2 Nombres reals

Quina és la mida de la diagonal d'un quadrat de costat 1? I l'àrea d'un cercle de radi 1?

Per respondre aquestes qüestions tan simples, necessitem tornar a ampliar el conjunt numèric amb què hem treballat fins ara, afegint-hi un nou tipus de nombres: els nombres irracionals.

D'aquesta manera obtenim el conjunt dels nombres reals.

En astronomia es fa servir la notació científica per expressar distàncies.

Partenó, a Atenes (Grècia). Les seves proporcions es basen en l'anomenat nombre d'or.

1. Nombres racionals i nombres irracionals

1.1 Nombres racionals

Un **nombre racional** és el conjunt format per totes les fraccions que són equivalents entre si. S'anomena **representant** d'un nombre racional qualsevol de les fraccions equivalents que el formen.

Per exemple, el conjunt de fraccions equivalents $\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{-4}{-6}, \frac{6}{9}, \ldots\right\}$ és un nombre racional. Qualsevol de les fraccions anteriors és un representant d'aquest nombre racional.

La fracció irreductible de denominador positiu s'anomena **representant canònic**.

$$\underbrace{\overbrace{\left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{-4}{-6}, \frac{6}{9}, \ldots\right\}}^{\text{nombre racional}}}_{\text{representants}} \rightarrow \underset{\text{representant canònic}}{\frac{2}{3}}$$

El conjunt de tots els nombres racionals es representa per $\mathbb{Q}$.

Escrivim $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ per indicar que el conjunt $\mathbb{N}$ dels nombres naturals es troba contingut en el conjunt $\mathbb{Z}$ dels nombres enters, i que aquest es troba contingut en el conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals.

1.2 Nombres irracionals

S'anomenen **nombres irracionals** els que no es poden escriure en forma de fracció. Són nombres decimals no periòdics amb un nombre il·limitat de xifres.

Designem amb $\mathbb{I}$ el conjunt de tots els nombres irracionals.

Per exemple, aquests nombres són irracionals:

$$\pi = 3{,}14159\ldots \qquad \sqrt{2} = 1{,}4142\ldots$$

$$0{,}123456789101112\ldots \qquad 0{,}101100111000\ldots$$

Els nombres irracionals no pertanyen a cap dels conjunts de nombres que hem estudiat: naturals, enters i racionals.

Per tant, sorgeix la necessitat de tornar a ampliar el concepte de nombre, i definir un nou conjunt que inclogui tots els tipus de nombres anteriors, però que també contingui els nombres irracionals.

No et confonguis

Tot i que els nombres racionals s'acostumen a identificar amb les fraccions, no són pas el mateix. Un nombre racional està format per una fracció i totes les seves equivalents.

Formalment, per representar un nombre racional, s'hauria d'escriure un representant qualsevol entre claudàtors, però, per simplificar-ne l'escriptura, no se sol fer.

Exemple

El nombre racional format per la fracció $\frac{2}{3}$ i totes les seves equivalents és $\left[\frac{2}{3}\right]$. D'aquesta manera:

$$\left[\frac{2}{3}\right] = \left\{\frac{2}{3}, \frac{4}{6}, \frac{-4}{-6}, \ldots\right\}$$

ACTIVITATS

1. Digues quines d'aquestes fraccions són equivalents:

$$\frac{15}{23} \qquad \frac{21}{35} \qquad \frac{45}{69}$$

$$\frac{12}{17} \qquad \frac{62}{105} \qquad \frac{36}{51}$$

2. Escriu quatre representants més del nombre racional que conté la fracció $\frac{3}{5}$.

3. Escriu al quadern cinc nombres irracionals.

4. Indica el menor conjunt al qual pertany cadascun d'aquests nombres:

-8; 5; $0{,}33\ldots$; π; $\frac{1}{4}$; $2{,}57$

2. Noció de nombre real

Quan afegim els nombres irracionals al conjunt $\mathbb{Q}$ dels nombres racionals obtenim el conjunt dels nombres reals. Per tant:

> Un **nombre real** és un nombre que és o bé racional o bé irracional.

Designem el conjunt de tots els nombres reals amb $\mathbb{R}$. Els nombres reals es classifiquen així:

- **REALS ($\mathbb{R}$)**
  - **Racionals ($\mathbb{Q}$)**
    - Racionals no enters
    - **Enters ($\mathbb{Z}$)**
      - Enters negatius
      - **Naturals ($\mathbb{N}$)**
  - **Irracionals ($\mathbb{I}$)**

Fixa't que el conjunt dels nombres reals amplia els conjunts de nombres que has estudiat anteriorment: naturals ($\mathbb{N}$), enters ($\mathbb{Z}$) i racionals ($\mathbb{Q}$). Cadascun d'aquests conjunts inclou tots els nombres del conjunt que el precedeix.

Valor absolut d'un nombre real

> El **valor absolut** d'un nombre real és el mateix nombre prescindint del seu signe.

El valor absolut d'un nombre real a es designa amb $|a|$. Així doncs:

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Per exemple:

$$|2| = 2 \qquad |-2| = 2 \qquad |0| = 0 \qquad |\sqrt{3}| = \sqrt{3} \qquad |-\sqrt{3}| = \sqrt{3}$$

El valor absolut d'un nombre és igual a la distància des del nombre fins a 0 a la recta numèrica.

Etimologia

El nom de **nombre irracional** prové de la negació de nombre racional, és a dir, del fet que no és raó (quocient) entre dos nombres enters.

Propietats

Per a qualssevol nombres reals a i b, es verifica:

1. $|a| > 0$, per a tot $a \neq 0$
2. $|a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$
3. $|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$
4. $|a + b| \leq |a| + |b|$
5. $|a| \leq b \Leftrightarrow -b \leq a \leq b$
6. $|a| \geq b \Leftrightarrow a \leq -b$ o $a \geq b$

ACTIVITATS

5. Indica quins dels nombres reals següents són irracionals:

$0,\widehat{75}$ $\quad \sqrt{2}$ $\quad 2,75$ $\quad 0,12345\ldots$ $\quad \dfrac{3}{5}$ $\quad 0,\widehat{2}$

6. Troba quins valors pot prendre x en cada cas:

a) $|x - 3| = 4$ c) $|6 - x| = 3$ e) $|2x| = 5$

b) $|3x - 2| = 7$ d) $|7 - 4x| = 9$ f) $|-5x| = 25$

3. Aproximacions

Si un nombre real té infinites xifres decimals no periòdiques, encara que se sàpiga com trobar-les, és impossible escriure-les totes. Per tant, ens veiem obligats a fer servir aproximacions per treballar amb el nombre.

Per exemple, $\sqrt{2} = 1{,}414213562...$ té infinites xifres decimals no periòdiques. Podem escriure aproximacions per excés i per defecte d'aquest nombre fins a l'ordre desitjat:

L'aproximació per **defecte** fins a les $\begin{cases} \text{dècimes és } 1{,}4 \\ \text{centèsimes és } 1{,}41 \\ \text{mil·lèsimes és } 1{,}414 \end{cases}$

L'aproximació per **excés** fins a les $\begin{cases} \text{dècimes és } 1{,}5 \\ \text{centèsimes és } 1{,}42 \\ \text{mil·lèsimes és } 1{,}415 \end{cases}$

Tot i així, la manera més freqüent d'aproximar és per **arrodoniment**.

