4} = 3$

c) $x(x^2 - 1) = 0$

d) $x(x-1)(x^2 - 3) = 12$

Alguna de les equacions anteriors té com a solució $x = 1$?

2 Resol aquestes equacions de primer grau:

a) $3x - 1 = 0$

b) $6(x-1) + 3 = 2x + 4$

c) $\frac{x+1}{3} = \frac{2x+5}{7} - 2x$

d) $\frac{6-x}{5} - x = \frac{3(x-1)}{10}$

3 Troba les solucions de les equacions de segon grau següents:

a) $x^2 - 64 = 0$

b) $2x^2 - 3x = 0$

c) $-x^2 - 3x + 4 = 0$

d) $3x^2 + 2x - 5 = 0$

4 Indica, sense resoldre-les, el nombre de solucions de les equacions següents:

a) $x^2 + 4x + 8 = 0$

b) $2x^2 - 4x + 2 = 0$

5 Troba m perquè l'equació $2x^2 - mx + 8 = 0$ tingui una única solució.

6 Escriu una equació de segon grau tal que:

a) Les solucions siguin 2 i 9.

b) Una solució sigui el triple de l'altra.

7 Troba les edats de tres germans sabent que sumen 23, que l'edat del germà gran triplica l'edat del germà petit i que el germà petit té tres anys menys que el germà mitjà.

8 L'altura d'un rectangle és tres vegades més gran que la base. Determina el perímetre del rectangle sabent que l'àrea és de 363 m^2.

9 Un grup de 6 estudiants triga 5 dies a passar una enquesta a 750 persones. Quants estudiants caldran per passar en 4 dies una enquesta semblant a 2000 persones?

10 Un avi reparteix 5840 € entre el seus néts de manera inversament proporcional a les seves edats, que són 12, 14 i 16 anys. Troba el que correspon a cadascún.

Jocs matemàtics Jocs matemàtics Jocs matemàtics Jocs matemàtics

Entre bromes i veritats

- Un professor de matemàtiques entra a classe i afirma:

Donats tres nombres diferents qualssevol, A, B i C, es verifica que, si A = B + C, aleshores C = 0.

Tot seguit, escriu això a la pissarra:

$$A = B + C$$
$$A \cdot (A - B) = (B + C) \cdot (A - B)$$
$$A^2 - AB = AB + AC - B^2 - BC$$
$$A^2 - AB - AC = AB - B^2 - BC$$
$$A \cdot (A - B - C) = B \cdot (A - B - C)$$
$$A = B$$

I, finalment, hi afegeix:

Per tant, si A = B + C equival a A = B, necessàriament es compleix que C = 0.

Està fent broma o parla seriosament?

Equacions infinites

- Demostra el teu enginy resolent aquestes equacions:

a) $2 = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x + \dots}}}}$

b) $3 = 1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{1 + \cfrac{x}{\dots}}}}$

Amb quatre quatres

- Escriu amb quatre quatres, ni més ni menys, els nombres de l'1 al 12.

Et donem els tres primers:

$1 = \frac{44}{44}$ $\quad 2 = \frac{4+4}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}$ $\quad 3 = \frac{4+4+4}{4}$