Per **arrodonir** un nombre decimal fins a un ordre determinat, suprimim les xifres decimals a partir d'aquest ordre i, tot seguit, observem la primera xifra que hem suprimit:

- Si és més petita que 5, deixem igual la xifra anterior.
- Si és més gran o igual que 5, augmentem en una unitat la xifra anterior.

Per exemple, l'aproximació per arrodoniment fins a les dècimes de 1,31652 és 1,3, perquè la primera xifra suprimida és 1, mentre que l'aproximació fins a les centèsimes és 1,32, perquè la primera xifra suprimida és 6.

3.1 Error absolut en l'aproximació

L'**error absolut** que es comet en aproximar un nombre real és igual al valor absolut de la diferència entre el nombre real i l'aproximació realitzada.

Així, per exemple, quan s'aproxima $\sqrt{2}$ fins a les mil·lèsimes per defecte, l'error comès és: $|\sqrt{2} - 1{,}414|$

És impossible conèixer aquest error amb exactitud, perquè no coneixem totes les xifres decimals de $\sqrt{2}$. No obstant això, podem assegurar que és més petit que el valor absolut de la diferència entre l'aproximació per excés i l'aproximació per defecte. Així doncs, l'error comès en aproximar $\sqrt{2}$ fins a les mil·lèsimes verifica:

$$\text{Error absolut} < |1{,}415 - 1{,}414| = 0{,}001$$

En aproximar un nombre fins a un ordre determinat, l'error absolut comès és menor que una unitat de l'ordre d'aproximació. Si l'aproximació és per arrodoniment, és menor que mitja unitat de l'ordre esmentat.

Valor vertader

La mida real d'una magnitud no es pot conèixer, però si fem successius mesuraments amb instruments cada vegada més precisos, els valors obtinguts s'aproximaran cada vegada més a un valor que prendrem com a **valor vertader** de la magnitud.

Com que el valor real de la mida no es pot conèixer amb precisió total, sempre que es fa un mesurament s'ha de donar el valor obtingut acompanyat d'una estimació de l'error comès.

ACTIVITATS

7. Aproxima aquests nombres per defecte i per excés fins a les dècimes, centèsimes i mil·lèsimes: $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$

8. Aproxima $\sqrt{13}$ per defecte i per excés fins a les centèsimes i calcula l'error comès.

9. Aproxima el nombre π per arrodoniment fins a les centèsimes. Quin és el valor màxim de l'error absolut?

3.2 Error relatiu en l'aproximació

Suposem que mesurem la longitud d'un regle de dibuix i la distància entre Pamplona i Tarragona, i en tots dos casos obtenim la mesura amb error absolut d'1 cm.

És clar que la segona mesura ha estat més ben feta que la primera, encara que el seu error absolut sigui el mateix. Per diferenciar la qualitat de totes dues mesures introduïm la idea d'*error relatiu*.

> L'**error relatiu** en fer una aproximació és el quocient entre l'error absolut i el valor exacte.

L'error relatiu acostuma a ser expressat en tant per cent.

No ho oblidis

L'error relatiu quantifica l'error que es comet per cada unitat mesurada.

EXEMPLE

Calcula l'error relatiu comès en mesurar 42,9 m en comptes del valor exacte 42,8 m.

Calculem l'error absolut: $|42{,}9 - 42{,}8| = 0{,}1$

L'error relatiu és: $\dfrac{0{,}1}{42{,}8} = 0{,}0023364485... < 0{,}003$

Per tant, l'error relatiu és més petit que 3 mil·lèsimes. En tant per cent, podem dir que l'error relatiu no excedeix del 0,3 %.

3.3 Xifres significatives

> **Xifres significatives** són aquelles que es coneixen amb certesa.

Així doncs, si quan mesurem una longitud obtenim 4,785 m amb un error absolut d'1 mm, sabem que la mesura real està compresa entre 4,784 m i 4,786 m, per tant la darrera xifra de la mesura feta és imprecisa.

Ja que només coneixem amb certesa les tres primeres xifres, 4, 7 i 8, les xifres significatives a 4,785 són tres: 4, 7 i 8.

Zon@web
www.vicensvives.net/zonaweb
Aprèn més coses sobre nombres reals. 2a

ACTIVITATS

10. En prendre 3,1416 com a valor de π es comet un error absolut menor que 0,0001. Troba l'error relatiu de l'aproximació.

11. El nombre d'or és $\phi = 1{,}618033...$ Quin error relatiu es comet en prendre com a valor 1,62?

12. Se sap que $\sqrt{6} = 2{,}4494897...$ Quin error relatiu es comet quan es pren com a valor 2,45?

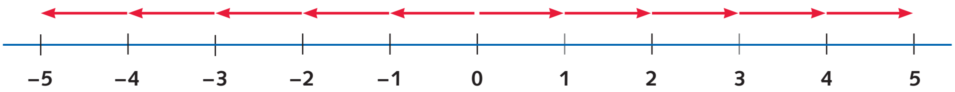
13. Quin error relatiu es comet en prendre 0,9 com a aproximació de 8/9? I en prendre 0,69 com a aproximació de 11/16?

4. Representació a la recta

Per representar nombres en una recta necessitem marcar el punt que representa el 0 i el punt que representa l'1.

4.1 Representació de nombres enters

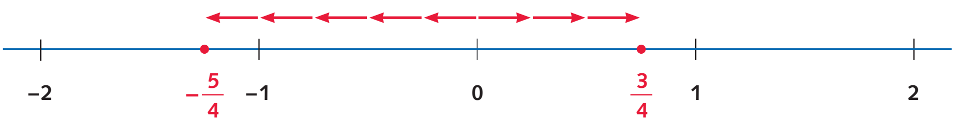
Per representar un nombre enter a la recta, a partir del punt 0 portem la distància entre 0 i 1 tantes vegades com indica el valor absolut del nombre, cap a la dreta si el nombre és positiu, i cap a l'esquerra si és negatiu.



4.2 Representació de nombres racionals

Per representar un nombre racional a la recta, dividim la distància entre 0 i 1 en tantes parts com indica el denominador de la fracció i, tot seguit, a partir del 0 portem les parts indicades pel numerador, cap a la dreta si el nombre és positiu, i cap a l'esquerra si és negatiu.

Per exemple, per representar el nombre $\frac{3}{4}$, dividim la distància entre 0 i 1 en quatre parts iguals. Com que el nombre és positiu, a partir del 0 portem tres parts cap a la dreta. Per representar $-\frac{5}{4}$, com que és negatiu, portem cinc parts cap a l'esquerra.



4.3 Representació de nombres irracionals

Distingim entre els que són radicals quadràtics i els que no ho són.

Nombres irracionals que són radicals quadràtics

Aquests nombres es poden representar exactament a la recta fent servir el teorema de Pitàgores.

Per exemple, per representar a la recta el nombre irracional $\sqrt{2}$:

– Aixequem sobre l'1 un segment perpendicular de longitud 1.

– Unim l'extrem del segment, que no pertany a la recta, P, amb l'origen, O. La longitud d'OP és $\sqrt{2}$.

– Traslladem sobre la recta el segment OP.

La recta real

Donades dues fraccions no equivalents sempre és possible trobar una fracció compresa entre elles.

Per tant, quan representem a la recta els nombres racionals, entre dos qualssevol hi ha sempre infinits nombres racionals.

Tanmateix, els nombres racionals no cobreixen tots els punts de la recta, deixen buits que corresponen als nombres irracionals.

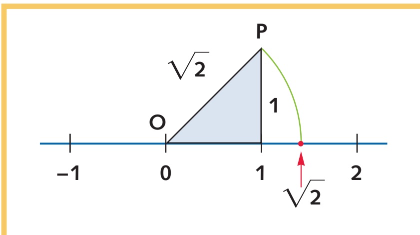
Els nombres racionals i els irracionals sí que omplen la recta, de manera que:

A cada nombre real li correspon un únic punt de la recta, i recíprocament.

Per això la recta rep el nom de **recta real**.

Recorda-ho

S'anomenen radicals quadràtics les arrels d'índex 2, és a dir, les arrels quadrades.



Nombres irracionals que no són radicals quadràtics

Si el nombre irracional no és un radical quadràtic, només se'n pot aconseguir una representació aproximada.

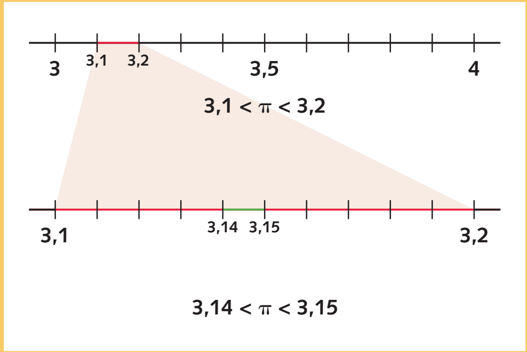
EXEMPLE

Representa a la recta el nombre irracional π.

– Per representar π amb error menor que una dècima, tenim en compte que $3{,}1 < \pi < 3{,}2$. Així doncs, el punt corresponent a π es trobarà al segment determinat per 3,1 i 3,2.

– Per representar π amb error menor que una centèsima tindrem en compte que $3{,}14 < \pi < 3{,}15$. El punt corresponent a π serà un punt del segment determinat per 3,14 i 3,15.

– Si volem obtenir aproximacions de π fins a les mil·lèsimes, deumil·lèsimes, ... procedirem de manera anàloga.



4.4 Comparació de nombres reals

Per comparar dos nombres reals a i b, podem procedir de dues maneres diferents:

- Els expressem de manera decimal i fem la resta $b - a$. Aleshores:
  - Si $b - a$ és positiu, b és més gran que a.
  - Si $b - a$ és negatiu, b és més petit que a.
  - Si $b - a$ és zero, b i a són iguals.
- Els representem a la recta i n'observem la situació:

  Si el nombre b queda situat a la dreta de a, b és més gran que a.

ACTIVITATS

14. Representa aquests nombres a la recta numèrica:

3 5 7 −2 −6 −9

15. Representa els nombres racionals següents a la recta numèrica:

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{3} \quad -\frac{3}{4} \quad -\frac{4}{5} \quad \frac{6}{6} \quad \frac{11}{4} \quad -\frac{8}{5}$$

16. Dues fraccions que són equivalents, es representen al mateix punt de la recta numèrica? Raona la resposta i posa'n un exemple.

17. Si una fracció té iguals el numerador i el denominador, en quin punt de la recta es representa? I si el denominador és 1? I si el numerador és zero?

18. Explica el procediment que has de seguir per representar a la recta numèrica el nombre $\phi = 1{,}618033...$ fent servir aproximacions fins a les dècimes, centèsimes i mil·lèsimes.

19. Dos nombres reals estan representats a la recta numèrica. Quin dels dos és més gran?

20. Compara aquests nombres sense representar-los a la recta numèrica:

a) −7,3 i −7,5
b) −4,40 i −4,04
c) −6,754 i −6,753
d) 3/7 i 5/13
e) 2,56 i 2,58
f) −0,4 i −0,04

5. Suma i producte

Al tema 1 hem vist com s'opera amb nombres racionals. Per tant, ara només veurem com s'opera amb els nombres reals que no són racionals, és a dir, els irracionals.

5.1 Suma

Per sumar dos nombres irracionals podem fer la suma per defecte o per excés, segons si agafem aproximacions per defecte o per excés dels nombres.

EXEMPLE

Calcula $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ sabent que $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$ i $\sqrt{7} = 2{,}64575\ldots$

Si prenem aproximacions per defecte fins a les dècimes:

$$\sqrt{2} + \sqrt{7} = 1{,}4 + 2{,}6 = 4{,}0$$

Si prenem aproximacions per excés fins a les dècimes:

$$\sqrt{2} + \sqrt{7} = 1{,}5 + 2{,}7 = 4{,}2$$

Ajuntant tots dos resultats, podem dir que si prenem aproximacions fins a les dècimes, la suma $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ es troba entre 4,0 i 4,2.

Procedint de la mateixa manera, veiem que si prenem aproximacions fins a les centèsimes, la suma $\sqrt{2} + \sqrt{7}$ es troba entre $1{,}41 + 2{,}64$ i $1{,}42 + 2{,}65$, és a dir, entre 4,05 i 4,07; si prenem aproximacions fins a les mil·lèsimes, entre 4,059 i 4,061, etc.

5.2 Producte

Per calcular el producte de dos nombres irracionals se segueix un procediment semblant al de la suma.

EXEMPLE

Calcula $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$.

Si prenem aproximacions per defecte fins a les dècimes:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = 1{,}4 \cdot 2{,}6 = 3{,}64$$

Si prenem aproximacions per excés fins a les dècimes:

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = 1{,}5 \cdot 2{,}7 = 4{,}05$$

Com que treballem amb aproximacions fins a les dècimes, direm que el producte de $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$ es troba entre 3,6 i 4,0.

De la mateixa manera, prenent aproximacions fins a les centèsimes, s'obté que $\sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$ es troba entre 3,72 i 3,76; si prenem aproximacions fins a les mil·lèsimes, entre 3,740 i 3,744, etc.

Tingues-ho en compte

La resta i la divisió de nombres reals es fan seguint procediments anàlegs als de la suma i el producte.

ACTIVITATS

21. Tenint en compte que $\sqrt{14} = 3{,}741657387\ldots$ i que $\sqrt{23} = 4{,}795831523\ldots$, calcula per defecte i per excés, aproximant el resultat fins a les dècimes, les centèsimes i les mil·lèsimes:

a) $\sqrt{14} + \sqrt{23}$

b) $\sqrt{14} - \sqrt{23}$

c) $\sqrt{14} \cdot \sqrt{23}$

22. Tenint en compte que $\pi = 3{,}141592654\ldots$ i que $\sqrt{8} = 2{,}828427125\ldots$, calcula per defecte i per excés, aproximant el resultat fins a les dècimes, les centèsimes i les mil·lèsimes:

a) $2\sqrt{8} + 3\pi$

b) $\left(\sqrt{8} + 4\pi\right) : \sqrt{8}$

6. Potències i arrels

6.1 Potències

Sigui a un nombre real i n un nombre enter positiu. Es defineix:

$$a^n = a \cdot a \cdot \overset{n \text{ vegades}}{\cdots\cdots} \cdot a$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n},\ a \neq 0$$

$$a^0 = 1,\ a \neq 0$$

Per exemple:

- $(-3)^4 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 81$
- $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{2}{5}\right)^3} = \frac{1}{\frac{8}{125}} = \frac{125}{8}$

Propietats

- El **producte de dues potències de la mateixa base** és la potència de la mateixa base que té per exponent la suma dels exponents: $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
- El **quocient de dues potències de la mateixa base** és la potència de la mateixa base que té per exponent la diferència dels exponents: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
- La **potència d'un producte** és igual al producte de les potències dels factors: $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
- La **potència d'un quocient** és igual al quocient de les potències del dividend i del divisor: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
- La **potència d'una potència** és igual a la base de la potència elevada al producte dels exponents: $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

6.2 Arrels

L'arrel d'índex n d'un nombre real a és un nombre b que verifica $b^n = a$:

$$\sqrt[n]{a} = b \iff b^n = a$$

Per exemple:

- $\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm\frac{2}{5}$ ja que $\left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$ i $\left(-\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.
- $\sqrt[3]{-216} = -6$ ja que $(-6)^3 = -216$.

RECURSOS TIC

Amb WIRIS pots fer càlculs amb nombres decimals com ho faries amb qualsevol altra calculadora. Has de tenir en compte que la coma decimal es representa per mitjà d'un punt.

En la divisió i en l'extracció d'arrels de nombres enters, si volem una aproximació decimal del resultat, hem d'escriure els nombres amb un punt decimal al final. Per exemple:

$14. / 3. \rightarrow 4.6667$

$\sqrt{2.} \rightarrow 1.4142$

ACTIVITATS

23. Calcula:

a) 2^{-3}

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2}$

c) $\sqrt{196}$

d) $\sqrt{\frac{256}{144}}$

e) 5^{-4}

f) $\left(\frac{4}{5}\right)^{-3}$

g) $\sqrt[3]{-1331}$

h) $\sqrt[4]{\frac{81}{625}}$

24. Obtén el resultat de:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} + 4^0 - \left(\frac{2}{6}\right)^2$

b) $(3^2)^{-2} + (6^{-1})^{-2}$

c) $2^{-5} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-4} + 3^{-2} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

d) $4^{-4} \cdot 2^{-6} + 5^4 : 25^{-2}$

7. Notació científica

La **notació científica** és una manera d'expressar nombres breument fent servir potències de base 10.

En general, un nombre està expressat en **notació científica** si té la forma:

$$C \cdot 10^{n}$$

- El nombre C s'anomena **coeficient** i la seva part entera està formada per una sola xifra no nul·la.
- La base de la potència sempre és 10.
- L'exponent n és un nombre enter.

7.1 Expressió d'un nombre en notació científica

Distingim dos casos:

1. Si el nombre, en valor absolut, és més gran que 10, localitzem la coma i la movem a l'esquerra fins que a l'esquerra de la coma hi quedi una sola xifra diferent de zero. Comptem el nombre n de llocs que hem desplaçat la coma cap a l'esquerra i posem aquest nombre com a exponent:

$$\underbrace{734\,000\,000\,000}_{11 \text{ llocs}} = 7{,}34 \cdot 10^{11}$$

2. Si el nombre, en valor absolut, és més petit que 10, localitzem la coma decimal i la desplacem cap a la dreta fins que a l'esquerra de la coma hi quedi una sola xifra diferent de zero. Comptem el nombre n de llocs que hem desplaçat la coma cap a la dreta i posem $-n$ com a exponent:

$$\underbrace{0{,}000\,000\,000\,000\,5}_{13 \text{ llocs}}32 = 5{,}32 \cdot 10^{-13}$$

Per passar un nombre escrit en notació científica a la notació decimal habitual el procés es fa de manera inversa.

CALCULADORA

La calculadora ens permet efectuar operacions amb nombres expressats en notació científica.

Per introduir un nombre en aquesta notació, per exemple, $3{,}8 \cdot 10^{5}$, premem:

3 · 8 $\times 10^{x}$ 5

Ordre de magnitud

L'ordre de magnitud d'una quantitat és la potència de 10 més propera a aquesta quantitat.

Exemples

- L'ordre de magnitud de $7 \cdot 10^{-5}$ és 10^{-4}.
- L'ordre de magnitud de $2{,}4 \cdot 10^{4}$ és 10^{4}.

ACTIVITATS

25. Expressa en notació científica:

a) 567 000 000 000 000

b) 874 500 000 000 000 000

c) 0,000 000 002 436

d) 0,000 000 000 000 000 034

26. Escriu en notació decimal:

a) $5{,}34 \cdot 10^{-5}$

b) $6{,}278 \cdot 10^{-10}$

c) $2{,}5164 \cdot 10^{12}$

d) $8{,}2 \cdot 10^{3}$

e) $4{,}852 \cdot 10^{-3}$

f) $3{,}217 \cdot 10^{15}$

g) $7{,}3 \cdot 10^{-1}$

h) $1{,}95 \cdot 10^{4}$

8. Operacions en notació científica

8.1 Suma

- Si en l'expressió dels nombres la potència de 10 és la mateixa, sumem els coeficients i escrivim la mateixa potència de 10. Per exemple:

  $$3{,}95 \cdot 10^{12} + 4{,}21 \cdot 10^{12} = (3{,}95 + 4{,}21) \cdot 10^{12} = 8{,}16 \cdot 10^{12}$$

  En el cas que el coeficient del resultat és més gran que 10, desplacem la coma un lloc cap a l'esquerra i afegim una unitat a l'exponent. Per exemple:

  $$7{,}34 \cdot 10^{15} + 6{,}51 \cdot 10^{15} = (7{,}34 + 6{,}51) \cdot 10^{15} = 13{,}85 \cdot 10^{15} = 1{,}385 \cdot 10^{16}$$

- Si en l'expressió dels nombres la potència de 10 és diferent, els hem d'escriure amb la mateixa potència abans de fer la suma. Per exemple:

  $$4{,}6 \cdot 10^{9} + 2{,}7 \cdot 10^{8} = 4{,}6 \cdot 10^{9} + 0{,}27 \cdot 10^{9} = (4{,}6 + 0{,}27) \cdot 10^{9} = 4{,}87 \cdot 10^{9}$$

8.2 Multiplicació

Per multiplicar dos nombres donats en notació científica es multipliquen els coeficients i s'operen les potències de 10. Per exemple:

$$(2{,}13 \cdot 10^{5}) \cdot (3{,}62 \cdot 10^{8}) = (2{,}13 \cdot 3{,}62) \cdot 10^{5+8} = 7{,}7106 \cdot 10^{13}$$

Si el coeficient del resultat és més gran que 10, hem de desplaçar la coma un lloc cap a l'esquerra i afegir una unitat a l'exponent. Així doncs:

$$(8{,}26 \cdot 10^{6}) \cdot (6{,}72 \cdot 10^{7}) = (8{,}26 \cdot 6{,}72) \cdot 10^{6+7} = 55{,}5072 \cdot 10^{13} = 5{,}55072 \cdot 10^{14}$$

8.3 Divisió

Per dividir dos nombres donats en notació científica es divideixen els coeficients i s'operen les potències de 10. Per exemple:

$$(4{,}8 \cdot 10^{5}) : (2{,}5 \cdot 10^{8}) = (4{,}8 : 2{,}5) \cdot 10^{5-8} = 1{,}92 \cdot 10^{-3}$$

Si el coeficient del resultat és més petit que 1, hem de desplaçar la coma un lloc cap a la dreta i restar una unitat a l'exponent. Així doncs:

$$(3{,}8 \cdot 10^{9}) : (7{,}6 \cdot 10^{6}) = (3{,}8 : 7{,}6) \cdot 10^{9-6} = 0{,}5 \cdot 10^{3} = 5 \cdot 10^{2}$$

CALCULADORA

La calculadora permet fer fàcilment operacions amb nombres donats en notació científica.

Per fer-ho, introduïm en notació científica el primer dels nombres, premem la tecla de l'operació que volem fer, i introduïm el segon nombre.

Tot seguit, premem la tecla = per obtenir el resultat.

Aquest es mostrarà en la notació habitual si cap a la pantalla; si no hi cap, es visualitzarà en notació científica.

ACTIVITATS

27. Fes aquestes operacions i expressa'n el resultat en notació científica:

a) $5{,}3 \cdot 10^{15} + 1{,}2 \cdot 10^{15} + 2{,}4 \cdot 10^{15}$

b) $7{,}48 \cdot 10^{14} - 4{,}57 \cdot 10^{13}$

c) $(8{,}8 \cdot 10^{6}) : (2{,}2 \cdot 10^{9})$

d) $6{,}9 \cdot 10^{14} + 7{,}3 \cdot 10^{14} + 8{,}5 \cdot 10^{14}$

e) $(4{,}59 \cdot 10^{7}) \cdot (1{,}67 \cdot 10^{6})$

f) $(1{,}6 \cdot 10^{7}) : (4{,}2 \cdot 10^{11})$

g) $6{,}45 \cdot 10^{13} + 2{,}57 \cdot 10^{12}$

h) $(6{,}74 \cdot 10^{8}) \cdot (3{,}81 \cdot 10^{6})$

i) $(9{,}6 \cdot 10^{15}) : (8{,}8 \cdot 10^{10})$

Resum

Nombres naturals
$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, ...\}$

ampliant amb els nombres negatius

Nombres enters
$\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$

ampliant amb les fraccions

Nombres racionals

ampliant amb els nombres irracionals

Nombres reals

- en representar-los s'obté la → **Recta real**
- si tenen infinites xifres decimals i no són periòdics treballem amb → **Aproximacions**
- es poden expressar en → **Notació científica**

Preguntes clau

1. Què és un nombre irracional? Posa'n alguns exemples.

2. Explica com es defineix el valor absolut d'un nombre i posa'n alguns exemples.

3. Explica per què s'utilitzen les aproximacions de nombres reals. Posa exemples d'aproximacions per excés i per defecte d'un nombre fins a les dècimes, les centèsimes i les mil·lèsimes.

4. Com es defineix l'error absolut que es comet en aproximar un nombre real? I l'error relatiu? Per què es fa servir l'error relatiu?

5. Explica com representaries el nombre π a la recta numèrica.

6. Enuncia les propietats de les potències de nombres reals.

7. Defineix arrel d'índex n d'un nombre real a i posa'n exemples.

8. Indica com s'escriu un nombre en notació científica. Expressa en aquesta notació 24700000 i 0,00000028.

9. Explica com s'opera amb nombres expressats en notació científica. Posa'n exemples.

Practica competències bàsiques

CONJUNTS NUMÈRICS

1 ●○○ Copia aquesta taula i marca els conjunts als quals pertanyi cadascun dels nombres:

	5,2	−3	$0,\widehat{7}$	$\sqrt{3}$	5/8	2/3
$\mathbb{N}$						
$\mathbb{Z}$						
$\mathbb{Q}$						
$\mathbb{I}$						
$\mathbb{R}$						

2 ●●○ Respon vertader o fals a cada frase:

a) Tots els nombres naturals són enters.

b) Tots els nombres enters són racionals.

c) Totes les fraccions són nombres racionals.

d) Tots els nombres decimals són racionals.

e) Tots els nombres racionals són reals.

f) Tots els nombres irracionals són reals.

3 ●●○ Respon vertader o fals a cada frase:

a) Hi ha nombres enters que no són naturals.

b) Hi ha nombres racionals que no són enters.

c) Tots els nombres decimals es poden expressar com a fracció.

d) Entre cada dos nombres racionals diferents hi ha infinits nombres racionals.

e) Hi ha nombres reals que no són racionals.

f) Tots els nombres reals que no es poden expressar com a fracció són irracionals.

4 ●●○ Escriu aquests nombres en forma de fracció:

a) 4 c) 0 e) 0,47 g) 0,333...

b) −6 d) 2,4 f) 5,362 h) 0,54777...

5 ●●● Busca a Internet una demostració que $\sqrt{2}$ és irracional i intenta comprendre-la.

VALOR ABSOLUT

6 ●○○ Calcula:

a) $|19|$ c) $|-35|$ e) $|19|$

b) $|0{,}25|$ d) $\left|\dfrac{12}{-27}\right|$ f) $\left|\dfrac{-8}{15}\right|$

7 ●●○ Busca el valor de les expressions següents per a $x = 2$ i $y = -6$:

a) $3 \cdot |x + y| - 4\,|x - y|$

b) $4 \cdot |x \cdot y| - 2\left|\dfrac{x}{y}\right|$

8 ●●○ Calcula el valor de les expressions següents per a $x = -3$ i $y = -4$:

a) $\dfrac{|x + y|}{|x - y|}$ c) $\dfrac{|-2||x \cdot y|}{|x : y|}$

b) $\left|\dfrac{x + y}{x - y}\right|$ d) $\left|\dfrac{4 - |2 \cdot x|}{y - x}\right|$

9 ●●● Quins valors pot prendre x en cada cas?

a) $|x - 8| = 15$ c) $|10 - 2x| = 4$ e) $|4x| = 44$

b) $|5x - 8| = 12$ d) $|7 + 4x| = 31$ f) $|-8x| = 32$

APROXIMACIONS. ERRORS

10 ●○○ Aproxima aquests nombres per defecte i per excés fins a les dècimes, fins a les centèsimes i fins a les mil·lèsimes:

a) 4,5782 b) $\sqrt{31}$ c) $\dfrac{6}{7}$ d) 65,9057

11 ●○○ Aproxima per defecte i per excés fins a les mil·lèsimes els nombres següents i comprova que l'error absolut comès en cada cas és menor que una mil·lèsima:

a) 17,89452 b) $\sqrt{19}$ c) 7,453

12 ●○○ Quin és l'error absolut que es comet quan es pren 2,54 com a aproximació de 2,5386? Quin és l'error relatiu?

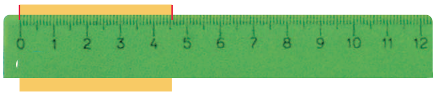
13 ●○○ Quin error absolut es comet en prendre 0,58 com a aproximació del nombre $\dfrac{7}{12} = 0{,}58\widehat{3}$? Quin és l'error relatiu?

14 ●○○ Donat el nombre $\dfrac{11}{8}$, quins són els errors absolut i relatiu comesos quan es pren com a aproximació 1,38?

15 ●○○ Troba l'error absolut i l'error relatiu que es comet en prendre 0,6 com a aproximació de 0,5625.

16 ●○○ En mesurar una pista d'atletisme de 400 m de longitud es comet un error de 0,5 m. Quin és l'error relatiu?

17 ●●○ Mesurem una longitud amb un regle que aprecia mil·límetres, i obtenim 4,57 cm. Entre quins valors es troba la longitud real?



18 ●●○ Arrodoneix els nombres següents a les centèsimes:

a) 4,696 b) 6,3333.... c) 7,453

Digues quin és l'error absolut que comets en cada cas i quantes xifres significatives tenen els nombres arrodonits.

19 ●●○ Aproxima aquests nombres per arrodoniment fins a les dècimes:

a) 4,784 b) 1,43 c) 18,95

Digues quin és l'error absolut que comets en cada cas i quantes xifres significatives tenen els nombres arrodonits.

REPRESENTACIÓ I ORDENACIÓ

20 ●○○ Representa aquests nombres a la recta numèrica:

6 −3 8 0,5 −2 0,25

21 ●○○ Representa aquests nombres a la recta numèrica:

$\frac{5}{4}$ $\frac{-1}{3}$ $-\frac{7}{4}$ $\frac{9}{5}$ $\frac{5}{3}$ $\frac{13}{10}$ $-\frac{3}{5}$

22 ●○○ Escriu quatre fraccions que es representin al mateix punt de la recta numèrica. Com són entre si aquestes fraccions?

23 ●○○ Explica el procés que has de seguir per representar a la recta numèrica el nombre 5,6947 fent servir aproximacions per defecte i per excés fins a les dècimes, les centèsimes i les mil·lèsimes.

24 ●●○ Representa a la recta numèrica:

$\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$

a) Amb una aproximació fins a les centèsimes.

b) Fent servir el teorema de Pitàgores.

25 ●●○ Compara aquests nombres sense representar-los a la recta numèrica:

a) 8,5 i 9,5 c) $\frac{9}{16}$ i $\frac{19}{33}$

b) −4,40 i −4,4 d) −9,454 i −9,543

26 ●●○ Ordena aquests nombres de més petit a més gran:

$\frac{2}{5}$ $\frac{15}{38}$ 0,396 0,3906 0,3959

27 ●●○ Copia i completa aquestes expressions:

a) $x + 3 > 0$ equival a $x > \square$.

b) $x - 9 > 0$ equival a $x > \square$.

c) $x - 4 < 0$ equival a $x < \square$.

d) $x + 8 < 0$ equival a $x < \square$.

e) $2 \cdot x < 10$ equival a $x < \square$.

f) $4 \cdot x > 12$ equival a $x > \square$.

g) $-3 \cdot x < 15$ equival a $x \square -5$.

h) $-4 \cdot x > -20$ equival a $x \square 5$.

28 ●●○ Copia i completa aquestes expressions:

a) Si $3x - 6 < 0$, aleshores $x < \square$.

b) Si $5x + 10 > 0$, aleshores $x > \square$.

c) Si $-6x + 12 > 0$, aleshores $x \square 2$.

d) Si $-3x - 18 < 0$, aleshores $x \square -6$.

29 ●●○ Representa a la recta real els conjunts de punts que compleixen aquestes condicions:

a) $x > 3$ g) $-2 < x < 4$

b) $x < 5$ h) $1 < x < 5$

c) $x > -1$ i) $-1 \leq x \leq 3$

d) $x < -4$ j) $-4 \leq x \leq -2$

e) $x \leq 2$ k) $-5 \leq x < 5$

f) $x \geq 1$ l) $3 < x \leq 6$

OPERACIONS AMB NOMBRES REALS

30 ●○○ Donats $\sqrt{12} = 3{,}4641...$ i $\sqrt{15} = 3{,}87298...$, calcula per defecte i per excés:

a) $\sqrt{12} + \sqrt{15}$ c) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{15}$

b) $\sqrt{12} - \sqrt{15}$ d) $\sqrt{12} : \sqrt{15}$

Aproxima el resultat fins a les dècimes, fins a les centèsimes i fins a les mil·lèsimes.

Practica competències bàsiques

31 ●○○ Donats $\sqrt{17} = 4{,}123105...$ i $\sqrt{21} = 4{,}582575...$, calcula per defecte i per excés:

a) $3\sqrt{17} + 5\sqrt{21}$ b) $(\sqrt{17} + \sqrt{21}) : (\sqrt{21} - \sqrt{17})$

Aproxima el resultat fins a les dècimes, fins a les centèsimes i fins a les mil·lèsimes.

32 ●○○ Calcula aquestes potències:

a) 4^{-3} c) 8^{-2} e) 5^{-3} g) 8^{-1}

b) 12^{0} d) $(-3)^{2}$ f) -3^{2} h) $(-3)^{-2}$

33 ●○○ Calcula aquestes potències:

a) $\left(\frac{5}{6}\right)^{2}$ c) $\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$ e) $\left(\frac{13}{25}\right)^{0}$ g) $\left(\frac{4}{11}\right)^{-1}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}$ d) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-5}$ f) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$ h) $\left(\frac{5}{12}\right)^{-2}$

34 ●○○ Calcula:

a) $\sqrt[3]{-27}$ c) $\sqrt[3]{125}$ e) $\sqrt[4]{16}$ g) $\sqrt[3]{-64}$

b) $\sqrt{81}$ d) $\sqrt{144}$ f) $\sqrt[5]{32}$ h) $\sqrt{36}$

35 ●○○ Obtén el resultat de:

a) $\sqrt{\frac{81}{144}}$ c) $\sqrt{\frac{8}{27}}$

b) $\sqrt{\frac{169}{196}}$ d) $\sqrt[3]{\frac{-343}{512}}$

36 ●○○ Amb la calculadora, fes les operacions indicades i arrodoneix el resultat a les centèsimes:

a) $2{,}35^{2} - 1{,}29^{3} + 5{,}36^{4}$ c) $144 \cdot (4^{-2})^{3} + 60 \cdot (8^{-2})^{-1}$

b) $2{,}87^{3} + 3{,}67^{2} \cdot 5{,}3^{-2}$ d) $6^{3} \cdot 3^{-2} - 8^{2} : 0{,}5^{-4}$

37 ●○○ Efectua: $3^{-4} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-4} + 5^{-2} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-2}$

38 ●●○ Troba el resultat d'aquestes operacions:

a) $4\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} - 3\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} + \frac{9^{-2}}{3^{-4}}$ c) $\dfrac{\left(\frac{3}{5}\right)^{-2} + \frac{2}{9}}{\left(\frac{8}{3}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{3}}$

b) $\dfrac{8 + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^{2}}{6 - \left(\frac{1}{4} - \frac{5}{8}\right)^{-1}}$ d) $2 + \dfrac{\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{5}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{4}\right)^{2} + 2^{-4}}$

39 ●●○ Fes aquestes operacions:

a) $\sqrt{1 - \frac{15}{16}}$ c) $(\sqrt{13} + \sqrt{7}) \cdot (\sqrt{13} - \sqrt{7})$

b) $\sqrt[3]{\frac{1}{4} + \frac{11}{64}}$ d) $\sqrt[3]{\left(\frac{\sqrt{36}}{\sqrt[3]{8}}\right)^{2}}$

40 ●●○ Calcula:

a) $\sqrt{4x^{4}}$ c) $\sqrt{64x^{4}y^{2}} : \sqrt[3]{-64x^{3}y^{3}}$

b) $\sqrt[3]{-8x^{3}y^{6}}$ d) $\sqrt[3]{-8x^{6}y^{9}} \cdot \sqrt{25x^{6}y^{4}}$

41 ●●○ Per pintar el terra d'una pista circular de 15,6 m de radi s'ha pensat de fer servir pots de 800 g de pintura que costen 12,9 € la unitat. Si amb un pot es poden cobrir de pintura aproximadament 22 m² de superfície, calcula:

a) Quants pots es necessitaran com a mínim per pintar el terra de la pista?

b) Quant costarà pintar la pista?

c) Quants pots es necessitarien i quant costaria si s'hi donessin tres capes de pintura?

42 ●●○ Una biblioteca té 2 753 255 llibres. Si cada llibre té de mitjana 287 pàgines i una persona pot llegir una pàgina cada 3 minuts, esbrina quants anys de la seva vida trigaria a llegir tots els llibres a un ritme de 9 hores diàries.

NOTACIÓ CIENTÍFICA

43 ●○○ Expressa en notació científica els nombres següents:

a) 238 400 000 000 000

b) 560 500 000 000 000 000

c) 0,000 000 000 003 586

d) 605 600 000 000 000 000

e) 0,000 000 000 509

44 ●○○ Expressa en notació decimal aquests nombres escrits en notació científica:

a) $5{,}37 \cdot 10^{-6}$ f) $2{,}635 \cdot 10^{-2}$

b) $8{,}117 \cdot 10^{-9}$ g) $7{,}413 \cdot 10^{12}$

c) $3{,}6587 \cdot 10^{8}$ h) $5{,}56 \cdot 10^{-2}$

d) $1{,}45 \cdot 10^{4}$ i) $5{,}175 \cdot 10^{3}$

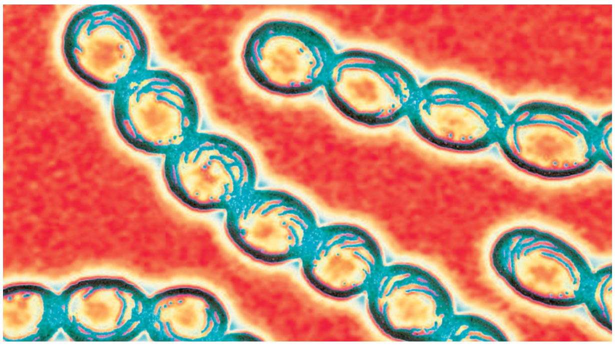
e) $6{,}047 \cdot 10^{5}$ j) $4{,}802 \cdot 10^{-13}$

45 ●○○ Explica per què aquests nombres no estan en notació científica:

a) $0{,}75 \cdot 10^{16}$
b) $3{,}257 \cdot 100^{9}$
c) $0{,}5 \cdot 10^{11}$
d) $12{,}54 \cdot 10^{8}$
e) $4{,}832 \cdot 10^{7{,}5}$
f) $45 \cdot 10^{-13}$

46 ●○○ Expressa en notació científica la velocitat de la llum al buit, que és de 300 000 km/s.

47 ●○○ Un bacteri esfèric té 0,000 007 m de diàmetre. Expressa aquesta mesura en notació científica.



48 ●○○ La nostra galàxia, la Via Làctia, conté aproximadament cent mil milions d'estrelles. Escriu aquest nombre en notació científica.

49 ●○○ Expressa en notació científica el radi del Sol, que fa aproximadament 696 000 000 m.

50 ●○○ La distància aproximada entre la Terra i el Sol és de 149 597 000 km. Expressa-la en notació científica.

51 ●●○ Indica, en cada cas, quin dels dos nombres és més gran:

a) $4{,}7489 \cdot 10^{8}$ i $4{,}7490 \cdot 10^{8}$
b) $5{,}492 \cdot 10^{8}$ i $6{,}5043 \cdot 10^{7}$
c) $3{,}29 \cdot 10^{-5}$ i $3{,}289 \cdot 10^{-5}$
d) $4{,}46 \cdot 10^{-5}$ i $4{,}459 \cdot 10^{-6}$

52 ●●○ Ordena aquests nombres de més petit a més gran:

$A = 4{,}059 \cdot 10^{-5}$
$B = 4{,}049 \cdot 10^{6}$
$C = 4{,}059 \cdot 10^{-4}$
$D = 4{,}05 \cdot 10^{5}$
$E = 4{,}06 \cdot 10^{-5}$
$F = 4{,}051 \cdot 10^{5}$

53 ●●○ Fes aquestes sumes i restes i expressa el resultat en notació científica:

a) $3{,}637 \cdot 10^{9} + 6{,}75 \cdot 10^{10}$
b) $7{,}52 \cdot 10^{12} - 8{,}61 \cdot 10^{11}$
c) $8{,}54 \cdot 10^{10} + 4{,}16 \cdot 10^{8}$

54 ●●○ Fes aquestes operacions i expressa el resultat en notació científica:

a) $4{,}83 \cdot 10^{12} + 5{,}234 \cdot 10^{12} - 3{,}48 \cdot 10^{12}$
b) $4{,}93 \cdot 10^{11} - 3{,}25 \cdot 10^{11} - 1{,}54 \cdot 10^{11}$
c) $8{,}23 \cdot 10^{11} - 4{,}78 \cdot 10^{10} + 2{,}45 \cdot 10^{12}$

55 ●●○ Fes aquestes multiplicacions i expressa el resultat en notació científica:

a) $(2{,}34 \cdot 10^{8}) \cdot (3{,}81 \cdot 10^{5})$
b) $(8{,}254 \cdot 10^{6}) \cdot (4{,}324 \cdot 10^{4})$
c) $(1{,}1 \cdot 10^{9}) \cdot (8{,}8 \cdot 10^{6})$

56 ●●○ Fes aquestes divisions i expressa el resultat en notació científica:

a) $(4{,}3 \cdot 10^{15}) : (2{,}1 \cdot 10^{23})$
b) $(6{,}48 \cdot 10^{18}) : (3{,}24 \cdot 10^{23})$
c) $(1{,}12 \cdot 10^{12}) : (4{,}48 \cdot 10^{8})$

57 ●●● Suposa que en un ordinador hi pots escriure 110 xifres per minut. Quantes en podràs escriure en 100 dies si t'hi dediques 8 hores diàries? Expressa el resultat en notació científica.

58 ●●● Calcula quants segons passaràs a l'escola aquest curs, tenint en compte que el curs té 30 setmanes lectives i l'horari habitual és de les 9 a les 17 h. Expressa el resultat en notació científica.

59 ●●● El diàmetre aproximat dels glòbuls blancs de la sang és d'$1{,}2 \cdot 10^{-7}$ m. Suposant que una persona té aproximadament 5,5 L de sang al seu cos i que el nombre de glòbuls blancs és de 7500 per mil·límetre cúbic, esbrina el nombre total aproximat de glòbuls blancs que té al seu cos. Expressa el resultat en notació científica.

60 ●●● El nombre aproximat de glòbuls vermells a la sang d'una persona és de 5 100 000 per mil·límetre cúbic. Si considerem, com en l'activitat anterior, que el volum de sang d'una persona adulta és d'uns 5,5 L, calcula:

a) El nombre aproximat de glòbuls vermells d'una persona adulta.
b) El percentatge del volum de la sang ocupat pels glòbuls vermells sabent que tenen un volum aproximat de $7{,}7 \cdot 10^{-8}$ mm^{3}.
c) La longitud, en kilòmetres, d'una filera formada pels glòbuls vermells d'una persona adulta sabent que el seu diàmetre és de $7{,}5 \cdot 10^{-6}$ m.

Practica competències bàsiques

PROBLEMES D'ESTRATÈGIA

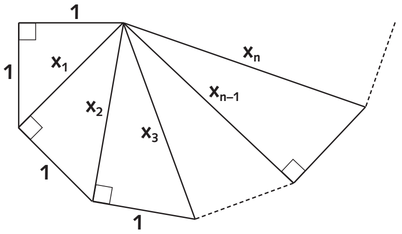
Mètode d'inducció completa

Aquest mètode s'utilitza per demostrar una relació que depèn d'un nombre natural n. Es procedeix d'aquesta manera:

1. Es demostra que la relació és certa per a $n = 1$.
2. Es demostra per a $n + 1$ suposant que és certa per a n.

PROBLEMA RESOLT

Demostra que, per a qualsevol valor de n, n $\neq$ 0 la hipotenusa de l'enèsim triangle de la sèrie del dibuix (cargol de Pitàgores) fa $\sqrt{n+1}$.



Comprensió de l'enunciat

Es tracta de demostrar que per a qualsevol valor de n es compleix $x_n = \sqrt{n+1}$, essent x_n la hipotenusa del triangle que ocupa el lloc n a la sèrie.

Planificació de la resolució

Com que hem de provar que es compleix una relació per a tot nombre natural, aplicarem el mètode d'inducció.

Execució del pla de resolució

1. Per començar, demostrem que es compleix per a $n = 1$, és a dir, que la hipotenusa del primer triangle fa $\sqrt{2}$:

   El primer triangle de la sèrie és un triangle rectangle els catets del qual fan 1. Pel teorema de Pitàgores, la mida de la hipotenusa serà:

   $$x_1 = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

2. Ara suposem que la hipotenusa del triangle que ocupa el lloc n de la sèrie fa $\sqrt{n+1}$. Es tracta de veure que la hipotenusa del triangle següent de la sèrie fa $x_{n+1} = \sqrt{n+2}$.

   Efectivament, aquest triangle serà un triangle rectangle els catets del qual faran $\sqrt{n+1}$ i 1. Una altra vegada pel teorema de Pitàgores, es té que:

   $$x_{n+1} = \sqrt{\left(\sqrt{n+1}\right)^2 + 1^2} = \sqrt{n+1+1} = \sqrt{n+2}$$

Per tant, és cert que $x_n = \sqrt{n+1}$ per a qualsevol valor de n, $n \neq 0$.

Resposta

La hipotenusa de l'enèsim triangle del cargol de Pitàgores fa $\sqrt{n+1}$.

PROBLEMA PROPOSAT

61 Demostra que la suma dels quadrats dels n primers nombres naturals és:

$$S_n = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

PREPARA'T PER A LES PROVES PISA

62 Es vol cobrir una superfície rectangular amb tela asfàltica. Per fer-ho, s'ha mesurat la llargada i l'amplada i s'ha obtingut com a resultat 32,6 m i 23,5 m, respectivament. Si aquestes mides estan preses amb un error menor del 5 %, respon:

a) En quin interval de valors es troba la mida exacta de la superfície de tela asfàltica que necessitarem?

b) Si el preu de la tela asfàltica és de 100 €/m² i el pressupost és de 69000 €, serà possible fer el recobriment previst?

63 En un control de qualitat sobre un lot de 100 coixinets se n'han rebutjat cinc perquè la diferència entre el seu diàmetre i el diàmetre òptim considerat, 2 cm, era superior a l'error màxim admissible de 0,1 cm. Si les mides d'aquestes peces van ser 2,2 cm, 2,75 cm, 1,8 cm, 1,75 cm i 2,15 cm, calcula l'error absolut i el relatiu de cada peça rebutjada i l'error mitjà de les cinc peces.

Zon@web www.vicensvives.net/zonaweb

Fes més activitats per preparar-te bé. 2b

Autoavaluació

www.vicensvivesdigital.com/activitatsweb

1 Escriu tres representants del nombre racional format per les fraccions equivalents a $-\frac{1}{5}$.

2 Indica el menor conjunt numèric al qual pertany cadascun d'aquests nombres:

$$-2, \frac{1}{4}, \sqrt{5}, 721, \frac{\pi}{2}$$

3 Aproxima $\sqrt{3}$ per excés i per defecte fins a les centèsimes i calcula, en cada cas, el valor màxim de l'error absolut i l'error relatiu comesos.

4 El nombre de localitats venudes per a un partit de futbol va ser de 24 875. Quin és l'error relatiu en percentatge que es comet en prendre 25 000 com a xifra indicativa del nombre d'assistents?

5 Representa a la recta real el nombre $\sqrt{8}$ de dues maneres diferents.

6 Escriu com a potències d'exponent positiu:

a) 5^{-2} b) $\frac{1}{2^{-3}}$ c) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-4}$

7 Calcula:

a) $\sqrt{121}$ b) $\sqrt{\frac{225}{40\,000}}$ c) $\sqrt[3]{-512}$ d) $\sqrt[3]{1-217\cdot 9^{-3}}$

8 Expressa en notació científica:

a) 23 470 000 000 000 000 000

b) 0,000 000 000 000 000 000 000 256

c) $5200 \cdot 10^{6}$

d) $0{,}003 \cdot 10^{-3}$

9 En astronomia es fa servir l'any llum per mesurar distàncies molt grans. Sabent que un any llum és la distància que recorre la llum en un any, expressa el nombre de metres i kilòmetres que equivalen a un any llum. Fes servir la notació científica.

10 Fes aquestes operacions i expressa el resultat en notació científica:

a) $2{,}3 \cdot 10^{9} + 1{,}8 \cdot 10^{8}$

b) $4{,}9 \cdot 10^{-7} - 2{,}7 \cdot 10^{-8}$

c) $(1{,}9 \cdot 10^{11}) \cdot (5{,}6 \cdot 10^{9})$

d) $(3{,}4 \cdot 10^{8}) : (1{,}3 \cdot 10^{7})$

Jocs matemàtics Jocs matemàtics Jocs matemàtics Jocs matemàtics

Comerç just

- Un comerciant decideix augmentar el preu d'un producte. Quin ha de ser l'augment perquè en aplicar-hi una rebaixa del 25 % el preu coincideixi amb l'inicial?

Repartiments

- Reparteix 8 L en dues parts iguals. Es disposa de dues gerres de 5 L i 3 L.

- Sabries com repartir 24 L en tres parts iguals, si es disposa de tres gerres de 13 L, 11 L i 5 L?

L'estrella de David

- Dibuixa al quadern aquesta estrella i situa els nombres de l'1 al 12, un a cada cercle, de manera que cada quatre nombres alineats sumin el mateix.